PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN DARI PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH YANG MELIBATKAN KOMPARTEMEN MANUSIA DAN NYAMUK

(Skripsi)

Oleh

HIZKIA ENDAH PUSPITASARI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2018

ABSTRAK

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN DARI PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH YANG MELIBATKAN KOMPARTEMEN MANUSIA DAN NYAMUK

Oleh

Hizkia Endah Puspitasari

Penelitian ini membahas analisis model matematika dari penyebaran penyakit demam berdarah *dengue*. Pada model ini digunakan sistem persamaan differensial dengan peubah *Susceptible, Infected, Recovered* (SIR) yang melibatkan kompartemen manusia dan nyamuk. Model yang diamati terdiri atas dua kasus berdasarkan titik kesetimbangannya dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Selanjutnya, diberikan simulasi untuk setiap kasus yang menggambarkan perilaku dan kestabilan disekitar titik kesetimbangan.

Kata kunci : Sistem Persamaan Differensial, Demam Berdarah *Dengue,* model SIR, kestabilan Routh-Hurwitz.

ABSTRACT

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN DARI PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH YANG MELIBATKAN KOMPARTEMEN MANUSIA DAN NYAMUK

By

Hizkia Endah Puspitasari

This research discusses the stability of mathematical model for dengue fever transmission. The model uses a system of differential equation with variables *Susceptible*, *Infected*, *Recovered* (SIR) with compartments between human and mosquito. In this model, there are two cases observed based on their equilibrium points using Routh-Hurwitz criteria. Furthermore, simulation is given for each case to show the behaviour and the stability of the equilibrium points.

Keywords : System of differential equation, dengue fever, SIR model, Routh-Hurwitz stability.

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN DARI PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH YANG MELIBATKAN KOMPARTEMEN MANUSIA DAN NYAMUK

Oleh

HIZKIA ENDAH PUSPITASARI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
Sarjana Sains

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH YANG MELIBATKAN KOMPARTEMEN MANUSIA DAN NYAMUK**

Nama Mahasiswa : *Hizkia Endah Puspitasari*

NPM : 1417031056

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.	**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP.19740316 200501 1 001	NIP.19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D.
NIP.19631108 198902 2 001

UNIVERSITAS LAMPUNG

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 1995121 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **05 Februari 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: **Hizkia Endah Puspitasari**
Nomor Induk Mahasiswa	: **1417031056**
Judul	: **PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH YANG MELIBATKAN KOMPARTEMEN MANUSIA DAN NYAMUK**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Februari 2018

METERAI TEMPEL
TGL. 20
75730AEF351292894
6000
ENAM RIBU RUPIAH

HIZKIA ENDAH PUSPITASARI
NPM. 1417031056

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Kota Metro, pada tanggal 18 November 1996, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara, putri dari bapak Sapto Hadi Waseso Putro dan ibu Wiwin Indarti. Jenjang pendidikan diawali dari TK Transpram II, diselesaikan pada tahun 2002. Kemudian, Penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SDN 2 Rajabasalama diselesaikan pada tahun 2008. Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 1 Labuhan Ratu diselesaikan pada tahun 2011, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Kristen 1 Metro, diselesaikan pada tahun 2014. Tahun 2014, penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri).

Pada tahun 2017 Penulis melakukan Praktek Kerja Lapangan di Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung, Bandar lampung. Selama menjadi mahasiswa Penulis aktif di organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila sebagai Anggota Bidang Minat dan Bakat periode 2015/2016, penulis juga aktif di organisasi berbasis jurnalistik di FMIPA Unila yaitu NATURAL sebagai anggota bidang kaderisasi periode 2014/2015. Penulis juga pernah menyandang sebagai Koordinator Umum dalam kegiatan agamawi yaitu POM MIPA periode 2016/2017.

KATA INSPIRASI

"I'm totally nothing without God"

-Hizkia Endah Puspitasari-

"Tetapi carilah dahulu Kerajaan Allah dan kebenarannya, maka semuanya itu akan ditambahkan kepadamu."

-Matius 6:33-

"Siapa mengejar kebenaran dan kasih akan memperoleh kehidupan, kebenaran dan kehormatan."

-Amsal 21:21-

"Takut akan TUHAN adalah permulaan pengetahuan, tetapi orang bodoh menghina hikmat dan didikan."

-Amsal 1:7-

SANWACANA

Salam,

Puji Tuhan karena besar anugerah Tuhan Yesus Kristus sehingga penulis beroleh kesempatan untuk menyelesaikan skripsi ini. Skripsi dengan judul " Pemodelan Matematika Dan Analisis Kestabilan Dari Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Yang Melibatkan Kompartemen Manusia Dan Nyamuk" adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

Pada kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang telah dengan sabar dan tulus membimbing, menyemangati, dan memotivasi penulis. Semoga bapak selalu diberikan kesehatan.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang membangun.
3. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya untuk menguji, dan dengan sabar memberikan kritik dan saran.

4. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
8. Teristimewa untuk kedua orang tuaku yang sangat aku cintai dan banggakan bapak Sapto Hadi Waseso Putro dan ibu Wiwin Indarti, terima kasih atas didikan, ajaran, kasih, dan ketulusan yang terus diberikan tanpa henti. Terimakasih sudi menjadi orangtuaku. Tuhan memberkati selalu.
9. Kedua adikku Kinanti Dina Sekar Kinasih dan Talenta Lentera Gema Efrata yang selalu mendukung dan mendoakan, betapa bersyukurnya dan bangganya aku atas adik-adik manis seperti kalian.
10. Rahmat Riyanto, Zulfikar Fahri Bisma, dan Darmawansyah teman seangkatan yang dikaruniai kecerdasan, terimakasih telah meluangkan waktu serta memberikan banyak saran selama penulis menyusun skripsi ini.
11. Saudara-saudari seiman tempat penulis bertumbuh dalam iman dan terus belajar berintegritas baik dalam perkuliahan maupun kehidupan. Yang mengejar harta surgawi dibanding harta duniawi.
12. Teman-temanku Camel, Novi, Oce, Nia, Nur, Kadek, Yani, terimakasih sudah bersama penulis. Keberadaan kalian sangat berarti.

13. Rekan-rekan dan keluargaku Matematika Angkatan 2014 yang telah memotivasi dan memberikan dukungan kepada penulis.
14. Almamater tercinta, Universitas Lampung
15. Semua pihak yang telah membantu penulis selama kuliah, penelitian, hingga penulisan skripsi ini.

Tuhan Yang Maha Kasih selalu memberkati dan menyertai mereka sampai akhir. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi perbaikan penulisan di masa datang.

Bandar Lampung,   Februari 2018
Penulis

Hizkia Endah Puspitasari

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) adalah penyakit menular yang ditularkan oleh nyamuk *Aedes aegypti* melalui virus yang dimilikinya yaitu virus *dengue* dari penderita kepada orang lain melalui gigitannya. Virus ini berkembang biak di dalam kelenjar liur di pangkal belalai nyamuk dan berkembang subur di dalam darah manusia. DBD menyebar secara ruang dan waktu melalui gigitan nyamuk dari penderita ke orang lain dari suatu tempat ke tempat lain di mana penderita lain tersebut berada. (Yatim, 2007).

Terdapat tiga faktor yang memegang peranan pada penularan infeksi virus dengue, yaitu manusia, virus dan vektor perantara (nyamuk). Virus *dengue* ditularkan kepada manusia melalui nyamuk *Aedes Aegypti*., *Aedes albopictus, dan Aedes polynesiensis*. Aedes mengandung virus *dengue* pada saat menggigit manusia. Kemudian virus yang berada di kelenjar liur berkembang biak dalam waktu 8 – 10 hari (*extrinsic incubation period*) sebelum dapat ditularkan kembali pada manusia pada saat gigitan berikutnya. Sekali virus dapat masuk dan berkembang biak di dalam tubuh nyamuk tersebut maka nyamuk dapat menularkan virus selama hidupnya.

Pada manusia, penularan penyakit demam berdarah ketika nyamuk menggigit, alat tusuknya yang disebut *proboscis* akan mencari kapiler darah. Setelah diperoleh, maka dikeluarkan liur yang mengandung zat antipembekuan darah, agar darah mudah di hisap melalui saluran *proboscis* yang sangat sempit. Bersama liurnya inilah virus dipindahkan kepada orang lain. Virus memerlukan waktu masa tunas 4–6 hari (*intrinsic incubation period*) sebelum menimbulkan penyakit (Sukohar, 2014).

Ciri khas dari infeksi virus dengue pada tahap awal adalah demam yang mendadak tinggi dan nyeri di belakang bola mata. Keluhan lain yang tidak khas lainnya seperti sakit kepala, pegal-pegal, dan sebagainya seperti ketika kita mengalami flu. Namun, pada penyakit ini demamnya lebih tinggi dari flu, dan biasanya tidak ada keluhan hidung berair dan bersin-bersin (kalaupun ada tidak menonjol). Penyakit DBD masih merupakan salah satu masalah kesehatan masyarakat di Indonesia yang belum dapat ditanggulangi sampai saat ini. Penyakit ini sering kali menimbulkan Kejadian Luar Biasa (KLB) di beberapa kabupaten/kota di Indonesia. Pada tahun 2012, kasus DBD di Indonesia dilaporkan sebanyak 90.245 orang dengan kematian 816 orang. Pada tahun 2013, *Incident Rate* (IR) DBD adalah 45,85/100.000 penduduk (Kemenkes RI, 2013).

Dalam dunia matematika masalah tersebut dapat dianalisis dan diperoleh hasil yang eksak dengan cara memodelkan masalah yang ada. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model epidemik SIR, dimana populasi manusia dibagi menjadi tiga bagian. Yang pertama adalah *Susceptible* yang berarti kelompok manusia yang sehat dan tidak terinfeksi. Kelompok yang kedua adalah *Infected*, merupakan kelompok yang terinfeksi. *Recovered* adalah kelompok ketiga yang merupakan kelompok yang telah sembuh dan kebal dari penyakit. Dan populasi nyamuk dibagi menjadi dua bagian, yaitu *Susceptible* dan *Infected.*

Metode yang akan digunakan dalam penelitian kali ini adalah mengkaji secara deskriptif melalui studi literature untuk mempelajari hal-hal yang berkaitan dengan model epidemik dan menganalisis kestabilannya, kemudian mensimulasikan program dari penyebaran penyakit DBD. Metode numerik dipakai untuk mensimulasikannya dengan program *Matlab R2013b* karena dapat menyelesaikan masalah nonlinier dan menghasilkan pendekatan yang mendekati solusi sebenarnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Mendapatkan pemodelan penyebaran DBD dan menganalisis kestabilannya serta mensimulasikannya.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah:

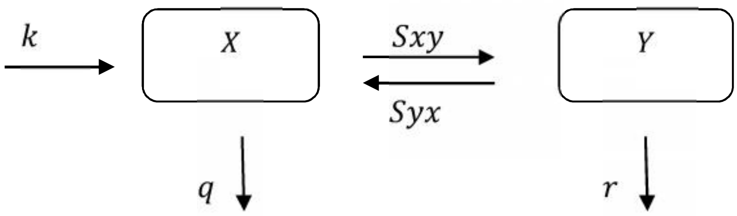
1. Didapatkan model matematika penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) dan analisis kestabilannya.
2. Pengetahuan tentang pemodelan penyebaran DBD .

3. Memberikan motivasi kepada mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila akan pentingnya ilmu dan terapan matematika pada dunia kesehatan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Kompartemen

Kompartemen adalah suatu aliran yang mendeskripsikan penyebaran penyakit dari individu-individu. Sistem kompartemen merupakan sebuah susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya, dalam kasus ini seperti saat individu tersebut sehat, tertular penyakit dan sembuh dari penyakit. Berikut adalah contoh sederhana bentuk sistem kompartemen:



(Dinita, 2010).

2.2 Persamaan Differensial

Persamaan differensial adalah persamaan yang melibatkan variable-variabel tak bebas dan fungsi turunan-turunannya terhadap variabel-variabel bebas.

Berikut ini adalah contoh persamaan differensial:

$$\frac{dy}{dx} = e^x + \sin x \qquad (2.2)$$

$$y^n - 2y' + y = \cos(x) \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.4)$$

Persamaan differensial dibagi dalam dua kelas yaitu Persamaan Differensial Biasa dan Persamaan Differensial Parsial. Persamaan differensial biasa disingkat PDB, adalah suatu persamaan differensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Jika diambil $y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas, maka suatu persamaan differensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk

$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$ dengan $y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Jelas bahwa persamaan (2.2) dan (2.3) adalah persamaan differensial, sedangkan (2.4) suatu persamaan differensial parsial (Kartono, 2012).

2.3. Pemodelan Matematika

Model adalah representasi penyederhanaan dari sebuah realita yang kompleks (biasanya bertujuan untuk memahami realita tersebut) dan mempunyai ciri-ciri yang sama dengan tiruannya dalam menyelesaikan permasalahan. Model adalah karakteristik umum yang mewakili sekelompok bentuk yang ada, atau representasi suatu masalah dalam bentuk yang lebih sederhana dan mudah dikerjakan. Dalam matematika, teori model adalah ilmu yang..menyajikan konsep-konsep matematis melalui konsep himpunan, atau ilmu tentang model-model yang mendukung suatu sistem matematis. Teori model diawali dengan asumsi keberadaan obyek-obyek matematika (misalnya keberadaan semua bilangan) dan kemudian mencari dan menganalisis keberadaan operasi-operasi, relasi-relasi, atau aksioma-aksioma yang melekat pada masing-masing obyek atau pada obyek-obyek tersebut. Model matematika yang diperoleh dari suatu masalah matematika yang diberikan, selanjutnya diselesaikan dengan aturan-aturan yang ada. Penyelesaian yang diperoleh, perlu diuji untuk mengetahui apakah penyelesaian tersebut valid atau tidak. Hasil yang valid akan menjawab secara tepat model matematikanya dan disebut solusi matematika. Jika penyelesaian tidak valid atau tidak memenuhi model matematika maka solusi masalah belum ditemukan, dan perlu dilakukan pemecahan ulang atas model matematikanya (Frederich H. Bell, 1978)

2.4. Model Epidemik SIR Klasik

Model epidemik SIR klasik menggambarkan penyebaran suatu penyakit. Menurut Hetchote (2000), pada model SIR klasik, populasi dibagi menjadi tiga kelompok yaitu:

1. *Susceptible* (S) yaitu kelompok individu yang sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit,
2. *Infected* (I) yaitu kelompok individu yang terinfeksi dan dapat sembuh dari penyakit,
3. *Recovered* (R) yaitu kelompok individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit.

Jumlah individu pada kelompok *susceptible*, *infected*, dan *recovered* pada waktu t masing-masing dinyatakan sebagai $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$. Total populasi diasumsikan konstan karena pengaruh kelahiran, kematian, dan migrasi tidak diperhatikan. Oleh karena itu, $S(t) + I(t) + R(t) = N$.

Masih menurut Hetchote, model epidemi SIR klasik dinyatakan sebagai:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \tag{2.12}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \tag{2.13}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{2.14}$$

(Hetchote, 2000).

2.5. Metode Numerik

Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik. Disebut demikian karena sering kali persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya (Triatmodjo, 2002).

2.6. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Misalkan diberikan sistem persamaan differensial sebagai berikut:

$$\dot{x} = F(x), x \in E \subset R^n \tag{2.15}$$

dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), f: E \to R^n, f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$.

Definisi 2.7.1 (Perko, 2001: 102) *Titik* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *disebut titik kesetimbangan dari sistem (2.15) jika* $f(\bar{x}) = 0$.

Berikut ini contoh mengenai definisi 2.7.1.

Contoh 2.7.2

Diberikan sistem persamaan differensial yaitu;

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 . x_2 + x_1 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix}$$

Titik kesetimbangan dari sistem persamaan di atas adalah titik $\bar{x} = (x_1, x_2)$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$, yaitu

$$x_1 . x_2 + x_1 = 0$$

Dari persamaan pertama diperoleh $x_1 = 0$ atau $x_2 = -1$.

Jika $x_1 = 0$ maka dari persamaan kedua diperoleh,

$$x_1^2 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 0^2 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Dengan demikian didapat titik kesetimbangan $E_1 = (0,0)$.

Sedangkan untuk kasus $x_2 = -1$ maka persamaan kedua memberikan;

$x_1^2 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + (-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ atau $x_1 = -1$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan $E_2 = (1, -1)$ dan $E_2 = (1, 1)$ (Wiggins, 2009).

2.7. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik keseimbangan merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian real dari akar-akar karakteristik sistem dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan.

Definisi 2. *Jika J adalah matriks yang berukuran n×n maka vektor tak nol x dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi:*

$$Jx = \lambda x \tag{2.16}$$

Untuk suatu skalar λ yang memenuhi disebut nilai karakteristik dari J dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai karakteristik matriks J yang berukuran nxn, maka dapat dituliskan kembali persamaan sebagai $Jx = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan $(J - \lambda I)x = 0$, mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $|J - \lambda I| = 0$. Jika matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ atau } \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $\lambda_{1,2} = \frac{(a-d)\pm\sqrt{(a-d)^2-4(ad-bc)}}{2}$

Teorema 2. *Titik setimbang $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristiknya matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik* *mempunyai tanda positif pada bagian realnya* (Derouich dan Boutayeb, 2008).

2.8. Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Dalam skripsi ini, diberikan contoh kriteria Routh-Hurwitz dengan derajat $n = 3$. Untuk $n = 3$, bentuk persamaan karakteristiknya adalah sebaga berikut:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \tag{2.17}$$

Dari persamaan (2.1) maka dapat dibentuk matriks Hurwitz sebagai berikut:

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan karakteristik (2.1) akan negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika det $(H_1) > 0$, det $(H_2) > 0$ dan det$(H_3) > 0$. Tiga syarat ini dapat dinyatakan dengan a_1, a_2 dan a_3 sebagai berikut:

a. det $(H_1) = |a_1| > 0$ didapatkan $a_1 > 0$,
b. det $(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ sehingga $a_1 a_2 > 0$. Karena $a_1 > 0$ maka didapatkan $a_2 > 0$.

c. $\det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0$ sehingga $a_1a_2a_3 - a_3^2 > 0$.

Akibatnya $a_3(a_1a_2 - a_3) > 0$ dengan demikian didapatkan dua kondisi, yaitu:

(1) $a_3 > 0$ dan $a_1a_2 - a_3 > 0$

(2) $a_3 < 0$ dan $a_1a_2 - a_3 < 0$.

Untuk kondisi (2) tidak mungkin terjadi, karena jika $a_3 < 0$ maka tidak akan terpenuhi $a_1a_2 - a_3 < 0$.

Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa akar-akar persamaan karakteristik (2.1) akan negatif atau mempunyai bagian real negatif jika $a_1, a_2, a_3 > 0$ dan $a_1a_2 - a_3 > 0$. (Derouich dan Boutayeb, 2008).

2.9. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang di notasikan dengan R_0 merupakan parameter yang dapat digunakan untuk melihat seberapa besar potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar besarnya dilihat dari titik kesetimbangan model. Dalam istilah lain R_0 disebut juga sebagai rata-rata pertumbuhan awal. Bilangan reproduksi dasar mempunyai nilai batas 1 (satu) sehingga jika nilai R_0 kurang dari satu ($R_0 < 1$), maka satu individu yang terinfeksi akan menginfeksi kurang dari satu individu rentan sehingga penyakit kemungkinan akan hilang dari populasi. Sebaliknya, jika R_0 lebih dari satu ($R_0 > 1$), maka individu yang terinfeksi penyakit akan menginfeksi lebih dari satu individu yang rentan sehingga individu yang terinfeksi di dalam populasi menyebar.

Penentuan bilangan reproduksi dasar menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Matriks ini merupakan matriks yang dikontruksi dari sub-sub populasi yang menyebabkan infeksi. Selanjutnya disusun matriks φ dan ψ dengan φ merupakan matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit dan ψ merupakan matriks laju perkembangan, kematian, dan atau kesembuhan . Kemudian perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linearisasi φ dan ψ di titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya didefinisikan *F* dan *V* adalah hasil masing-masing linearisasi dari φ dan ψ.

Sehingga diperoleh *Next Generation Matrix* yaitu $K = FV^{-1}$. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari *Next Generation Matrix* (Derouich dan Boutayeb, 2008).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dirancang dengan prosedur sebagai berikut :

a. Membuat asumsi-asumsi yang akan dilakukan.

b. Mengkontruksikan model penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD).

c. Menentukan titik kesetimbangan dari model penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD).

d. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD).

e. Melakukan simulasi numerik.

f. Menginterpretasikan hasil dari solusi dinamik tersebut.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Model matematika SIR pada penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue yaitu:

$$\frac{d}{dt}s_h = \mu_h - b.\beta_h.i_v.s_h - \mu_h.s_h$$

$$\frac{d}{dt}i_h = b.\beta_h.i_v.s_h - \mu_h.i_h - \gamma_h.i_h$$

$$\frac{d}{dt}i_v = \beta_v.b.i_h.(1 - i_v) - \mu_v.i_v$$

2. Diperoleh dua titik kestabilan dari model matematika SIR pada penyebaran penyakit Demam Berdarah Dengue yaitu:

   a. Titik kestabilan bebas penyakit yaitu $E_1 = (1,0,0)$ yang stabil pada saat $R_0 < 1$. Sehingga pada saat $R_0 < 1$, semakin lama penyakit demam berdarah akan menghilang dari populasi.

   b. Titik kestabilan endemik penyakit yaitu $E_2 = (s_h^*, i_h^*, i_v^*)$

   dimana $s_h^* = \frac{b.\beta_h.\mu_h + \mu_h.\mu_v + \mu_v.\gamma_h}{b.\beta_h.(b.\beta_h + \mu_h)}$, $i_h^* = \frac{\mu_h(b^2.\beta_h^2 - \mu_h.\mu_v - \mu_v.\gamma_h)}{b.\beta_h(b.\beta_h + \mu_h)(\mu_h + \gamma_h)}$,

$i_v^* = \frac{\mu_h(b^2.\beta_h^2 - \mu_h.\mu_v - \mu_v.\gamma_h)}{(b.\beta_h.\mu_h + \mu_h.\mu_v + \mu_v.\gamma_h)b.\beta_h}$ yang stabil pada saat $R_0 > 1$. Pada saat kesetimbangan ini penyakit akan ada sampai waktu yang tak terbatas.

5.2 Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya mencari hubungan perubahan iklim dengan kondisi endemik penyakit demam berdarah.

DAFTAR PUSTAKA

Bell, Frederick H. 1978. *Teaching and Learning Mathematics in Secondary School.* Cetakan Kedua. Brown Company Publishers. Lowa.

Derouich, M. and Boutayeb, A. 2008. An Avian Mathematical Model. *Applied Mathematical Science*. **36**(2): 1749-1760.

Diekmann, O. dan Heesterbeek, J. A. P. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation.* New York: Wiley.

Dinita Rahmalia, 2010. Pemodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Jurnal UJMC*. 1: 11-19.

Finizio, N., dan Landas, G. 1988. *Ordinary Differential Equations with Modern Applications.* Wadsworth Publishing Company. California.

Hetchote, H. W. 2000. The Mathematics of Infectious Disease. *SIAM Review*. **42**(2):599-653.

Kartono. 2012. *Analisis Stabilitas dan Optimal Kontrol pada Nyamuk Aedes aegypti dengan Teknik Sterilisasi Serangga dan Insektisida.* Tugas Akhir. S1 Jurusan Matematika ITS. Surabaya.

Kemenkes RI. 2013. *Riset Kesehatan Dasar*. Badan Penelitian dan pengembangan Kesehatan Kementrian Kesehatan RI. Jakarta.

Perko, 2001. *Differential Equations anda Dynamical Systems.* Springer-Verlag. New York.

Sukohar A, 2014. Demam berdarah dengue. Medula. Fakultas Kedokteran Universitas Lampung. Bandar Lampung. **2**(2):1-14.

.

Triatmodjo. 2002. *Metode Numerik.* Beta Offset.Yogyakarta.

Wiggins, S., 2009. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Second Edition. Springer-Verlag. New York.

Yatim, F. 2007. *Macam-Macam Menyakit Menular & Cara Pencegahannya*. Pustaka Obor Populer. Jakarta.