METODE *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (SEBLUP) PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN *MATRIX CONTIGUITY* TIPE *ROOK*

(Skripsi)

Oleh
LIA LIONITA HARYANTO

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

METODE *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (SEBLUP) PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN *MATRIX CONTIGUITY* TIPE *ROOK*

Oleh

LIA LIONITA HARYANTO

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION (SEBLUP) METHOD IN SMALL AREA ESTIMATION WITH MATRIX CONTIGUITY TYPE ROOK

By

LIA LIONITA HARYANTO

The Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction (SEBLUP) method is one method of estimating small areas for continuous data with respect to the random effects of spatial correlated areas. The method of estimating the parameters used is the Maximum Likelihood (ML) and the Restricted Maximum Likelihood (REML) method, which is numerically determined by the Fisher Scoring Algorithm. This study examines the application of the SEBLUP method with the matrix contiguity type rook approach on the proportion of the number of families in Bandar Lampung in 2015 and evaluates the Mean Square Error (MSE) of the SEBLUP method on the estimation of small areas. The results of this study indicate that the estimation value for the autoregresive coefficient SEBLUP for ML method is positive and very strong, however, for the REML method is also positive but weak. The MSE REML value is smaller than the direct estimator method and the ML method. This indicates that the estimation by REML SEBLUP method is better than direct estimator and ML method for the pre-prosperous family of Bandar Lampung in 2015.

Keyword: Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction (SEBLUP), Maximum Likelihood (ML), Restricted Maximum Likelihood (REML), Fisher Scoring Algorithm, Matrix Contiguity Type Rook.

ABSTRAK

METODE *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (SEBLUP) PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN *MATRIX CONTIGUITY* TIPE *ROOK*

Oleh

LIA LIONITA HARYANTO

Metode *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP) merupakan salah satu metode pada pendugaan area kecil untuk data kontinu dengan memperhatikan pengaruh acak area yang berkorelasi spasial. Metode pendugaan parameter SEBLUP menggunakan metode *Maximum Likelihood* (ML) dan *Restricted Maximum Likelihood* (REML) yang penyelesaiannya ditentukan secara numerik dengan Algoritma Fisher *Scoring*. Penelitian ini mengkaji penerapan metode SEBLUP dengan pendekatan *matrix contiguity type rook* pada data proporsi jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015 dan mengevaluasi *Mean Square Error* (MSE) metode SEBLUP pada pendugaan area kecil. Hasil penelitian ini menunjukan bahwa nilai pendugaan untuk koefisien autoregresif SEBLUP untuk metode ML bernilai positif dan sangat kuat sedangkan untuk metode REML juga bernilai positif tetapi lemah. Nilai MSE REML lebih kecil dibandingkan dengan metode penduga langsung dan metode ML. Hal ini mengindikasikan bahwa pendugaan dengan metode SEBLUP REML lebih baik dibandingkan dengan penduga langsung dan metode ML untuk keluarga Prasejahtera kota Bandar Lampung Tahun 2015.

Kata Kunci: *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP), *Maximum Likelihood* (ML), *Restricted Maximum Likelihood* (REML), Algoritma Fisher *Scoring, Matrix Contiguity Type Rook.*

.

Judul Skripsi : **METODE *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (SEBLUP) PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN *MATRIX CONTIGUITY* TIPE *ROOK***

Nama Mahasiswa : *Lia Lionita Haryanto*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031046

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.	**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP. 19800502 200501 2 003	NIP. 19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Nusyirwan, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **18 Januari 2018**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Metode *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP) pada Pendugaan Area Kecil dengan *Matrix Contiguity* Tipe *Rook*" adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 Januari 2018
Yang menyatakan

METERAI TEMPEL
45B8BAEF851701317
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Lia Lionita Haryanto
NPM. 1317031046

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Merbau Mataram pada tanggal 26 Oktober 1995, berdomisili di Merbau Mataram, Lampung Selatan, sebagai anak kedua dari dua bersaudara, pasangan Bapak Haryanto dan Ibu Susani.

Pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) Dharma Pertiwi diselesaikan tahun 2001, Sekolah Dasar (SD) Negeri 1 Merbau Mataram diselesaikan pada tahun 2007, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 2 Merbau Mataram diselesaikan pada tahun 2010, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri 6 Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2013.

Tahun 2013, melalui jalur SBMPTN penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Selama menjadi mahasiswa, Alhamdulillah penulis diberikan kesempatan sebagai penerima beasiswa PPA pada semester 3 dan semester 4. Penulis juga berperan dalam organisasi di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota bidang keilmuan periode 2014/2015 dan periode 2015/2016. Penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di BPS Provinsi Lampung di Jl. Basuki Rahmat No.54, Sumur Putri, Teluk Betung Utara pada tahun 2016, dan penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sumber Rejo, Kecamatan Kota Gajah, Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung pada tahun 2016.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah, Segala Puji Bagi Allah SWT.
Penulis persembahkan skripsi ini untuk :

Kedua Orang Tua Tercinta,
Ayahanda Haryanto (alm.) dan Ibunda Susani

Orang terhebat dalam hidup penulis

Kakakku Tersayang, Tika Violita Haryanto

Penyemangat hidup penulis

KALIMAT INSPIRASI

"Barang siapa yang menghendaki kehidupan dunia maka wajib baginya memiliki ilmu, dan barang siapa yang menghendaki kehidupan akhirat, maka wajib baginya memiliki ilmu, dan barang siapa menghendaki keduanya (kehidupan dunia dan akhirat) maka wajib baginya memiliki ilmu"

~ HR. Turmudzi ~

"Jika kau tidak dapat menahan lelahnya belajar,

maka kau harus sanggup menahan perihnya kebodohan"

~ Imam Syafi'I ~

"Satu-satunya yang boleh memanggilku bodoh adalah diriku sendiri"

~ Zoro (One Piece) ~

"Ada suatu hal yang mungkin mudah bagimu tapi sulit untukku, namun hal yang mudah untukku bisa jadi terlalu sulit untukmu, setiap orang memiliki kemampuan dan batasan masing-masing, *believe yourself*"

~ Lia Lionita H. ~

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

4.1 Tetangga Setiap Kecamatan. 24
4.2 Nilai Proporsi dan Varian dengan Metode Pendugaan Langsung. 27
4.3 Nilai Dugaan Koefisien Regresi, Ragam Galat Peubah Acak Area ($\hat{\sigma}_u^2$), Koefisien Autoregresif Spasial ($\hat{\rho}$) dengan Metode SEBLUP ML dan REML.. 31
4.4 Nilai MSE dengan Metode Penduga Langsung, ML, dan REML 34

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Metode *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP) pada Pendugaan Area Kecil dengan *Matrix Contiguity* Tipe *Rook*" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains di Universitas Lampung.

Dalam penulisan skripsi ini banyak pihak yang telah membantu, baik secara langsung maupun tidak langsung sehingga skripsi ini dapat diselesaikan. Untuk itu penulis menyampaikan rasa terimakasih kepada:

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku dosen pembimbing kedua sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang juga telah membimbing dan mengarahkan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si., selaku dosen pembahas yang telah banyak memberikan saran, kritik, dan ide bagi skripsi ini.
4. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh staff dosen Jurusan Matematika atas ilmu yang telah diberikan dan seluruh staff karyawan yang tidak dapat disebutkan satu per satu.
7. Ibu, alm. Bapak, dan Kakak yang selalu mendoakan, memotivasi dan memberi dukungan baik moril maupun materil, serta keluarga besar atas kasih sayangnya.
8. Reonaldi Febrian Hafitri yang banyak meluangkan waktu, memberi semangat, membuat canda tawa, dan selalu mendengarkan keluh kesah penulis.
9. Kakak tingkat terfavorit Bang Gerry dan Bang Yefta (Math 2012) atas bantuannya menyelesaikan sintaks dari skripsi ini.
10. Sahabatku Tiyas, Aulianda, Dita, Galuh, Nafisah, Nina, Rifa, Hanifah. Teman-teman bidang keilmuan, teman-teman angkatan 2013, dan seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari kesempurnaan, untuk itu penulis menerima kritik dan saran demi perbaikan kedepannya. Penulis berharap skripsi yang sederhana ini dapat berguna dan bermanfaat bagi kita semua

Bandar Lampung, 18 Januari 2018
Penulis,

Lia Lionita Haryanto

DAFTAR ISI

	Halaman
DAFTAR TABEL	
DAFTAR GAMBAR	
I. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang dan Masalah	1
1.2 Tujuan Penelitian	3
1.3 Manfaat Penelitian	3
II. TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Pendugaan Area Kecil	4
2.1.1 Pendugaan Langsung (*Direct Estimation*)	6
2.1.2 Pendugaan Tidak Langsung (*Indirect Estimation*)	6
2.1.2.1 Pendugaan Area Kecil Berbasis Area	7
2.1.2.2 Pendugaan Area Kecil Berbasis Unit	8
2.2 Generalisasi Kuadrat Terkecil (*Generalized Least Squares*)	8
2.3 *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Restricted Maximum Likelihood* (REML)	10
2.4 *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)	11
2.5 *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP)	13
2.6 Matriks Keterkaitan Spasial (*Spatial Weight Matrices*)	18
III. METODE PENELITIAN	20
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	20
3.1 Data	20
3.2 Metode Penelitian	21

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN 23
4.1 Matriks Keterkaitan Spasial (*Spatial Weight Matrices*) 23
4.2 Pendugaan Proporsi Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung 26
4.3 Pendugaan MSE (*Mean Square Error*)... 33

V. KESIMPULAN 36

DAFTAR PUSTAKA 37

LAMPIRAN.. 39

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

4.1 Plot MSE Penduga Langsung, ML, dan REML. 35

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Small Area Estimation (SAE) merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter subpopulasi yang ukuran sampelnya kecil. Area kecil didefinisikan sebagai subpopulasi yang ukuran contohnya kecil sehingga pendugaan langsung tidak dapat menghasilkan dugaan yang teliti (Rao, 2003). Biasanya statistik diperoleh dari suatu survei yang dirancang untuk memperoleh statistik nasional. Persoalan muncul ketika ingin diperoleh informasi untuk area yang lebih kecil (propinsi, kabupaten, kecamatan atau desa/kelurahan) yaitu objek survei jumlahnya kecil bahkan bisa saja area tersebut tidak tersampling sehingga analisis yang didasarkan hanya pada objek-objek tersebut menjadi sangat tidak dapat diandalkan (presisi rendah). *Small Area Estimation* (SAE) merupakan suatu metode yang dapat menangani permasalahan tersebut.

Secara umum ada tiga pendekatan untuk mendapatkan penduga parameter dalam SAE yaitu penduga langsung (*direct estimation*), penduga tak langsung (*indirect estimation*), dan pendugaan komposit (*composite estimation*). Pendugaan pada area kecil (*small area estimation*) merupakan salah satu upaya untuk menekan ragam yang besar pada area kecil yaitu dengan menggunakan pendugaan tidak langsung dengan memanfaatkan informasi dari area sekitarnya. Sehingga, pendugaan parameter dalam area kecil dapat didekati dengan dua jenis metode, yaitu metode berbasis model dan metode berbasis rancangan. Beberapa metode yang tergolong dalam metode berbasis model adalah metode *Empirical Bayes* (EB), *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP), dan *Hierarchical Bayes* (HB). Dalam SAE, peubah respon dapat dikategorikan dalam dua jenis yaitu peubah kontinu dan peubah diskrit. Jenis dari peubah respon ini akan mempengaruhi bagaimana melakukan pendugaan terhadap parameternya. Metode EB dan HB digunakan untuk data biner atau cacahan sedangkan metode EBLUP digunakan untuk data kontinu.

Model-model dalam pendugaan area kecil mengasumsikan bahwa pengaruh acak galat area saling bebas. Namun dalam beberapa kasus, asumsi ini sering dilanggar. Penyebabnya adalah keragaman suatu area dipengaruhi area sekitarnya, sehingga efek spasial dapat dimasukkan ke dalam pengaruh acak. Efek spasial merupakan hal yang lazim terjadi antara satu area dengan area yang lain, ini berarti bahwa area yang satu mempengaruhi area lainnya.

Penduga EBLUP dengan memperhatikan pengaruh acak area yang berkorelasi spasial dikenal dengan istilah penduga prediksi tak bias linier terbaik empirik spasial (*Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction*, SEBLUP). Penduga SEBLUP telah digunakan oleh Petrucci dan Salvati (2004, 2006), Salvati, et.al. (2004), Chandra, et. al. (2007), dan Pratesi dan Salvati (2008) dengan memasukkan matriks pembobot spasial tetangga terdekat (*nearest neighbors*) ke dalam model EBLUP. Ada berbagai bentuk matriks pembobot spasial yang telah digunakan oleh beberapa peneliti. Salah satu matriks pembobot dengan tipe interaksi atau berbatasan wilayah adalah *matrix contiguity type rook*. Dalam penelitian ini wilayah yang menjadi objek kajian adalah provinsi Lampung yang sebagian besar antar wilayahnya berbatasan sisi sehingga matriks pembobot yang digunakan adalah *Rook contiguity*. Matriks pembobot ini yang akan digunakan untuk melakukan pendugaan dengan metode SEBLUP.

Metode pendugaan parameter SEBLUP yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *Maximum Likelihood* (ML) dan *Restricted Maximum Likelihood* (REML). Namun, estimasi parameter dengan metode tersebut menemui kendala sehingga sulit ditentukan penyelesaiannya. Oleh karena itu, penyelesaiannya ditentukan secara numerik dengan Algoritma Fisher *Scoring*.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Mengkaji penerapan metode SEBLUP dengan pendekatan *matrix contiguity type rook* pada data proporsi jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung Tahun 2015.
2. Membandingkan *Mean Square Error* (MSE) metode SEBLUP pada pendugaan area kecil dengan metode langsung, ML, dan REML.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah :

1. Memberikan informasi tentang metode SEBLUP pada pendugaan area kecil.
2. Memberikan gambaran baru dalam teknik pengambilan keputusan dan metode pendugaan parameter pada area kecil.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendugaan Area Kecil

Pendugaan area kecil merupakan suatu metode statistika untuk menduga parameter pada suatu subpopulasi dengan jumlah contohnya berukuran kecil atau bahkan tidak ada. Metode ini memanfaatkan data dari domain besar untuk menduga peubah yang menjadi perhatian pada domain yang lebih kecil. Suatu area dikatakan kecil jika ukuran contoh dalam domain tersebut tidak cukup memadai untuk mendukung ketelitian penduga langsung (Rao 2003). Area kecil biasanya digunakan untuk mendefinisikan area geografi yang kecil atau domain yang memiliki ukuran contoh sangat kecil. Penanganan masalah galat baku dalam pendugaan area kecil dilakukan dengan menambahkan informasi mengenai parameter yang sama pada area kecil lain yang memiliki karakteristik serupa, atau nilai pada waktu yang lalu, atau nilai dari peubah yang memiliki hubungan dengan peubah yang sedang diamati. Pendugaan area kecil merupakan metode estimasi tidak langsung yang mengkombinasikan antara data survei dengan data pendukung lain misalnya dari data sensus sebelumnya yang memuat variabel dengan karakteristik yang sama dengan data survei sehingga dapat digunakan untuk menduga area yang lebih kecil dan memberikan tingkat akurasi yang lebih baik.

Asumsi dasar dalam pengembangan model untuk SAE adalah bahwa keragaman di dalam area kecil peubah yang sedang diamati dapat diterangkan oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tambahan yang disebut sebagai pengaruh tetap. Asumsi lainnya adalah bahwa keragaman khusus area kecil tidak dapat dijelaskan oleh informasi tambahan dan merupakan pengaruh acak area kecil. Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model linier campuran (*mixed models*). Pendugaan area kecil untuk model pengaruh campuran pertama kali dikembangkan oleh Fay dan Herriot (1979), untuk menduga pendapatan per kapita suatu area kecil berdasarkan data survei Biro Sensus Amerika Serikat (U.S. *Bureau of the Cencus*). Model ini selanjutnya dikenal dengan model Fay-Herriot yang merupakan model dasar bagi pengembangan pemodelan area kecil, yaitu : $\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i$; $\theta_i = x_i^T\beta + v_i$, dimana $\hat{\theta}_i$ adalah penduga langsung bagi area ke-i, θ_i merupakan parameter yang menjadi perhatian bagi area ke-i, β adalah koefisien regresi, $x_i = (x_{i1}, x_{i2,} \dots, x_{ip})$adalah peubah penyerta, e_i adalah galat contoh pada area ke-i. v_i adalah pengaruh acak area dengan e_i dan v_i saling bebas dengan E(e_i)= E(v_i) = 0 dan Var (e_i) = $\sigma_{e_i}^2$ serta Var(v_i) =$\sigma_v^2 (i = 1, 2, \dots, m)$.

Tipe model pendugaan area kecil terbagi menjadi dua, yaitu model tingkat area (*basic area level models*) dan model tingkat unit (*unit level area models*) (Ghosh dan Rao 1994). Model tingkat area digunakan jika data penyerta yang bersesuaian dengan data peubah yang diamati tidak tersedia hingga tingkat unit pengamatan, sedangkan model tingkat unit digunakan jika data penyerta yang bersesuaian dengan data peubah yang diamati tersedia hingga tingkat unit contoh.

Menurut Rao (2003), suatu area dikatakan besar apabila ukuran contoh pada area tersebut mampu menghasilkan presisi pendugaan yang baik dengan penduga langsung. Sebaliknya, suatu area dikatakan “kecil” apabila ukuran contoh pada area tersebut tidak cukup untuk menunjang penduga langsung agar mampu menghasilkan presisi pendugaan yang baik. Model area kecil dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu:

2.1.1 Pendugaan Langsung (*Direct Estimation*)

Pelaksanaan survei ditujukan untuk menduga parameter populasi. Pendekatan klasik untuk menduga parameter populasi didasarkan pada aplikasi model disain penarikan contoh (*design based*) dan penduga yang dihasilkan dari pendekatan itu disebut penduga langsung (*direct estimation*). Data hasil survei ini dapat digunakan untuk mendapatkan penduga yang terpercaya dari total maupun rata-rata populasi suatu area atau domain dengan jumlah contoh yang besar. Namun, jika penduga langsung tersebut digunakan untuk suatu area yang kecil maka akan menimbulkan galat baku yang besar (Ghosh dan Rao, 1994). Pendugaan langsung tidak dapat dilakukan pada area yang tidak terpilih sebagai contoh, karena tidak adanya data yang dapat digunakan untuk melakukan pendugaan.

2.1.2 Pendugaan Tidak Langsung (*Indirect Estimation*)

Pendugaan parameter dan inferensinya yang menggunakan informasi tambahan tersebut dinamakan pendugaan tidak langsung (*indirect estimation*). Metode ini secara statistik memiliki sifat meminjam kekuatan (*borrowing strength*) dari informasi mengenai hubungan antara peubah yang diamati dengan informasi yang ditambahkan, sehingga mengefektifkan jumlah contoh yang kecil.

Pada pendugaan area kecil terdapat dua jenis model dasar yang digunakan, yaitu model level area dan model level unit (Rao 2003).

2.1.2.1 Pendugaan Area Kecil Berbasis Area

Pada model pendugaan area kecil berbasis area, data pendukung yang tersedia hanya sampai level area. Model level area menghubungkan penduga langsung pendugaan area kecil dengan data pendukung dari domain lain untuk setiap area. Model level area merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk level area tertentu, misalkan:

$$\boldsymbol{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots,)^T \qquad (2.1)$$

dengan parameter yang akan diduga adalah θ_i yang diasumsikan mempunyai hubungan dengan $\boldsymbol{x_i}$. Data pendukung tersebut digunakan untuk membangun model :

$$\theta_i = \boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta} + z_i v_i, \qquad (2.2)$$

dengan i= 1,2,3,....,m dan $v_i \sim N(0,\sigma_v^2)$, sebagai pengaruh acak yang menyebar normal. Kesimpulan mengenai θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung y_i telah tersedia, yaitu

$$y_i = \theta_i + e_i, \qquad (2.3)$$

dengan i= 1,2,3,...,m. dan sampling error $e_i \sim N(0,\sigma_i^2)$ dengan σ_i^2 diketahui. Selanjutnya kedua model tersebut digabung sehingga diperoleh model gabungan :

$$y_i = \boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta} + z_i v_i + e_i \qquad (2.4)$$

dengan i=1,2,3,....,m. Model tersebut merupakan bentuk khusus dari model linier campuran.

2.1.2.2 Pendugaan Area Kecil Berbasis Unit

Pada model pendugaan area kecil berbasis unit diasumsikan bahwa data variabel penyerta unit $x_{ij}^T = (x_{ij1}, x_{ij2}, \ldots, x_{ijp})^T$ tersedia untuk setiap elemen ke-*j* pada area ke-*i* namun kadang cukup dengan rata-rata populasi $\bar{x}ij$ diketahui saja. Model level unit merupakan suatu model dengan data pendukung yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon, misalnya :

$$\boldsymbol{x_{ij}} = (x_{ij1}, x_{ij2}, \ldots)^T \tag{2.5}$$

sehingga diperoleh suatu model regresi tersarang sebagai berikut :

$$y_{ij} = \boldsymbol{x_{ij}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\beta} + v_i + e_{ij} \tag{2.6}$$

dengan i= 1,2,3,...,m. dan j=1,2,3,....n_i, $v_i \sim N(0,\sigma_v{}^2)$ dan $e_{ij} \sim N(0,\sigma_i{}^2)$.

2.2 Generalisasi Kuadrat Terkecil (*Generalized Least Squares*)

Perhatikan model linier

$$Y = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon \tag{2.7}$$

diasumsikan matriks kovariansnya $\sum \sigma^2 \Delta(\sigma^2 < \infty)$ dengan σ^2 adalah parameter yang tidak diketahui nilainya dan Δ adalah matriks definit positif nxn dengan trase matriks sama dengan n. Jika suatu matriks Q adalah simetrik definit positif maka Q nonsingular atau Q^{-1} ada, dan karena itu ada matriks nxn nonsingular (misal P) sedemikian rupa sehingga

$$P'P = \mathrm{Q}^{-1} \tag{2.8}$$

Matriks Δ adalah simetrik dan definit positif sehingga non-singular, karena itu ada suatu matriks nxn non-singular P sehingga $P'P = \Delta^{-1}$. Pada model linear kalikan kedua ruas dengan matriks P ini:

$$\text{PY} = P\boldsymbol{X}\beta + P\varepsilon \quad (2.9)$$

Penerapan metode kuadrat terkecil pada model di atas akan menghasilkan persamaan normal sebagai berikut:

$$P'PPY = \boldsymbol{X}'P'PXB \quad (2.10)$$

dengan B adalah penduga kuadrat terkecil untuk β berdasarkan model di atas. Karena $\boldsymbol{X}'P'P\boldsymbol{X}$ adalah matriks definit positif jika **X** mempunyai peringkat kolom penuh (*full column rank*) sehingga $\boldsymbol{X}'P'P\boldsymbol{X}$ adalah nonsingular dan $P'P = \Delta^{-1}$ maka solusi persamaannya adalah

$$B = \boldsymbol{X}'P'P\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X}'P'PY \quad (2.11)$$

atau

$$B = (\boldsymbol{X}'^{\Delta^{-1}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\Delta^{-1}Y \quad (2.12)$$

Persamaan terakhir ini dinamakan penduga kuadrat terkecil umum (*Generalized Least Squares*) untuk β selanjutnya disingkat dengan GLS (Usman dan Warsono, 2009).

2.3 *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Restricted Maximum Likelihood* (REML)

MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) merupakan metode pendugaan parameter yang menggunakan pendekatan distribusi dari data serta asumsi distribusi yang diberlakukan oleh data tersebut selanjutnya diperoleh fungsi *likelihood* dari data tersebut. Penduga yang diperoleh dengan metode MLE mempunyai sifat yang konsisten dan sifat-sifat lain yang sangat diperlukan sebagai suatu penduga.

Dalam menggunakan metode MLE, pertama dimisalkan bahwa peubah acak dari suatu populasi adalah $\mathbf{X}$, dimana $\mathbf{X}$ mempunyai fungsi peluang yang mewakili beberapa parameter θ:$\boldsymbol{Pr}\ \boldsymbol{x}=x\ =\ f(x;\theta)$. Lalu misalkan bahwa fungsi f diketahui tetapi nilai θ tidak diketahui.

Fungsi peluang bersama dari peubah acak ($x_{1,2,\ldots\ldots}\ x_n$) dapat ditulis menjadi :

$$(\theta) = f\ (x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n\,;\theta)= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{f}\ (x_i\ ;\ \theta)$$

Fungsi di atas tersebut lebih dikenal dengan sebutan *likelihood function* dari suatu sampel. Sifat dari MLE ini diperlukan untuk memilih penduga dari parameter yang tidak diketahui.

Jika suatu kelompok distribusi ingin menentukkan dua atau lebih dari parameter yang tidak diketahui, yaitu $\theta_{1,2,\ldots\ldots}\ \theta_n$ maka fungsi *likelihood* dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$L(\theta_1,\theta_2,\ldots\ldots\theta_n) = f(x_1,\ldots\ldots,x_n;\theta_1,\ldots\ldots\theta_k)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{f}\ (x_i\ ;\ \theta_1,\ldots\ldots\theta_k)$$

(Brunk, 1975)

Prosedur ML menghasilkan penduga yang bias dari parameter acak. Hal ini menjadi penting dalam sampel yang kecil dan dapat menghasilkan penduga yang tak bias apabila menggunakan REML. Estimasi $\boldsymbol{\theta}$ dalam REML didasarkan pada optimalisasi dan mengikuti fungsi REML *log-likelihood* .

2.4 Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP)

Model pengaruh campuran Fay-Herriot selanjutnya dijabarkan oleh Russo et. al (2005) untuk tingkat area sebagai berikut:

1. $\boldsymbol{x_i} = \left(\boldsymbol{x_{i1}}, \boldsymbol{x_{i2}}, \dots, \boldsymbol{x_{ip}}\right)$ merupakan vektor data pendukung (peubah penyerta).
2. $\theta_i = \boldsymbol{x_i^T}\beta + v_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$. θ_i merupakan parameter yang menjadi perhatian dan diasumsikan memiliki hubungan dengan peubah penyerta pada (1).
3. $E(v_i) = 0$ dan Var $(v_i) = \sigma_i^2$
4. $\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i$ penduga langsung untuk domain ke-i yang merupakan fungsi linier dari parameter yang menjadi perhatian dan galat contoh e_i
5. $\hat{\theta}_i = \boldsymbol{x_i^T}\beta + z_i v_i + e_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$ merupakan gabungan dari (2) dan (4) yang terdiri dari pengaruh acak dan pengaruh tetap sehingga menjadi bentuk khusus dari model linier campuran dengan struktur peragam yang diagonal.

Model nomor (5) tersebut merupakan model tingkat area, yaitu:

$$\hat{\theta}_i = \boldsymbol{x_i^T}\beta + \boldsymbol{z_i} v_i + e_i, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \qquad (2.13)$$

Dengan x_i adalah peubah penyerta tingkat area dan z_i adalah matriks insidensi. Matriks insidensi hanya memuat 2 kemungkinan elemen yaitu 0 dan 1. Matriks seperti ini juga disebut matriks biner atau matriks (0,1).

Model persamaan (2.13) merupakan kasus khusus dari model linier campuran terampat dengan struktur koragam diagonal. Teknik penyelesaian model tersebut untuk memperoleh BLUP bagi $\hat{\theta}_i = \boldsymbol{x}_i^T\beta + \boldsymbol{z}_i$ telah dikembangkan oleh Henderson (1975), dengan asumsi σ_i^2 diketahui. Penduga BLUP berdasarkan Persamaan (2.13) adalah:

$$\tilde{\theta}_i = \boldsymbol{x}_i^T\tilde{\beta} + \gamma_i(\hat{\theta}_i - \boldsymbol{x}_i^T\tilde{\beta})$$
$$= \gamma_i\hat{\theta}_i + (1-\gamma_i)\boldsymbol{x}_i^T\tilde{\beta} \qquad (2.14)$$

dengan $\gamma_i = \sigma_v^2 z_i^2/(\sigma_v^2 z_i^2 + \sigma_i^2)$ dan $\tilde{\beta}$ adalah koefisien regresi yang diduga dengan *generalized least square* (GLS), yaitu $\tilde{\beta} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{V}^{-1}\hat{\theta}$. Kuadrat tengah galat (*Mean square error*, MSE) dari $[\hat{\theta}_i(\sigma_v^2)]$ adalah:

$$\text{MSE}[\hat{\theta}_i(\sigma_v^2)] = g_{1i}(\sigma_v^2) + g_{2i}(\sigma_v^2) \qquad (2.15)$$

Metode BLUP yang dikembangkan Henderson (1975) mengasumsikan diketahuinya komponen ragam pengaruh acak dalam model linier campuran, padahal dalam kenyataannya, komponen ragam ini tidak diketahui. Oleh karena itu penduga ini harus terlebih dahulu diduga. Harville (1977) dalam papernya menulis tentang pendugaan komponen ragam dengan menggunakan metode *maximum likelihood* (ML) dan metode *restricted maximum likelihood* (REML). Pendugaan σ_v^2 baik dengan metode ML maupun metode REML dilakukan dengan metode algoritma scoring (*scoring algorithm*). Penduga EBLUP telah dibahas lebih lengkap oleh Ghosh and Rao (1994), Rao (1999), Datta dan Lahiri (2000), dan Rao (2003). Penduga EBLUP dengan mengganti nilai σ_v^2 dengan penduganya $\hat{\sigma}_v^2$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = \gamma_i\hat{\theta}_i + (1-\gamma_i)\boldsymbol{x}_i^T\tilde{\beta} \qquad (2.16)$$

Penduga EBLUP yang diperoleh dengan metode ML maupun REML adalah penduga tak bias jika galat v_i dan e_i berdistribusi normal dengan rata-rata 0.

2.5 Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction (SEBLUP)

Misalkan didefinisikan vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{\theta}}_m)^T$,$\boldsymbol{v} = (v_1 ,\ldots,v_m)^T$ dan $\boldsymbol{e} = (e_1 ,\ldots,e_m)^T$, dan matriks $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1^T,\ldots,\boldsymbol{x}_n^T\ )T$ dan $\mathbf{Z} = \mathbf{diag}\ (z_1,\ldots,z_m)$. Berdasarkan definisi vektor dan matriks tersebut, maka persamaan (2.13) dalam notasi matriks adalah :

$$\hat{\theta} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zv} + \boldsymbol{e} \qquad (2.17)$$

Model pada persamaan (2.17) mengasumsikan bahwa terdapat pengaruh acak area, namun pengaruh tersebut saling bebas antar area. Pada kenyataannya, sangat beralasan untuk mengatakan bahwa ada korelasi antar area yang berdekatan. Korelasi tersebut akan semakin berkurang seiring dengan jarak yang bertambah. Hal ini sesuai dengan hukum pertama tentang geografi yang dikemukakan oleh Tobler (*Tobler's first low of geography*) dalam Schabenberger dan Gotway (2005) yang merupakan pilar kajian analisis data spasial, yaitu "*everything is related to everything else, but near things are more related then distant things*". Segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang lebih dekat akan lebih berpengaruh daripada sesuatu yang jauh. Model SAE dengan memasukkan korelasi spasial antar area pertama kali diperkenalkan oleh Cressie (Cressie 1991), dengan mengasumsikan ketergantungan spasial mengikuti proses *Conditional Autoregressive* (Autoregresif bersyarat, CAR). Model SAE ini kemudian dikembangkan lagi oleh beberapa peneliti, diantaranya Salvati et.al. (2004), dengan mengasumsikan bahwa ketergantungan spatial yang dimasukkan kedalam komponen galat dari faktor acak mengikuti proses *Simultaneous Autoregressive* (Autoregresif Simultan, SAR). Model SAR sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Anselin (1993) dimana vektor pengaruh acak $v = (v_i)$ memenuhi:

$$\boldsymbol{v} = \rho \mathbf{W} \boldsymbol{v} + \mathbf{u} \tag{2.18}$$

Koefisien ρ dalam persamaan (2.18) adalah koefisien autoregresif spasial yang menunjukkan kekuatan dari hubungan spasial antar pengaruh acak. Nilai ρ berkisar antara -1 sampai 1. Nilai $\rho > 0$ menunjukkan bahwa suatu area dengan nilai parameter yang tinggi cenderung dikelilingi oleh area lain dengan nilai parameter yang tinggi pula dan sebuah area dengan nilai parameter yang rendah pula. Disisi lain, $\rho < 0$ menunjukkan bahwa suatu area dengan nilai parameter yang tinggi dikelilingi oleh area lain dengan nilai parameter yang rendah, atau sebaliknya (Savitz dan Raudenbush 2009). **W** adalah matriks pembobot spasial, $\boldsymbol{v}$ adalah pengaruh acak area, dan **u** adalah vektor galat dari pengaruh acak area dengan rata- rata sama dengan nol dan ragam $\sigma_u^2 I_m$ Persamaan (2.18) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\boldsymbol{v} = (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})^{-1} \mathbf{u} \tag{2.19}$$

dengan **I** adalah matriks identitas berukuran m × m. Dari persamaan (2.19) terlihat bahwa rata-rata $\boldsymbol{v}$ adalah 0 dan matriks koragam $\boldsymbol{v}$ (G) adalah sebagai berikut :

$$G = \sigma_u^2 \, [(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}^{\mathbf{T}})]^{-1} \tag{2.20}$$

Persamaan (2.19) disubtitusikan ke persamaan (2.17) menghasilkan :

$$\hat{\theta} = \boldsymbol{X\beta} + \mathbf{Z} \, (\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W})^{-1} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{e} \tag{2.21}$$

matriks koragam dari $\hat{\theta}$ dengan R = diag (σ_i^2) adalah :

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{ZGZ^T} = diag\ (\sigma_i^2) + \boldsymbol{Z}\sigma_u^2\ [(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}^T)]^{-1}\boldsymbol{Z}^T \qquad (2.22)$$

Penduga Spasial BLUP untuk parameter θ_i dengan σ_u^2 ,σ_i^2 dan ρ diketahui adalah:

$$\hat{\theta}_i^s(\sigma_u^2\ ,\rho) = \boldsymbol{x_i^T}\hat{\beta}\ + b_i^T\{\ \sigma_u^2\ (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}^T)^{-1}\}\boldsymbol{Z}^T$$

$$\times\{\boldsymbol{diag}\ (\sigma_i^2) + \boldsymbol{Z}\sigma_u^2\ [(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}^T)]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}^{-1}(\hat{\theta} - \boldsymbol{X}\hat{\beta}\ ) \qquad (2.23)$$

dengan $\hat{\beta} = (\boldsymbol{X^T V^{-1} X})^{-1}\boldsymbol{X^T V^{-1}}\hat{\theta}$ dan b_i^T adalah vektor berukuran 1 × m (0,0,…0, 1, 0,….0) dengan 1 menunjuk pada lokasi ke-i. Penduga Spasial BLUP tersebut diperoleh dengan memasukkan matriks koragam pada persamaan (2.22) ke dalam penduga BLUP. Spasial BLUP akan sama dengan BLUP jika $\rho = 0$.

Seperti halnya dengan penduga EBLUP, penduga SEBLUP $(\tilde{\theta}_i^s(\hat{\sigma}_u^2\ ,\hat{\rho}))$ diperoleh dari Spasial BLUP dengan mengganti nilai σ_u^2, dengan penduganya. Asumsi kenormalan dari pengaruh acak digunakan untuk menduga σ_u^2 dan ρ dengan menggunakan prosedur baik ML maupun REML dengan fungsi *log-likelihood* (Chandra, et.al. 2007). Penduga tersebut dapat diperoleh secara iteratif dengan menggunakan algoritma scoring. Hasil pendugaan tersebut kemudian digunakan untuk melakukan penduga terhadap SEBLUP, dengan rumus penduga SEBLUP adalah :

$$\hat{\theta}_i^s(\hat{\sigma}_u^2\ ,\rho) = \boldsymbol{x_i^T}\hat{\beta}\ + b_i^T\{\hat{\sigma}_u^2\ (\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W}^T)^{-1}\}\boldsymbol{Z}^T$$

$$\times\{\boldsymbol{diag}\ (\sigma_i^2) + \boldsymbol{Z}\hat{\sigma}_u^2[(\boldsymbol{I} - \hat{\rho}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I} - \hat{\rho}\boldsymbol{W}^T)]^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}^{-1}(\hat{\theta} - \boldsymbol{X}\hat{\beta}\ ) \qquad (2.24)$$

Dengan mengasumsikan normalitas, σ_u^2 dan ρ dapat diestimasi keduanya dengan prosedur ML (*Maximum Likelihood*) dan REML (*Restricted Maximum Likelihood*). Penelitian ini menggunakan distribusi *Normal Multivariate*.

Fungsi kepekatan peluang (fkp) dari distribusi *Normal Multivariate* yaitu :

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)/2};\ -\infty < x_i < \infty\ ; i = 1, \dots, p$$

dengan X= $\hat{\theta}$, $\mu = \mathbf{X}\beta$ dan Σ=**V**

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|\boldsymbol{V}|^{1/2}} e^{-(\hat{\theta}-\mathbf{X}\beta)^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta}-\mathbf{X}\beta)/2};\ -\infty < x_i < \infty\ ; i = 1, \dots, m$$

Fungsi *log-likelihood* dari distribusi *Normal Multivariate* yaitu :

$$\mathfrak{l}(\beta, \sigma_u^2, \rho) = -\frac{1}{2}m\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\boldsymbol{V}| - \frac{1}{2}\left(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta\right)^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta) \quad (2.25)$$

dengan **V** telah dijelaskan pada persamaan (2.22). Turunan parsial dari $\mathfrak{l}(\beta, \sigma_u^2, \rho)$

yaitu :

$$s_{\sigma_u^2}(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2}tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\} + \frac{1}{2}\left(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta\right)^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta)$$

$$s_{R_\rho}(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial_\rho} = -\frac{1}{2}tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\sigma_u^2[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^T - 2\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta\right)^T\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\sigma_u^2[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^T - 2\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}]\boldsymbol{Z}^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta) \quad (2.26)$$

Kemudian matriks yang berisikan turunan kedua dari fungsi *log-likelihood* adalah

$$\mathfrak{T}(\sigma_u^2, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\} & \frac{1}{2}tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^T\} \\ \frac{1}{2}tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^T\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\} & \frac{1}{2}tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^T\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^T\} \end{bmatrix} (2.27)$$

dengan $\mathbf{A} = \sigma_u^2[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^T - 2\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}]$. Penduga ML $\hat{\sigma}_{uML}^2$ dan $\hat{\rho}_{ML}$ diperoleh secara iterative dengan menggunakan algoritma "*scoring*" :

$$\begin{bmatrix}\sigma_u^2 \\ \rho\end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix}\sigma_u^2 \\ \rho\end{bmatrix}^{(n)} + \left[\mathfrak{T}(\sigma_u^{2(n)}, \rho^n)\right]^{-1} s\left[\hat{\beta}(\sigma_u^{2(n)}, \rho^n), \sigma_u^{2(n)}, \rho^n\right] \quad (2.28)$$

dengan n merupakan nilai dari iterasi.

Turunan parsial dari fungsi *log-likelihood* terkendala $\mathfrak{l}_R(\beta, \sigma_u^2, \rho)$ dengan memperhatikan komponen varian yaitu :

$$s_{R_{\sigma_u^2}}(\sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial \mathbf{l}_R}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{PZC}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^T \boldsymbol{PZC}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{P}\hat{\theta}$$

$$s_{R_{\sigma_u^2}}(\sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial \mathbf{l}_R}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{PZ}_{\sigma_u^2}[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\boldsymbol{T}} - 2\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}$$

$$+\frac{1}{2}\hat{\theta}^T \boldsymbol{PZ}_{\sigma_u^2}[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\boldsymbol{T}} - 2\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{P}\hat{\theta} \qquad (2.29)$$

dengan $\mathbf{P} = \boldsymbol{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}$ dan $\mathbf{C} = [(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^{\mathrm{T}})]$.

Kemudian matriks berisi turunan kedua yang langsung diterapkan dengan algoritma “*scoring*”

$$\mathfrak{T}_R(\sigma_u^2, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{PZC}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{PZC}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\} & \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{ZC}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{ZAZ}^T\} \\ \frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{PZAZ}^T\boldsymbol{PZC}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\} & \frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{PZAZ}^T\boldsymbol{PZAZ}^T\} \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

MSE dari penduga Spasial EBLUP ini melibatkan σ_u^2 dan $\hat{\rho}$. Dibawah normalitas dari efek acak

$$MSE[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2)] = MSE[\tilde{\theta}_i(\sigma_u^2)] + \mathrm{E}[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2) - \tilde{\theta}_i(\sigma_u^2)]^2 \qquad (2.31)$$

Persamaan akhir didapat sebagai pendekatan secara umum. Kemudian pendekatan untuk $MSE[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})]$ adalah:

$$MSE[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})] \approx g_{1i}(\sigma_u^2, \rho) + g_{2i}(\sigma_u^2, \rho) + g_{3i}(\sigma_u^2, \rho) \qquad (2.32)$$

dengan $g_{3i}(\sigma_u^2, \rho)$ adalah dengan pendekatan

$$tr\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i^T\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}_u^2\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T(-\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1})\right) \\ \boldsymbol{b}_i^T\left(\mathbf{A}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}_u^2\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T(-\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1})\right) \end{bmatrix}\mathbf{V}$$

$$\times \begin{bmatrix} b_i^T\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1} + \sigma_u^2\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T(-\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1})\right) \\ b_i^T\left(\mathbf{A}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1} + \sigma_u^2\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T(-\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1})\right) \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{V}}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\} \qquad (2.33)$$

Pada praktiknya penggunaan penduga $\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})$ telah terhubung dengan penduga dari $MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right]$. Sebuah penduga tak bias dengan pendekatan pada MSE telah terhitung dengan mengikuti pernyataan:

$$MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right] \approx g_{1i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) + g_{2i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) + 2g_{3i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) \qquad (2.34)$$

2.6 Matriks Keterkaitan Spasial (*Spatial Weight Matrices*)

Bentuk umum matriks spasial (**W**) adalah

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

Pembentukan matriks keterkaitan spasial yang sering disebut matriks **W** dapat menggunakan berbagai teknik pembobotan. Anselin (2002) mengusulkan 3 (tiga) pendekatan untuk mendefinisikan matriks **W**, yaitu *contiguity*, *distance*, dan *general*. Matriks **W** berdasarkan persentuhan batas wilayah (*contiguity*) menyatakan bahwa interaksi spasial terjadi antar wilayah yang bertetangga, yaitu interaksi yang memiliki persentuhan batas wilayah (*common boundary*). Suatu matriks **W** yang dibentuk adalah simetrik dan diagonal utama selalu bernilai nol seperti jika **W**(mxn) diberi nilai 1, maka **W**(mxn) bernilai 1 juga.

Matriks *Contiguity* (kedekatan) merupakan matriks pembobot spasial yang menunjukan hubungan spasial suatu lokasi dengan lokasi lainnya yang bertetangga. Pemberian nilai 1 diberikan jika lokasi-i bertetangga langsung dengan lokasi-j, sedangkan nilai 0 diberikan jika lokasi-i tidak bertetangga dengan lokasi-j. Ada beberapa jenis matriks *contiguity* antara lain sebagai berikut, yaitu *Rook Contiguity*, *Bishop Contiguity* dan *Queen Contiguity* (Dubin, 2009).

a) *Rook contiguity* ialah persentuhan sisi wilayah satu dengan sisi wilayah yang lain yang bertetanggaan.

b) *Bishop contiguity* ialah persentuhan titik wilayah satu dengan wilayah tetangga yang lain.

c) *Queen contiguity* ialah persentuhan baik sisi maupun titik wilayah satu dengan wilayah yang lain yaitu gabungan *rook contiguity* dan *bishop contiguity*.

Rook

	*	
*	I	*
	*	

(a)

Bishop

*		*
	I	
*		*

(b)

Queen

*	*	*
*	I	*
*	*	*

(c)

Gambar 1. Ilustrasi matriks *Contiguity* tipe *rook (a), bishop (b), queen (c)*

Matriks *rook contiguity* mendefinisikan suatu lokasi i bertetangga dengan lokasi j jika lokasi i bersinggungan sisi dengan lokasi j (Gambar 1(a)). Matriks *bishop contiguity* mendefinisikan suatu lokasi i bertetangga dengan lokasi j jika lokasi i bersinggungan sudut dengan lokasi j (Gambar 1(b)). Matriks *queen contiguity* mendefinisikan suatu lokasi i bertetangga dengan lokasi j jika lokasi i bersinggungan sisi atau bersinggungan sudut dengan lokasi j (Gambar 1(c)). Pada bentuk peta yang sebenarnya terkadang ditemukan kesulitan dalam mengidentifikasi kedekatan suatu lokasi apakah bersinggungan secara sudut saja atau bersinggungan secara sisi saja. Matriks *queen contiguity* merupakan matriks yang efektif jika diterapkan pada peta sebenarnya karena matriks tersebut hanya melihat apakah suatu lokasi bersinggungan atau tidak.

III. METODE PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2016/2017, bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, Lampung.

3.2. Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Data sekunder yang diambil dari BKKBN kota Bandar Lampung yaitu :

   Y : Jumlah keluarga prasejahtera

   X_1 :Jumlah keluarga membeli 1 (satu) stel pakaian baru untuk seluruh anggota keluarga

   X_2 :Jumlah keluarga makan minimal 2 kali sehari

   X_3 :Jumlah keluarga bila sakit akan berobat ke fasilitas kesehatan

   X_4 :Jumlah keluarga memakai pakaian berbeda di rumah, kantor, dan sekolah

   X_5 : Jumlah keluarga makan ikan/daging/telur minimal seminggu sekali

   X_6 : Jumlah keluarga menjalankan ibadah sesuai ketentuan agama yang dianut

2. Data yang digunakan untuk menentukan matriks pembobot W yaitu dengan peta kota Bandar Lampung.

3.3 Metode Penelitian

Langkah-langkah pendugaan parameter metode SEBLUP :

1. Menentukan matriks pembobot spasial yang telah terstandarisasi yaitu dengan *matriks contiguity* tipe *Rook.*
2. Melakukan pendugaan langsung dengan menghitung proporsi Keluarga Prasejahtera kota Bandar Lampung Tahun 2015 dengan rumus :

   $$\hat{p}_i = \frac{y_i}{n_i} \text{, untuk i = 1, 2, …………., 20.}$$

   dengan :

   $\hat{p}_i$ = proporsi keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015

   y_i = jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015 ke-i

   n_i = jumlah kecamatan kota Bandar Lampung ke-i
3. Menghitung ragam dari peubah respon yaitu data jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung Tahun 2015 dengan rumus :

   $$var(\hat{p}_i) = var\left(\frac{y_i}{n_i}\right), \qquad y_i \sim \text{Binomial}(n_i, p_i)$$

   $$var(\hat{p}_i) = \frac{1}{n_i^2}\ \text{var (y)}$$

   $$var(\hat{p}_i) = \frac{1}{n_i^2}(n_i\hat{p}_i(1-\hat{p}_i))$$

   $$var(\hat{p}_i) = \frac{1}{n_i}(p_i(1-p_i))$$
4. Melakukan pendugaan komponen ragam dari pengaruh acak σ_u^2 dengan menggunakan *algoritma scoring* dengan rumus :

   $$\begin{bmatrix}\sigma_u^2\\ \rho\end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix}\sigma_u^2\\ \rho\end{bmatrix}^{(n)} + \left[\mathfrak{I}(\sigma_u^{2(n)},\ \rho^n)\right]^{-1} s\left[\hat{\beta}(\sigma_u^{2(n)},\ \rho^n), \sigma_u^{2(n)},\ \ \rho^n\right]$$

5. Melakukan pendugaan koefisien regresi (β) dengan GLS yaitu :

$$\hat{\beta} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y$$

6. Melakukan pendugaan proporsi jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung dengan metode *SEBLUP* dengan rumus :

$$\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) = \boldsymbol{x_i}\,\hat{\beta} + \boldsymbol{b_i^T}\left\{\hat{\sigma}_u^2[(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)(\mathrm{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)]^{-1}\right\}\boldsymbol{Z}^T\left\{\boldsymbol{diag}(\sigma_i^2 + \boldsymbol{Z}\,\sigma_u^2\left(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)(\mathrm{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)\right]^{-1}\right\}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

Metode ML :

$$s_{\sigma_u^2}(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\} + \frac{1}{2}\left(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta\right)^T \mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta)$$

$$s_{R_\rho}(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial_\rho} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\sigma_u^2[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^T - 2\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta\right)^T \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{Z}\sigma_u^2[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^T - 2\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}]\boldsymbol{Z}^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\beta)$$

Metode REML :

$$s_{R_{\sigma_u^2}}(\sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial \mathrm{l}_R}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2} tr\{\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{P}\hat{\theta}$$

$$s_{R_{\sigma_u^2}}(\sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial \mathrm{l}_R}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} tr\left\{\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}_{\sigma_u^2}[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\boldsymbol{T}} - \mathbf{2}\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\hat{\theta}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}_{\sigma_u^2}[-\boldsymbol{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\boldsymbol{T}} - \mathbf{2}\boldsymbol{W})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{P}\hat{\theta}$$

Dengan $\mathbf{P} = \boldsymbol{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}$ dan $\mathbf{C} = [(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^{\mathbf{T}})]$.

7. Membandingkan penduga langsung dengan pendugaan tidak langsung (SEBLUP) dengan melihat kriteria *MSE* dengan rumus :

$$MSE\,(\hat{p}_i^{seblup}) = var(\hat{p}^{seblup}) + bias^2$$

$$MSE\,[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2)] = MSE[\tilde{\theta}_i(\boldsymbol{\sigma_u^2})] + E[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2) - \tilde{\theta}_i(\boldsymbol{\sigma_u^2})]^{\mathbf{2}}$$

atau dengan pendekatan $MSE\,[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2)$:

$$MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right] \approx g_{1i}(\sigma_u^2, \rho) + g_{2i}(\sigma_u^2, \rho) + g_{3i}(\sigma_u^2, \rho)$$

V. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian ini dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Nilai dugaan untuk koefisien autoregresif SEBLUP pada data proporsi jumlah keluarga Prasejahtera kota Bandar Lampung Tahun 2015 untuk metode ML yang dihasilkan bernilai positif dan sangat kuat dan untuk metode REML juga bernilai positif tetapi lemah. Metode yang lebih baik dilihat dari nilai MSE (*Mean Square Error*) yang kecil.
2. Nilai MSE REML lebih kecil dibandingkan dengan metode penduga langsung dan metode ML. Hal ini mengindikasikan bahwa pendugaan SEBLUP dengan matriks *rook contiguity* untuk metode REML lebih baik dibandingkan dengan penduga langsung dan metode ML untuk keluarga Prasejahtera kota Bandar Lampung Tahun 2015.

DAFTAR PUSTAKA

Anselin, L. 1993. *Exprolatory Spatial Data Analysis and Geographic Information Systems*. National Center for Geographic Information and Analysis of California. Santa Barbara: CA93106.

Anselin L., 2002. *Under the Hood Issues in the Specification and Interpretation of Spatial Regression Model*. Dordrecht: Academic Publishers.

Brunk, H.D. 1975. *An Introduction to Mathematical Statistic.* John Willey and Sons, New York.

Chandra H, Salvati N, and Chambers R. 2007. Small area estimation for spatially correlated populations a comparison of direct and indirect model-based methods. *Statistics in transition*. Vol.8, 887-906.

Cressie, N.,1991. *Statistics for Spatial Data*. Wiley, New York.

Datta GS, and Lahiri P. 2000. A unified measure of uncertainty of estimated best linear unbiased predictors in small area estimation problems. *Statistica Sinica*. Vol.10, 613-627

Dubin R. 2009. Spatial Weights. Editor :Fotheringham AS, PA Rogerson, *Handbook of spatial Analysis*. London : *Sage Publucations*.

Fay RE, and Herriot RA. 1979. Estimation of income for small places: An application of James-Stein procedures to census data. *J Amer Statist Assoc*. Vol.74, 269-277.

Ghosh M, and Rao JNK. 1994. Small area estimation: an appraisal (with discussion*). Statistical Science*. Vol.9, 55-93.

Harville DA. 1977. Maximum likelihood approaches to variance component estimation and to related problems. *J Amer Statist Assoc*. Vol.72, 320-338.

Henderson CR. 1975. Best Linear Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model. *Biometrics*. Vol.31, 423-447.

Petrucci A, and Salvati N. 2004. Small area estimation considering spatially correlated errors. The unit level random effects model. *Dipartimento di Statistica"G. Parenti" viale morgagni, Firence*. Vol.1, 228.

Petrucci A, and Salvati N. 2006. Small area estimation for spatial correlation in watershed erosion assessment. *Journal of agricultural, biological, and environmental statistics.* Vol.11, 169-182.

Pratesi M, and Salvati N. 2008. *Small area estimation : the EBLUP estimator based on spatially correlated random area effects.* Statistical methods and applications, Stat. Meth. & Appl. Vol.17,113-141.

Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation.* London : Willey

Rao, J.N.K. 1999. Some recent advances in model-based small area estimation. *Survey Methodology*. Vol.25,175-186.

Russo C. Sabbatini M, and Salvatore R. 2005. *General linear models in small area estimation: an assessment in agricultural surveys*, http://www.siap.sagarpa.gob.mx/mexsai/trabajos/t44.pdf. [13 Januari 2016].

Salvati N, Pratesi M, and Singh. 2004. *Small area estimation by spatial models: the spatial empirical best linear unbiased prediction (Spatial EBLUP)*. Dipartimento di Statistica"G. Parenti" viale morgagni, *Firence*. Vol.7, 37-58.

Savitz NV and Raudenbush SW. 2009. *Exploiting Spatial Dependence To Improve Best Linear Unbiased Prediction (SPATIAL EBLUP).* Dipartimento di Statistica"G. Parenti" viale morgagni, *Firence*. Vol.39, 211.

Schabenberger O and Gotway CA. 2005. *Statistical Methods fos Spatial Data Analysis*. Chapman & Hall/CRC.

Usman, M. dan Warsono. 2009. *Teori Model Linier dan Aplikasinya*. Sinar Baru Algesindo, Bandung.