KARAKTERISTIK BILANGAN COKELAT

(Skripsi)

Oleh

ANDAN SARI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

THE CHARACTERISTICS OF CHOCOLATE NUMBER

By

ANDAN SARI

In this paper we consider a game played on a rectangular $m \times n$ gridded chocolate bar. For each move, a player breaks the bar along a grid line. Each move after that consists of taking any piece of chocolate and breaking it again along existing grid lines, until just mn individual squares remain. This paper enumerates the number of ways to break an $m \times n$ bar, which we call Chocolate numbers, and introduces four new sequences related to Chocolate numbers. Using various techniques, we prove interesting divisibility results regarding Chocolate number sequences.

Keyword : Chocolate number, modulo, divisibility, generating function, prime number, positive integer

ABSTRAK

KARAKTERISTIK BILANGAN COKELAT

Oleh

ANDAN SARI

Pada penelitian ini, dipelajari sebuah permainan yang dimainkan di atas cokelat batangan berbentuk kotak-kotak persegi panjang ukuran m x n. Pada setiap giliran, pemain mematahkan cokelat batangan tersebut sepanjang garis kotak-kotak. Setiap giliran mengambil sepotong cokelat dan mematahkannya lagi di sepanjang garis kotak-kotak yang ada, sampai beberapa mn kotak yang tersisa. Pada penelitian ini di diskusikan jumlah cara untuk mematahkan cokelat batangan $m \times n$, yang disebut Bilangan Cokelat, dan mengenalkan empat barisan yang berkaitan dengan Bilangan Cokelat. Dengan menggunakan berbagai teknik, dapat dbuktikan hasil keterbagian yang terkait barisan Bilangan Cokelat.

Kata Kunci: Bilangan Cokelat, modulo, keterbagian, fungsi pembangkit, bilangan prima, bilangan bulat positif.

KARAKTERISTIK BILANGAN COKELAT

(Skripsi)

Oleh

ANDAN SARI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul : **KARAKTERISTIK BILANGAN COKELAT**

Nama Mahasiswa : *Andan Sari*

NPM : 1417031013

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.	**Prof. Dra.Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP 19730314 200012 1 002	NIP 196311081989022001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra.Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si.,M.Si.** ....

Sekretaris : **Prof. Dra.Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si.,M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **29 Januari 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertandatangan di bawah ini :

Nama	: **Andan Sari**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031013**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Karakteristik Bilangan Cokelat**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institut lain.

Bandar Lampung,   Januari 2018

METERAI TEMPEL
76D75AEF851701402
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Andan Sari
NPM. 1417031013

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Andan Sari, anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis dilahirkan di Bandar Lampung, pada tanggal 19 Januari 1996 dari pasangan Bapak Saipul Anwar dan Ibu Sri Haryati.

Penulis menempuh pendidikan di Sekolah Dasar Negeri 1 Pekon Unggak Kec. Kelumbayan Kab. Tanggamus diselesaikan pada tahun 2007. Pada tahun 2007 melanjutkan di Sekolah Menengah Pertama Muhammadiyah 3 Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2010. Kemudian pada tahun 2010 melanjutkan di Sekolah Menengah Atas 7 Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2013 .

Pada tahun 2013 pernah melanjutkan di Universitas Teknokrat selama 1 tahun mengambil jurusan Bahasa Inggris dan diselesaikan pada tahun 2014. Pada tahun 2014, penulis diterima sebagai Mahasiswi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Selama menjadi mahasiswi, penulis pernah aktif di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA). Pada awal tahun 2017, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Sinarrejo Kec. Kalirejo Lampung Tengah. Selain itu pada pertengahan tahun 2017 melaksanakan kerja praktik di Perum BULOG Divre Lampung.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT kupersembahkan karya kecil dan sederhana ini untuk :

Ayah, Emak, dan Datuk tercinta yang selalu mendoakan, memberi semangat, dan telah menjadi motivasi terbesar selama ini .

Adik-adikku tercinta, Ikrar Syahdani dan Anggin Syafti Mauli yang selalu berbagi canda, tawa serta menjadi penyemangat penulis agar bisa menjadi seseorang yang bisa dibanggakan.

Dosen Pembimbing dan Pembahas yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi kepada penulis

Keluarga Besarku tercinta yang selalu memberikan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini

Sahabat-sahabat tersayang. Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan.

Almamaterku Universitas Lampung

“ Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi kamu mencintai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu. Allah maha mengetahui sedangkan kamu tidak mengetahui.”

(Al-Baqarah : 216)

“ Perhiasan seorang mukmin itu sampai wudhunya”

(HR. Abu Hurairoh ra)

“Barang siapa keluar rumah untuk menuntut ilmu , maka ia dalam jihad fisabilillah hingga kembali ”

(HR, Bukhari)

SANWACANA

Dengan mengucap Alhamdulillah penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT berkat rahmat dan hidayahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, suri tauladan terbaik sepanjang masa.

Penulis memperoleh banyak bantuan, dukungan, bimbingan serta kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu diselesaikan.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terimakasih banyak kepada:

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing penulis dengan setulus hati, menyumbangkan ilmunya, memberikan motivasi serta telah banyak meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing hingga skripsi ini terselesaikan.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D., selaku dosen pembimbing II dan Ketua Jurusan Matematika yang telah banyak membantu, memberi masukan serta dengan sabar memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis dalam

proses penyelesaian skripsi ini.

4. Bapak Aang Nuryaman, S.Si., M..Si., selaku Pembimbing Akademik, terimakasih atas bimbingannya
5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A, Ph.D., selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
6. Dosen dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan segala bentuk bantuan kepada penulis.
7. Ayah, Emak, Datuk dan adik-adikku tersayang yang tak berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbananan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada.
8. Sahabat-sahabat seperjuanganku Intan, Yutia, Susan, Tiara, Uti, yang selalu bersama-sama, banyak membantu selama perkuliahan, dan mengisi keceriaan selama ini.
9. Teman KKN Fatimah, Adel, Salsa, Eko, kak Sofyan dan Kak Putu, terimakasih untuk pengalaman dan canda tawanya.
10. Keluarga besar HIMATIKA terima kasih atas pengalaman yang luar biasa.
11. Teman-teman seperjuangan Matematika 2014 yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Bandar lampung, Januari 2018
Penulis,

Andan Sari

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR SIMBOL DAN SINGKATAN

$a|b$: a habis membagi b atau b habis

dibagi a

$a \nmid b$: a tidak habis membagi b

$\mathbb{Z}$: himpunan semua bilangan bulat

mod : Modulo

$|a|$: harga mutlak a

$a \equiv b \pmod{m}$: a berelasi kongruen dengan b modulo

m

$\in$: anggota atau elemen

$\leq$: lebih kecil atau sama dengan

$\geq$: lebih besar atau sama dengan

gcd : *greatest common divisor (FPB)*

FPB : Faktor Persekutuan Besar

$\forall$: untuk setiap

$\exists$: terdapat

$[\quad]$: Matriks

$\sum$: Sigma

$\lfloor\quad\rfloor$: *Floor*

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika menjadi hal yang sangat penting bagi kehidupan dan tak bisa dipungkiri bahwa dalam kehidupan keseharian akan selalu bertemu dengan bilangan. Bilangan selalu digunakan baik dalam teknologi, sains, ekonomi serta banyak aspek kehidupan lainnya. Bilangan pada awalnya hanya dipergunakan untuk mengingat jumlah, namun dalam perkembangannya para pakar matematika menambahkan pembendaharaan simbol dan kata-kata yang tepat untuk mendefinisikan bilangan.

Pada masa ini, teori bilangan tidak hanya berkembang sebagai konsep, tapi juga banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Hal ini dapat dilihat pada pemanfaatan konsep bilangan dalam metode kode baris, kriptografi, komputer, dan lain sebagainya.

Salah satu bilangan yang menjadi ketertarikan para ahli teori bilangan akhir ini adalah Bilangan Cokelat. Bilangan Cokelat berbentuk $A_{m,n}$, dimana m,n adalah ukuran banyaknya kotak $m \times n$ pada cokelat batangan.

Bilangan ini muncul dari teka-teki permainan cokelat batangan. Dalam permainan tersebut diberikan satu cokelat batangan persegi panjang ukuran *m x n*, dan ingin mematahkannya menjadi kotak-kotak berukuran 1 × 1, dan hanya diperbolehkan mematahkannya di sepanjang garis kotak-kotak dan tidak bisa mematahkan dua potong atau lebih sekaligus. Uniknya, jumlah patahan tidak tergantung pada cara mematahkannya, jumlah tersebut sudah ditentukan sebelumnya.

Permainan ini diubah menjadi permainan yang dimainkan oleh dua orang, dan permainan ini disebut sebagai permainan cokelat batangan. Dua orang mematahkan cokelat secara bergiliran dan orang yang tidak dapat melakukan gilirannya dinyatakan kalah. Permainan ini pada awalnya tampak tidak menarik, karena jumlah giliran maupun pemenangnya telah ditentukan sebelumnya. Namun, permainan ini menjadi lebih kompleks jika mengajukan pertanyaan yang berbeda. Misalnya, berapa banyak cara yang ada untuk memainkan permainan cokelat batangan? Selain itu, pemain pertama diperbolehkan membuat patahan vertikal saja, sementara pemain kedua hanya bisa membuat patahan horizontal. Pemain terakhir yang dapat mematahkan cokelat tersebut adalah pemenangnya.

Dalam tulisan ini, akan dipelajari Bilangan Cokelat, atau jumlah cara untuk memainkan permainan cokelat batangan dengan berbagai ukuran batangan. Dari permainan cokelat batangan ini dapat diperoleh barisan bilangan yang menunjukkan banyaknya cara yang ada untuk memainkan permainan tersebut.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengkaji karakteristik Bilangan Cokelat.
2. Mencari jumlah cara untuk memainkan permainan cokelat batangan pada cokelat batang berukuran $A_{m,n}$.
3. Mencari jumlah cara untuk memainkan permainan cokelat batangan pada cokelat batang berukuran $B_n = A_{2,n}$.
4. Mendapatkan formula rekursif untuk Bilangan Cokelat
5. Mengetahui empat barisan baru yang berhubungan dengan Bilangan Cokelat

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengembangkan wawasan tentang teori bilangan terutama tentang karakteristik Bilangan Cokelat.
2. Menambah pengetahuan tentang Bilangan Cokelat

3. Memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam ilmu matematika di bidang teori bilangan terutama tentang karakteristik Bilangan Cokelat.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Keterbagian

Definisi 1 (Burton, 1998)

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis $a|b$) jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sehingga $b = a \cdot k$. Jika a tidak membagi habis b maka ditulis $a \nmid b$.

Istilah lain untuk $a|b$ adalah a faktor dari b, a pembagi b atau b kelipatan dari a.

Bila a pembagi b maka $-a$ juga pembagi b, sehingga pembagi suatu bilangan selalu terjadi berpasangan. Jadi dalam menentukan semua faktor dari suatu bilangan bulat cukup ditentukan faktor-faktor positifnya saja, kemudian tinggal menggabungkan faktor negatifnya. Fakta sederhana yang diturunkan langsung dari definisi adalah sebagai berikut:

$a|0, 1|a,$ dan $a|a$ untuk $a \neq 0$

Fakta $a|0$ dapat dijelaskan bahwa bilangan 0 selalu habis dibagi oleh bilangan apapun yang tidak nol. Fakta $1|a$ mengatakan bahwa 1 merupakan faktor atau pembagi dari bilangan apapun termasuk bilangan 0.

Fakta $a|a$ menyatakan bahwa bilangan tidak nol selalu habis membagi dirinya sendiri dengan hasil baginya adalah 1.

Berdasarkan pengertian keterbagian bilangan terdapat pada Definisi 1, maka berikut ini akan diberikan teorema tentang keterbagian.

Teorema 1 (Sukirman, 1997)

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku pernyataan berikut:

1. $a|1$ jika dan hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$.
2. Jika $a|b$ dan $c|d$ maka $ac|bd$.
3. Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.
4. $a|b$ dan $b|a$ jika dan hanya jika $a = b$ atau $a = -b$.
5. Jika $a|b$ dan $b \neq 0$, maka $|a| < |b|$.
6. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bx + cy)$ untuk sebarang bilangan bulat *x* dan *y*.

Bukti.

1. Jika $a = 1$ atau $a = -1$, maka jelas bahwa $a|1$, sesuai penjelasan sebelumnya. Sebaliknya, diketahui $a|1$ berarti ada $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $1 = ka$. Persamaan ini hanya dipenuhi oleh dua kemungkinan berikut: $k = 1$, $a = 1$ atau $k = -1, a = -1$. Jadi berlaku jika $a|1$ maka $a = 1$ atau $a = -1$. Jadi terbukti $a|1$ jika dan hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$,

2. Diketahui $a|b$ dan $c|d$ yaitu ada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $b = k_1 a$ dan $d = k_2 c$. Dengan mengalikan kedua persamaan tersebut diperoleh :

$$bd = (k_1 k_2)ac,$$

yaitu $ac|bd$.

3. Diketahui $a|b$ dan $b|c$, maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$$b = k_1 a \tag{2.1}$$

dan

$$c = k_2 b \tag{2.2}$$

Persamaan (2.1) disubstitusikan ke Persamaan (2.2), sehingga diperoleh

$c = k_2 b = k_2(k_1 a) = (k_1 k_2)a = ka.$ ∎

4. Diketahui

$$a = k_1 b \tag{2.3}$$

dan

$$b = k_2 a \tag{2.4}$$

Persamaan (2.3) dikalikan dengan Persamaan (2.4), diperoleh $ab = (k_1 k_2)(ab)$. Diperoleh $k_1 k_2 = 1$, yakni $k_1 = k_2 = 1$ atau $k_1 = k_2 = -1$, jadi terbukti $a = b$ atau $a = -b$. ∎

5. Diberikan $b = ac$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$. Diambil nilai mutlaknya $|b| = |ac| = |a||c|$. Karena $b \neq 0$ maka $|c| \geq 1$. Sehingga diperoleh $|b| = |a||c| \geq |a|$.

6. Diketahui $a|b$ dan $a|c$, maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = k_1 a$ dan $c = k_2 a$. Untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$bx + cy = k_1 ax + k_2 ay = (k_1 x + k_2 y)a$$

yang berarti $a|(bx + cy)$. ■

Pernyataan terakhir teorema ini berlaku juga untuk berhingga banyak bilangan yang dibagi oleh a, yaitu $a|b_k, k = 1, \cdots, n$ yaitu:

$$a|(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)$$

untuk setiap bilangan bulat $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

2.2 Modulo

Definisi 2 (Grillet, 2007)

Misalkan *a* , *m* > 0 bilangan bulat. Operasi *a* mod *m* (dibaca "*a* modulo *m*") memberikan sisa jika a dibagi dengan m. Notasi: *a* mod *m* = *r* sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$. Bilangan *m* disebut modulo, dan hasil aritmatika modulo *m* terletak di dalam himpunan $\{0, 1, \dots, m - 1\}$.

Definisi 3 (Relasi Kongruensi) (Grillet, 2007)

Misalkan *a* dan *b* adalah bilangan bulat dan $m > 0$, *a* dikatakan kongruen dengan *b* modulo *m* atau ditulis $a \equiv b \pmod{m}$ jika *m* habis membagi $a - b$. Jika a tidak kongruen dengan *b* dalam modulo *m*, maka ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Kekongruenan $a \equiv b \pmod{m}$ dapat pula dituliskan dalam hubungan

$$a = b + km$$

k adalah bilangan bulat.

Contoh :

$16 \equiv 4 \pmod{3}$ dapat ditulis sebagai $16 = 4 + 4 \cdot 3$

Sehingga , dapat dituliskan $a \bmod m = r$ sebagai :

$$a \equiv r \pmod{m}$$

Teorema 2.(Grillet, 2007)

Misalkan *m* adalah bilangan bulat positif

1. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan *c* adalah sebarang bilangan bulat maka
   i. $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$
   ii. $ac \equiv bc \pmod{m}$
   iii. $A^p \equiv b^p \pmod{m}$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif *p*.
2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka
   i. $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$
   ii. $ac \equiv bd \pmod{m}$

Bukti :

1. (i) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti $a = b + km$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$

   untuk sebarang $c \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$a + c = b + c + km$$

$$\Leftrightarrow a + c = (b + c) \pmod{m}$$

(ii) $a \equiv b$ (mod m) berarti:

$a = b + km$

$\Leftrightarrow a - b = km$

$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$

$\Leftrightarrow ac = bc + km$, dengan $k = ck$

$\Leftrightarrow ac \equiv bc \ (mod\ m)$

(iii) $a \equiv b$ (mod m) berarti $a = b + km$ dengan $k \in \mathbb{Z}$

$p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$a^p = (b + km)^p$

$$\Leftrightarrow a^p = b^p + \binom{p}{1} b^{p-1}km + \binom{p}{2} b^{p-2}(km)^2 + \cdots +$$

$$+ \binom{p}{p-1} b(km)^{p-1} + (km)^p$$

$$= b^p + \{\binom{p}{1} b^{p-1}k + \binom{p}{2} b^{p-2}k^2m + \cdots + \binom{p}{p-1} bk^{p-1}m^{p-2}$$

$$+ \quad m^{p-1}\} \Leftrightarrow a^p \equiv b^p (\text{mod } m)$$

2. (i) $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow a = b + k_1 m$

$c \equiv d$ (mod m) $\quad \Leftrightarrow c = d + k_2 m$

Jadi $(a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$

$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km \qquad (k = k_1 + k_2)$

$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d)(mod\ m)$

(ii) $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow a = b + mk$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$

$c \equiv d$ (mod m) $\Leftrightarrow c = d + ml$, untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow a \cdot c = (b + mk)(d + ml)$

$\Leftrightarrow a \cdot c = bd + blm + kdm + klm^2$

$$\Leftrightarrow a \cdot c = bd + (bl + kd + klm)m$$

$$\Leftrightarrow a \cdot c \equiv bd (\text{mod } m) \qquad \blacksquare$$

Teorema 3 Teorema Fermat (Burton, 1998)

Jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat positif dimana $p \nmid a$, maka $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Bukti :

Diasumsikan $(p-1)$ bilangan positif pertama kelipatan dari a, yaitu bilangan bulat. Sehingga terdapat barisan sebagai berikut:

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a \qquad (2.6)$$

Tidak ada satu pun suatu bilangan dari barisan diatas yang habis dibagi p, karena barisan di atas terbentuk dengan pola ka dimana $1 \leq k \leq p-1$.

Oleh karena $p \nmid a$ dan $p \nmid k$, maka $p \nmid ka$. Kemudian, dari barisan tersebut tidak ada dua bilangan yang kongruen $mod\ p$. Dengan kata lain, jika bilangan-bilangan tersebut dibagi dengan p, maka sisa pembagiannya akan selalu berbeda satu sama lain. Diasumsikan bahwa ada dua bilangan kongruen $mod\ p$, yaitu ra dan sa sehingga $ra \equiv sa (mod\ p)$ untuk

$1 \leq r < s \leq p-1$.

Karena gcd(a,p) = 1, maka diperoleh $r \equiv s\ (mod\ p)$ (2.7)

Karena r dan s harus lebih besar 1 dan harus lebih kecil dari p, maka ini menyatakan $r = s$. Persamaan (2.7) kontradiksi dengan asumsi awal bahwa r dan s harus berbeda.

Oleh karena itu, himpunan barisan pada (2.6) harus kongruen $mod\, p$ terhadap $1,2,3,4, \dots, p-1$. Selanjutnya jika himpunan tersebut dikalikan dan dikenai modulo , maka diperoleh :

$$a.\, 2a.\, 3a. \dots (p-1).\, a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)(mod\ p)$$

Sehingga,

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)!\,(mod\ p)$$

Karena gcd $\big((p-1)!, p\big) = 1$, maka

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p) \qquad \blacksquare$$

Contoh :

Tunjukkan bahwa sisa pembagian 5^{38} oleh 11 adalah 4.

Untuk menunjukkan hal di atas, dengan menggunakan relasi kongruensi cukup

ditunjukan bahwa $5^{38} \equiv 4$ (mod 11).

Bukti :

Dibuktikan berdasarkan Teorema 3

$5^{38} = (\ 5^{30}\ )\ (\ 5^{8}\ ) = (5^{10)\ 3}\ (5^{2})^{4}$

$\equiv 1^{3}.\ 3^{4}$ (mod 11)

$\equiv$ 81 (mod 11)

$\equiv$ 4 (mod 11) $\blacksquare$

2.3 Barisan (Grillet, 2007)

Dalam bahasa sederhana, barisan ($a_1, a_2, a_3, \dots$) adalah susunan bilangan-bilangan real yang teratur, satu untuk bilangan bulat positif. Lebih tepatnya, barisan tak terhingga (*infinite sequence*) adalah fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan bulat positif dan daerah hasilnya adalah himpunan bilangan real. Sebuah barisan $a_1, a_2, a_3, \dots$ dapat dinotasikan dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau sederhana dengan $\{a_n\}$. Kadangkala, dapat sedikit diperluas batasan tersebut dengan membuat daerah asalnya terdiri dari seluruh bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan bilangan bulat tertentu, seperti $b_0 b_1, b_2, \dots$ dan $c_8, c_9, c_{10}, \dots$ yang masing-masing dilambangkan dengan $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dan $\{c_n\}_{n=8}^{\infty}$ sebuah barisan dapat ditentukan dengan memberikan suku awal yang cukup untuk memberikan sebuah pola

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

Dengan rumus eksplisitnya untuk suku ke-n yaitu $a_n = 3_n - 2$; $n \geq 1$.

2.4 Sigma

Sigma digunakan untuk menyatakan penjumlahan berurutan dari suatu bilangan. simbol $\sum$ merupakan huruf capital "S" dalam abjad Yunani dan juga huruf pertama dari kata SUM yang bermakna jumlah.

Bentuk umum notasi sigma $\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$

Contoh :

$$\sum_{i=1}^{50} 2i = 2.1 + 2.2 + 2.3 + \ldots + 2.50$$

$$= 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$$

Sifat notasi sigma:

1. $\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$
2. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{k=1}^{n} U_k$
3. $\sum_{i=1}^{n} K$ = Nk ; dimana K adalah konstanta
4. $\sum_{i=1}^{n} KU_i = \mathrm{K} \sum_{i=1}^{n} U_i$
5. $\sum_{i=1}^{n} (U_i \pm V_i) = \sum_{i=1}^{n} U_i \pm \sum_{i=1}^{n} V_i$
6. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n-1} U_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} U_{i-1}$
7. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{m} U_i + \sum_{i=m+1}^{n} U_1$; dimana 1 < m < n
8. $\sum_{i=m}^{n} U_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} U_{i-p} = \sum_{i=m-p}^{n-p} U_{i+p}$
9. a. $\sum_{i=1}^{n} (U_i + V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {U_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} U_i V_i + \sum_{i=1}^{n} {V_i}^2$

   b. $\sum_{i=1}^{n} (U_i - V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {U_i}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} U_i V_i + \sum_{i=1}^{n} {V_i}^2$.

2.5 Matriks (Anton, 2000)

Matriks merupakan suatu susunan angka berbentuk segi empat. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut anggota dalam matriks. Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalkan pada Contoh : matriks di bawah ini, matriks pertama mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (ditulis 3 x 2). Dalam suatu uraian ukuran , angka pertama selalu menyatakan jumlah baris dan angka kedua menyatakan jumlah kolom. Matriks-matriks lainnya pada Contoh : dibawah ini masing-masing mempunyai ukuran 1 x 4,3 x 3,2 x 1, dan 1 x 1. Suatu matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom, dan sebuah matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Untuk menyatakan matriks, biasanya dengan menggunakan huruf kapital, dan huruf kecil untuk menyatakan bilangan.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ atau } C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Anggota pada baris I dan kolom j dari sebuah matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij}. Jadi suatu matriks umum 3 x 4 dapat ditulis sebagai

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Dan sebuah matriks umum m x n ditulis sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks bujur sangkar ber-orde n, dan anggota m_{11}, m_{22}, . . . , m_{nn} disebut sebagai diagonal utama. (bisa dilihat pada matriks A di atas).

2.6 Operasi Operasi Matriks (Anton, 2000)

Definisi 4

Dua matriks didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan anggota anggotanya berpadanan sama. Dalam notasi matriks, jika $A = [a\_ij\ ]$ dan $B = [b\_ij\ ]$ mempunyai ukuran yang sama maka A = B jika dan hanya jika $(A)_{ij} = (B)_{ij}$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika x = 5, maka A = B, tidak ada nilai x yang membuat A = C karena A dan C adalah matriks dengan ukuran yang berbeda.

Definisi 5 (Anton, 2000)

Jika A dan B adalah matriks matriks berukuran sama, maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota anggota B dengan anggota A yang berpadanan, dan selisih A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota anggota A dengan anggota anggota B yang berpadanan. Matriks matriks berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ -4 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Ungkapkan A + C, B + C, A - C dan B - C tidak terdefinisi.

Definisi 6 (Anton, 2000)

Jika A adalah sebuah matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan c.

Dalam notasi matriks, jika A $= [a_{ij}]$, maka

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Contoh :

Untuk matriks matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad (-1)\,B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Adalah umum menyatakan (-1)B dengan –B.

Definisi 7 (Anton, 2000)

Jika A adalah sebuh matriks *m x r* dan B adalah sebuah matriks *r x n*, maka hasil kali AB adalah matriks *m x n* yang anggota anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris i dari kolom secara bersama – sama dan kemudian jumlah hasilnya sama .

2.7 Sifat-sifat Operasi Matriks

Pada bilangan ini akan dibahas beberapa operasi aritmatika pada matriks. Dapat dilihat bahwa banyak aturan dasar aritmatika untuk bilangan bilangan yang berlaku untuk matriks tetapi ada beberapa yang tidak.

Teorema 8 (Anton, 2000)

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang bisa ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan aturannya adalah sebagai berikut ini :

a. $A + B = B + A$ (hukum komutatif untuk penjumlahan)

b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

c. $A (BC) = (AB) C$ (hukum asosiatif untuk perkalian)

d. $A (B + C) = AB + AC$ (hukum distributif kiri)

e. $(B + C) A = BA + CA$ (hukum distributif kanan)

f. $A (B – C) = AB – AC$

g. $(B – C) A = BA – CA$

h. $a (B + C) = Ab + Ac$

i. $a (B - C) = Ab - Ac$

j. $(a + b) C = Ac + Bc$

k. $(a - b) C = Ac - Bc$

l. $a (bC) = (ab) C$

m. $a(BC) = (aB) C = B (aC)$ (Anton, 2000)

2.8 Bilangan Prima

Definisi 8 (Burton,1998)

Sebuah bilangan bulat $p > 1$ disebut bilangan prima, jika dan hanya jika *p* habis dibagi dengan 1 dan bilangan p sendiri .

Definisi 9 (Relatif Prima) (Burton,1998)

Bilangan bulat *a* dan *b* dikatakan *coprima* atau *relatif prima* jika $\gcd(a, b) = 1$.

Berdasarkan pengertian relatif prima yang terdapat pada Definisi 2.3.2, maka akan diberikan teorema - teorema sebagai berikut yang dirujuk dari Sukirman (1997).

Teorema 5 (Sukirman, 1997)

Bilangan a dan b relatif prima jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat *x*, *y* sehingga $ax + by = 1$.

Bukti :

Karena *a* dan *b* relatif prima maka $\gcd(a, b) = 1$. Identitas Bezout menjamin adanya bilangan bulat x, y sehingga $1 = ax + by$. Sebaliknya, misalkan ada bilangan bulat $ax + by = 1$. Dibuktikan $\gcd(a, b) = d = 1$. Karena $d|a$ dan $d|b$ maka $d|(ax + by = 1)$, jadi $d|1$. Karena itu disimpulkan *d* =1. ■

Teorema 6 (Sukirman, 1997)

Jika $\gcd(a, b) = 1$, maka berlaku pernyataan berikut

1. Jika $a|c$ dan $b|c$ maka $ab|c$
2. Jika $a|bc$ maka $a|c$ (Lemma Euclid).

Bukti :

1. Diketahui $a|c$ dan $b|c$. Artinya terdapat $r, s \in \mathbb{Z} \ni c = a \cdot r = b \cdot s$. Berdasarkan hipotesis, $\gcd(a, b) = 1$. Oleh karena itu dapat dituliskan $ax + by = 1$ untuk suatu bilangan bulat *x* dan *y*. Akibatnya

$$\begin{aligned} c = 1 \cdot c &= (ax + by) \cdot c \\ &= acx + bcy \\ &= a(bs)x + b(ar)y \\ &= ab(sx + ry) \end{aligned}$$

   Karena terdapat bilangan bulat $sx + ry$ sedemikian sehingga $ab|c$. Terbukti bahwa, jika $a|c$danb$|c$ maka $ab|c$.

2. Diketahui $a|bc$, $\gcd(a, b) = 1$. Oleh karena itu dapat dituliskan $ax + by = 1$ untuk suatu bilangan bulat *x, y*. Akibatnya

$$\begin{aligned} c = 1 \cdot c &= (ax + by) \cdot c \\ &= acx + bcy \end{aligned}$$

   Karena diketahui $a|bc$ dan faktanya $a|ac$ maka $a|(acx + bcy)$. Karena $c = acx + bcy$, sehingga terbukti $a|c$. ■

2.9 Kombinasi

Perlu diingat bahwa pada kombinasi, penyusunan objek tidak mementingkan urutan. Misalnya apabila menyusun 3 huruf dari 4 = 3 huruf "XYZ" maka kombinasinya hanya ada satu, karena susunan "XYZ" dianggap sama dengan "YXZ", maupun "ZXY". Gambaran yang lebih umum dalam dalam konsep kombinasi, adalah jika r bilangan bulat tak-negatif, kombinasi r unsur dari sebuah himpunan H dengan n unsur, dipahami sebagai seleksi tak-terurut r dari n unsur di H. Dengan kata lain, kombinasi r unsur dari sebuah himpunan H dengan n unsur adalah himpunan bagian H dengan r unsur.

Contoh :

Jika H = {1, 2, 3, 4}, maka {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4} merupakan empat kombinasi dengan 3 unsur di H.

Banyaknya kombinasi r unsur dari himpunan dengan n unsur dinotasikan dengan $\mathrm{C}(\mathrm{n},\mathrm{r})$ atau nCr atau $\binom{n}{r}$. Perlu diperhatikan hubungan antara r dan n. jika $r > n$, didefinisikan $\mathrm{C}(\mathrm{n},\mathrm{r}) = 0$ dan r bilangan bulat positif, maka $\mathrm{C}(0,\mathrm{r}) = 0$. Hal tersebut akan berakibat bahwa $\mathrm{C}(0,0) = \binom{0}{0} = 1$. Fakta berikutnya adalah untuk bilangan bulat tak-negatif n berlaku $\mathrm{C}(\mathrm{n},0) = 1$, $\mathrm{C}(\mathrm{n},1) = \mathrm{n}$, dan $\mathrm{C}(\mathrm{n},\mathrm{n}) = 1$.

Teorema 7 (Ibrahim dan Mussafi, 2013).

Untuk $r \geq n$, $P(n,r) = r!$. akibatnya, $C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Bukti :

Misalkan H adalah himpunan dengan n unsur. Kombinasi r pada H dapat diurutkan dalam $P(r,r) = r!$ cara. Karena setiap permutasi r pada H dapat menghasilkan secara unik urutan kombinasi *r* pada *H*, maka hal tersebut mengakibatkan $P(n,r) = r!\,C(n,r)$. Formula $C(n,r)$ dapat diperoleh dari formula $P(n,r)$ yang diberikan sebelumnya.

Teorema 8 (Ibrahim dan Mussafi, 2013).

Banyaknya himpunan bagian dari himpunan yang terdiri atas n unsur adalah

$2^n = C(n,0) + C(n,1) + \ldots + C(n,n.)$

Membuktikan teorema ini dengan memperlihatkan bahwa kedua ruas persamaan di atas adalah menghitung banyaknya himpunan bagian dari himpunan H yang terdiri atas n unsur. Pertama amati bahwa setiap himpunan bagian dari H adalah himpunan bagian dengan r unsur di *H* untuk *r* = 0, 1, 2, …, n. karena $C(n,r)$ sama dengan banyaknya himpunan bagian dengan *r* unsur di *H*, hal itu mengikuti prinsip penjumlahan bahwa $C(n,0) + C(n,1) + \ldots + C(n,n)$ sama dengan banyaknya himpunan bagian dari H.

Misalkan S suatu himpunan bagian dari *H*. maka unsur ke-1 dari *H* dapat termasuk atau tidak termasuk dalam S.

Demikian juga unsur ke-2, ke-3, dan ke-n dari *H* dapat termasuk atau tidak termasuk dalam S. Jadi, dengan prinsip perkalian terdapat 2.2.2. … .2 = 2^n himpunan bagian H.

2.10 Induksi Matematika (Johnsonbaugh, 1997)

Induksi matematika adalah cara standar dalam membuktikan bahwa sebuah pernyataan tertentu berlaku untuk setiap bilangan asli.
Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika. Induksi matematika dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas .

2.11 Prinsip-prinsip Induksi Matematika (Johnsonbaugh, 1997)

2.11.1 Induksi Sederhana

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. untuk membuktikan pernyataan ini, menunjukkan bahwa :

1. $P(1)$ benar.
2. Jika $p(n)$ benar, maka $P(n+1)$ benar, untuk semua bilangan bulat positif.

2.11.2 Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat. Untuk membuktikan ini, perlu menunjukkan bahwa :

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ benar.

2.11.3 Prinsip Induksi Kuat

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat. Untuk membuktikannya, perlu menunjukkan bahwa :

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. Jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk semua bilangan bulat.

Contoh :

Misalkan akan dibuktikan suatu pernyataan bahwa jumlah n bilangan bulat positif yang pertama adalah $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa pernyataan itu berlaku untuk setiap bilangan bulat positif yang pertama, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Buktikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk n = 1.

$$\frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{1\,(1+1)}{2} = 1$$

Jadi pernyataan tersebut adalah benar untuk n = 1

2. Anggap bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk $n = k$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k\,(k+1)}{2}$$

3. Buktikan benar untuk untuk $n = k + 1$

$$1 + 2 + 3 \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k\,(k+1) + 2\,(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\,(k+2)}{2} \qquad \blacksquare$$

Dengan induksi matematika, dapat disimpulkan bahwa pernyataan tersebut berlaku untuk setiap bilangan asli n

Contoh :

$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n\,(n + 1)$; n ≥ 1

Bukti :

1. Harus dibuktikan benar untuk $n = 1$

$2 = 1(1+1)$

$2 = 2$

2. Dianggap benar untuk $n = k$

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2k = k(k + 1)$$

3. Buktikan benar untuk $n = k + 1$

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2k + 2(k + 1) = k(k + 1) + 2(k + 1)$$

$$= (k + 1)(k + 2) \blacksquare$$

2.12 Fungsi *Floor* dan Fungsi *Ceiling*

Definisi 10 (Johnsonbaugh, 1997)

Misalkan *x* adalah bilangan riil, $\lfloor x \rfloor$ didefinisikan sebagai bilangan bulat berarti *x* berada di antara dua bilangan bulat. Fungsi *floor* dari x :

$\lfloor x \rfloor$ = menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x* .

Fungsi *ceiling* dari x :

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x.

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan *x* ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan *x* ke atas.

Contoh :

$\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$

$\lfloor 0{,}5 \rfloor = -1$

$\lfloor -3{,}5 \rfloor = -4$

Contoh :

$\lceil 3{,}5 \rceil = 4$

$\lceil 0{,}5 \rceil = 1$

$\lceil 4{,}8 \rceil = 5$

2.13 Bilangan Cokelat (Ji dkk, 2016)

Bilangan ini muncul dari teka-teki sebuah permainan cokelat batangan. Dalam permainan tersebut diberikan sebuah cokelat batangan persegi panjang berukuran *m x n*, dan ingin mematahkannya menjadi kotak-kotak berukuran 1×1, dan hanya diperbolehkan mematahkannya di sepanjang garis kotak-kotak dan tidak bisa mematahkan dua potong atau lebih sekaligus. Uniknya, jumlah patahan tidak tergantung pada cara mematahkannya. Jumlah tersebut sudah ditentukan sebelumnya. Permainan ini disebut sebagai permainan cokelat batangan. Dua orang mematahkan cokelat secara bergiliran dan orang yang tidak bisa melakukan gilirannya lebih dulu kalah. Permainan *chocolate bar* pada awalnya tampak tidak menarik, karena jumlah giliran maupun pemenangnya telah ditentukan sebelumnya. Namun, permainan ini menjadi lebih kompleks jika mulai mengajukan pertanyaan yang berbeda. Misalnya, berapa banyak cara yang ada untuk memainkan permainan cokelat batangan?

Pemain mematahkan cokelat batangan tersebut sepanjang garis kotak-kotak. Setiap giliran setelahnya terdiri dari mengambil sepotong cokelat dan mematahkannya lagi di sepanjang garis kotak-kotak yang ada, sampai hanya beberapa *mn* kotak yang tersisa. Pernyataan ini menjelaskan jumlah cara untuk mematahkan batangan $m \times n$, yang disebut Bilangan Cokelat.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018.

3.2 Metode Penelitian

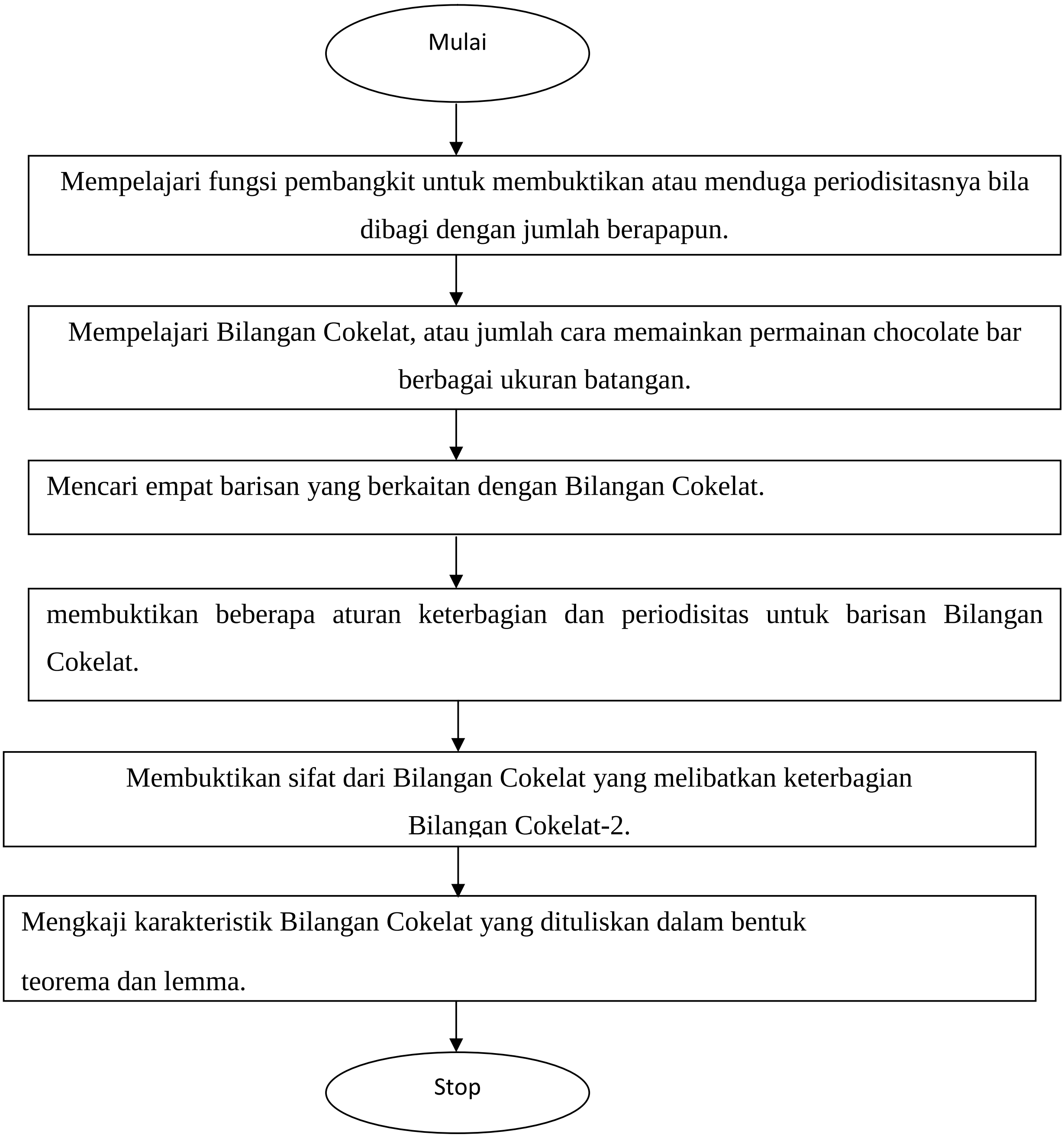
Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengkaji karakteristik Bilangan Cokelat yang dituliskan dalam bentuk teorema dan lemma.
2. Mempelajari Bilangan Cokelat, atau jumlah cara memainkan permainan chocolate bar berbagai ukuran batangan.
3. Mencari empat barisan yang berkaitan dengan Bilangan Cokelat.
4. membuktikan beberapa aturan keterbagian dan periodisitas untuk barisan Bilangan Cokelat.
5. Membuktikan sifat dari Bilangan Cokelat yang melibatkan keterbagian Bilangan Cokelat-2.

6. Mempelajari fungsi pembangkit untuk membuktikan atau menduga periodisitasnya bila dibagi dengan jumlah berapapun.

p

Adapun penyajian dalam bentuk diagram alir sebagai berikut :



Gambar 1 Diagram alir metode penelitian

V. KESIMPULAN

Permainan cokelat batangan dimainkan minimal 2 orang, Untuk memainkan permainan cokelat batangan dimana pemenangnya sudah ditentukan sebelumnya, atau disebut sebagai permainan tanpa strategi. Pemain yang terakhir mematahkan cokelat adalah pemenangnya**.** Ada beberapa cara untuk memainkan permainan cokelat batangan, yaitu patahan pertama berupa dapat berupa horizontal atau vertikal, dan patahan berikutnya bergantung pada bagian mana yang akan dipilih. Rumus rekursif untuk jumlah cara mematahkan cokelat $m \; x \; n$ adalah :

$$A_{m,n} = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{mn-2}{in-1} A_{i,n} A_{m-i,n} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{mn-2}{im-1} A_{i,m} A_{n-i,m}$$

Dari Bilangan-bilangan Cokelat tersebut, diperoleh empat barisan cokelat yaitu Bilangan Cokelat, Segitiga Cokelat, Bilangan Cokelat-2, dan Bilangan Cokelat kuadrat.

Dari Teorema 4.6.1 $B_n = (2_n - 2)! + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-2}{2m-1} B_m B_{n-m}$ diperoleh faktor-faktor dari Bilangan Cokelat-2: 1, 2^2, $2^3 \cdot 7$, $2^4 \cdot 107$, $2^7 \cdot 5^2 \cdot 29$, $2^{10} \cdot 11 \cdot 19 \cdot 37$, $2^{10} \cdot 11 \cdot 59 \cdot 1481$, $2^{12} \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 24151$, $2^{15} \cdot 11 \cdot$

571 • 185789, 2^{17} • 5 • 11 • 1607 • 958673, 2^{18} • 5 • 11 • 97 • • 9371 • 307259,. . .

dari faktor-faktor Bilangan Cokelat-2 tersebut, sebagian besar dapat dibagi 2^{n}.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2000. *Elementary Linear Algebra.* First Edition.Interlaksana, Batam

Burton, D.M. 1998. *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill Co, Singapore

Grillet, P.A. 2007. *Graduate Text In Mathematics.* Second Edition.Springer. NewYork

Ibrahim. Mussafi, Noor S.M. 20013. *Pengantar Kombinatorika dan Teori Graf.* Graha Ilmu. Yogyakarta

Ji, C., Khovanova, T., Park, R., dan Song, A. 2016. *Chocolate Numbers. Journal Integer Sequences*. 19 : 1-17

Purcell, Edwin. 2003. *Calculus.* Eighth Edition. Addision Wesley Publishing Company, Inc. Philippines.

Johnsonbaugh, R. 1997. *Discrete Mathematics.* Fourth Edition. Prentice Hall.

Sukirman, M.P. 1997. *Ilmu Bilangan*. Universitas Terbuka. Jakarta.