REPRESENTASI OPERATOR LINEAR

DARI RUANG BARISAN ℓ_4 KE RUANG BARISAN $\ell_{\frac{4}{3}}$

(SKRIPSI)

Oleh

KIKI ALENDRA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2018

ABSTRAK

REPRESENTASI OPERATOR LINIER DARI RUANG BARISAN ℓ_4 KE RUANG BARISAN $\ell_{4/3}$

Oleh

Kiki Alendra

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator. Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks takhingga. Matriks takhingga yaitu suatu matriks yang berukuran takhingga kali takhingga. Sebagai contoh, suatu matriks $A : \ell_4 \rightarrow \ell_{4/3}$,dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $\ell_4 = \left\{x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^4)^{\frac{1}{4}} < \infty\right\}$, dan $\ell_{4/3} = \left\{x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} < \infty\right\}$ merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya dikontruksikan operator A dari ruang barisan ℓ_4 ke ruang barisan $\ell_{4/3}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0,\ldots,1_{(k)},\ldots\right)$ dan ditunjukkan bahwa koleksi semua operator membentuk ruang Banach.

Kata Kunci : *Operator, Ruang Barisan Terbatas*

ABSTRACT

REPRESENTATION OF LINEAR OPERATOR FROM SEQUENCE SPACE ℓ_4 TO SEQUENCE SPACE $\ell_{4/3}$

by

Kiki Alendra

The mapping of vector space, especially on norm space is called operator. One of the cases about the operator, in case of linear operator, is the operator which works on sequence space. There aremany cases in the linear operator from one sequence space to another which can be represented by infinite matrices.
The infinite matrices are the matrices with infinite sizes.
For A $: \ell_4 \to \ell_{4/3}$,where $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $\ell_4 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^4\right)^{\frac{1}{4}} < \infty \right\}$, and $\ell_{4/3} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} < \infty \right\}$ is a sequence real numbers. Furthermore, it can be constructed an operator A from finite sequence space ℓ_4 to sequence space $\ell_{4/3}$ by using a standard basis (e_k) and it can be proven that the collection all the operators become Banach space.

Key Words : *Operator,Finite Sequence Space*

REPRESENTASI OPERATOR LINIER DARI RUANG BARISAN ℓ_4 KE RUANG BARISAN $\ell_{4/3}$

Oleh

KIKI ALENDRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **REPRESENTASI OPERATOR LINIER DARI RUANG BARISAN ℓ_4 KE RUANG BARISAN $\ell_{4/3}$**

Nama Mahasiswa : *Kiki Alendra*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031066

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Si.	**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP. 19720227 1998021001	NIP. 19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Si.** ....

Sekretaris : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing :**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 197102121995121001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **21 Februari 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Kiki Alendra**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031066**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Representasi Operator Linier Dari Ruang Barisan ℓ_4 Ke Ruang Barisan $\ell_{4/3}$**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar lampung, 21 Februari 2018

Yang Menyatakan,

Kiki Alendra

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Kiki Alendra, putra dari Bapak Mahdum Bahar dan Ibu Yurnalis. Penulis lahir di Tanjung Setia, pada tanggal 14 Maret 1996.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SDN 01 Tanjung Setia pada tahun 2002 – 2008. Kemudian menempuh Sekolah Menengah Pertama di SMPN 01 Pesisir Selatan pada tahun 2008 dan lulus pada tahun 2011. Penulis melanjutkan pendidikannya di SMAN 01 Pesisir Tengah pada tahun 2011 dan lulus pada tahun 2014.

Pada tahun 2014, penulis diterima di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Pada awal tahun 2017, untuk mengaplikasikan ilmu yang diperoleh dalam bidang kerja, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) dari tanggal 18 Januari – 23 Febuari 2017 di Kantor PT ASURANSI JIWASRAYA Bandar Lampung. Kemudian sebagai salah satu bentuk pengabdian kepada masyarakat penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) periode II (25 Juli – 03 September 2017) di Desa Ketapang Kecamatan Ketapang Kabupaten Lampung Selatan Provinsi Lampung.

Kata Inspirasi

Sesungguhnya shalatku, ibadahku, hidupku dan matiku hanya untuk Allah, Tuhan semesta alam

(Qs. Al – an'aam : 142)

Barangsiapa ditanya tentang suatu ilmu, kemudian ia menyembunyikannya maka kelak ia akan dibumgkam mulutnya dengan api neraka

(HR. Abu Dawud, At-Tirmizi, Ibnu Majah, Ibnu Hibban, Al-Baihaqi dan Al-hakim)

Bermimpilah seakan kau akan hidup selamanya. Hiduplah seakan kau akan mati hari esok

(James Dean)

Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagi kamu. Dan boleh jadi kamu mencintai sesuatu, padahal ia amat buruk bagi kamu.

(QS. Al-Baqarah: 216)

Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai kesanggupannya

(QS. Al-Baqarah: 286)

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada Kemudahan

(Kiki Alendra)

Dengan mengucapkan Alhamdulillahirabbil'alamin,

Puji dan Syukur kita panjatkan atas kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, dan tidak lupa pula shalawat teriring salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Sallallahu 'Alaihi Wasallam beserta keluarga dan para sahabatnya

Kupersembahkan sebuah karya sederhana ini untuk :

Ayahanda dan Ibunda

Tidak ada kata yang mampu kakak ucapkan selain terimakasih sebesar-besarnya untuk ayah dan ibu atas semua yang telah kalian lakukan untukku. Do'a yang tak henti-hentinya ayah dan Ibu panjatkan, kasih sayang yang tak terhitung serta waktu dan pengorbanan yang diberikan untuk mengiringi setiap langkahku.

Kakak-kakak Tercinta

Terimakasih selama ini telah mengajari adikmu banyak hal terutama kesabaran dan terimakasih karena selalu menjadi contoh yang baik.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih selama ini telah memberi motivasi, semangat, nasihat dan berbagai pengalaman denganku. Semoga kelak kita menjadi orang-orang yang sukses.

Almamaterku

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena atas limpahan karunia serta ridho-Nya sehingga skripsi dengan judul "Representasi Operator Linier Dari Ruang Barisan ℓ_4 Ke Ruang Barisan $\ell_{4/3}$" dapat terselesaikan. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada suri tauladan kita Nabi Muhammad SAW. Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis menyadari banyaknya bimbingan, bantuan, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Si., selaku pembimbing I yang senantiasa membimbing dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D., selaku pembimbing II dan Ketua Jurusan Matematika yang selalu memberikan dukungan dan arahan kepada penulis.
3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku penguji yang telah memberikan saran dan semangat sehingga terselesainya skripsi ini.
4. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis.
5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

6. Seluruh Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Ayahanda, Ibunda dan kakak-kakak ku serta seluruh keluarga yang tidak pernah lelah mendo’akan, mendukung dan memberi perhatian serta nasihat kepada penulis.
8. Teman-teman seperjuanganku Anindia, Annisa’ul, Camelia, Ira, Julian, Nanda, Raka dan Ratna yang selalu ada dalam suka dan duka penulis.
9. Sahabat KF ku Fitra, Diena, Firdha, Lidya, Nia dan Titi yang selalu memberikan dukungan dan semangat kepada penulis.
10. Rekan-rekan tangguhku Alvin, Ardiansyah, Arisca, Fathur, Fadhil, Kodir, Zhofar, Atika, Aldo, Ecak, Redi, Zulfikar, Dian, Thantia, Hage, Syifa, Ananda, Arif, Caroline, Dandi, Dea, Ecy, Fadjar, Fransiska, Margaretha, Putri, Syafa, Wika, Yola, Zulfi yang selalu membantu penulis dalam segala keadaan.
11. Teman-teman satu bimbingan Darma, Abror, Yona dan Risky yang telah banyak membantu.
12. Teman-teman Matematika 2014 yang telah memberikan pengalaman luar biasa selama ini.
13. Dan semua pihak yang terlibat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Bandar Lampung, Maret 2018

Penulis

Kiki Alendra

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Suatu ruang barisan *real* atau kompleks biasa disebut ruang barisan klasik yang terdiri dari ruang barisan konvergen (c), ruang barisan yang konvergen ke 0 (c_0), dan ruang barisan terbatas (l^p). Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_4 \rightarrow l_{4/3}$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ dan

$$l_4 \quad = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^4\right)^{\frac{1}{4}} < \infty \right\}$$

$$l_{4/3} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} < \infty \right\}$$ merupakan barisan bilangan real.

Jika $x = (x_i) \in l_4$ maka

$$A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sehingga timbul permasalahan, syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in l_{4/3}$. Oleh karena itu, penelitian akan difokuskan pada permasalahan tersebut.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini diantaranya :

1. Mempelajari sifat-sifat operator linear yang bekerja dari ruang barisan l_4 ke ruang barisan $l_{4/3}$.
2. Mencari representasi operator linear dari ruang barisan l_4 ke ruang barisan $l_{4/3}$.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian tentang representasi operator linear dari ruang barisan l_4 ke ruang barisan $l_{4/3}$ ini, diantaranya :

1. Memahami sifat operator linear dari ruang barisan l_4 ke ruang barisan $l_{4/3}$.
2. Mengetahui aplikasi dari operator linear dari ruang barisan l_4 ke ruang barisan $l_{4/3}$.
3. Dapat memberi ide bagi penulis lain yang ingin meneliti lebih lanjut tentang operator.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi, istilah-istilah yang berhubungan dengan materi yang akan dibahas pada penelitian ini.

2.1 Matriks

2.1.1 Definisi Matriks

Suatu matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan – bilangan. Bilangan – bilangan dalam jajaran tersebut disebut *entri* dari matriks. Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya.

Matriks A adalah susunan segiempat dari skalar – skalar yang biasanya dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris – baris dari matriks A semacam ini adalah m deretan horizontal yang terdiri dari skalar- skalar :

$(a_{11}, a_{12}, \dots \dots a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots \dots . a_{2n}), \dots \dots (\, a_{m1}, a_{m2}, \dots \dots , a_{mn}\,)$

Kolom – kolomdari A adalah n deretan vertikal yang terdiri dari skalar – skalar :

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots\dots\dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan elemen a_{ij} disebut entri dari matriks berukuran m x n yang terletak pada baris i dan kolom j (Anton, 2005).

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \times X \to X$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot): F \times X \to X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$berlaku :

i. $x + y = y + x$

ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii. ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$

iv. ada $-x \in x$ sehingga $x + (-x) = \theta$

v. $1 \cdot x = x$

vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x$

vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (Maddox, 1970).

2.3 Ruang Bernorma

Definisi 2.3.1

Diberikan ruang linear X. Fungsi $x \in X \rightarrow \|x\| \in R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
iii. $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$untuk setiap skalar α dan $x \in X$.
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor x. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui (Darmawijaya, 1970).

Lemma 2.3.2

Dalam ruang linier bernorm Xberlaku$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti :

Untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|$ (Maddox, 1970).

Contoh:

Misalkan $= \left\{1, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{18}, \ldots\right\}$, $y = \left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \ldots\right\}$

$\|x\|_2 = \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\}^{\frac{1}{2}}$

$\|y\|_2 = \{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\}^{\frac{1}{2}}$

a) $\|x\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |0|^2 + \left|\frac{1}{4}\right|^2 + |0|^2 + \left|\frac{1}{16}\right|^2 + \ldots}$

$$= \sqrt{1^2 + \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{16}^2 + \ldots}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-r}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{4}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{16}}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{15}}$$

$$= \frac{4}{15}\sqrt{15}$$

b) $\|y\|_2 = \sqrt{|0|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 + |0|^2 + \left|\frac{1}{8}\right|^2 + |0|^2 + \ \dots}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{8}^2 + \ \dots}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}^2}{1 - \frac{1}{4}^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{16}}} = \sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{2}{15}\sqrt{15}$$

c) $\|x - y\|_2 = \sqrt{|1-0|^2 + \left|0 - \frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{4} - 0\right|^2 + \left|0 - \frac{1}{8}\right|^2 + \left|\frac{1}{16} - 0\right|^2 + \ \dots}$

$$= \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{4}^2 + \frac{1}{8}^2 + \frac{1}{16}^2 + \ \dots}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{34} + \frac{1}{256} + \ \dots}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{5}}\sqrt{15} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{75}$$

d) $\|x\|_2 - \|y\|_2 = \frac{4}{15}\sqrt{15} - \frac{2}{15}\sqrt{15} = \frac{2}{15}\sqrt{15} \le \frac{2}{15}\sqrt{75}$

$\|x\|_2 - \|y\|_2 \le \|x - y\|_2$

Dengan demikian terbukti $\|x\|_2 - \|y\|_2 \le \|x - y\|_2$

2.4 Ruang Banach

Definisi 2.4.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm *X* berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di *X* adalah konvergen (Darmawijaya, 2007).

Contoh:

$(l^2, \|.\|_2)$adalah contoh ruang Banach (*Banach space)*.

2.5 Barisan

Definisi 2.5.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1, 2, 3,...,n,... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka x_1, x_2,...,x_n,... dikatakan barisan (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

Contoh:

Barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ adalah contoh barisan.

Definisi 2.5.2

Bilangan-bilangan $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ disebut barisan bilangan tak hingga c_n disebut suku umum dari barisan. Bilangan n, (n = 1, 2, 3,...) adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan (Yahya, dkk. 1990).

Contoh:

Barisan $\{c_n\}$, dengan $\{c_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ adalah contoh barisan.

Definisi 2.5.3

Misal L adalah suatu bilangan real dan $\{x_n\}$ suatu barisan, $\{x_n\}$ konvergen ke L jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli N, sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$.

Suatu bilangan L dikatakan limit dari suatu barisan takhingga $x_1, x_2, \ldots$ jika ada bilangan real positif ε sehingga dapat ditemukan bilangan asli N yang tergantung pada ε sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$, dan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

Contoh:

Barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ adalah salah satu contoh barisan konvergen.

Bukti:

Suatu barisan dikatakan konvergen jika ia memiliki nilai limit, maka akan dibuktikan bahwa barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \frac{3n+1}{n+2}$ mempunyai nilai limit.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$$

$$= \frac{3}{1}$$

$$= 3$$

Oleh karena itu $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3$ maka nilai limit ada. Jadi karena nilai limit ada maka dengan demikian terbukti bahwa barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ adalah barisan yang konvergen.

Teorema 2.5.4

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas.

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen ke a, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehinga $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in N$. Karena $\{a_n\}$ konvergen ke a, maka terapat suatu $n_0 \in N$sehingga $n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < 1$. Akibatnya $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > n_0$.

Ambillah $M = maks\left(|a_1|, |a_2|, \dots, \left|a_{n_0}\right|, |a| + 1\right)$, maka setiap $n \in M$ berlaku $|a_n| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a_n\}$ terbatas (Martono, 1984).

Contoh:

Barisan$\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ adalah barisan terbatas.

Bukti:

Barisan tersebut konvergen ke 0, karena

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$= 0$$

Selanjutnya akan ditunjukkan barisan tersebut terbatas.

Terdapat M sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ misal ambil $M = 1$, sehingga

$$|x_n| \leq M$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1 \text{ untuk setiap } n \in N$$

Karena $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$, sehingga dengan demikian terbukti bahwa barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ adalah barisan terbatas.

Definisi 2.5.5

Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$sehingga $|x_n| \leq M \; \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞ (Maddox, 1970).

Contoh:

Barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ adalah barisan terbatas.

Bukti:

Barisan tersebut konvergen ke 3, karena

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 1/n}{1 + 2/n}$$

$$= 3$$

Selanjutnya akan ditunjukkan barisan tersebut terbatas.

Terdapat M sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ misal ambil $M = 3$, sehingga

$$|x_n| \leq M$$

$$\left|\frac{3n+1}{n+2}\right| \leq 3 \text{ untuk setiap } n \in N$$

Karena $\left|\frac{3n+1}{n+2}\right| \leq 3$, sehingga dengan demikian terbukti bahwa barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ adalah barisan terbatas.

Definisi 2.5.6

Suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan mempunyai limit L bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks n_0 sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ (atau $|x_n - L| < \varepsilon$) artinya jika L adalah limit dari $\{x_n\}$ maka x_n mendekati L jika n mendekati tak hingga (Yahya, dkk. 1990).

Contoh:

Barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ adalah barisan yang mempunyai limit.

Bukti:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 3$$

Karena nilai $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$ maka terbukti bahwa barisan tersebut mempunyai limit.

Definisi 2.5.7

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen (Martono, 1984).

Contoh:

1. Barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ adalah barisan konvergen.

Bukti:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{3}{1} = 3$$

Karena barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ mempunyai limit maka terbukti bahwa barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{3n+1}{n+2}\right\}$ adalah barisan konvergen.

2. Barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$ adalah barisan divergen.

Bukti:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/n^2}{n/n^2 + 1/n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{0+0} = \infty$$

Karena barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$ limitnya adalah ∞, maka terbukti bahwa barisan $\{x_n\}$, dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}$ adalah barisan divergen.

Definisi 2.5.8

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*, jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\} : x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{ \bar{x} = \{x_k\} \in \omega : \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty \right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k|$$

(Soeparna, 2007).

Contoh:

Diberikan l^p dengan p adalah 2, maka

a. Untuk $p = 2$ didefinisikan

$$l^2 = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

dan norm pada l^2 yaitu

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{\bar{x} = \{x_k\} \in \omega : \sup_{k\geq 1} |x_k| < \infty\right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |x_k|$$

Definisi 2.5.9

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l^p$ dan $y \in l^p$

$$(x_j y_j)_{j\in N} \in l^\infty \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|^p \|y\|^q$$

(Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.5.10

$l^p (1 \leq p \leq \infty)$merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$.

Bukti :

a) Akan dibuktikan bahwa l^∞ merupakan ruang bernorm terhadap $\|.\|_\infty$. Untuk setiap skalar α dan$\bar{x} = \{x_k\}, \{y_k\} \in l^\infty$ diperoleh

i) $\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |x_k| \geq 0$ karena$|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k\geq1}|x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k\geq1}|\alpha x_k|.\sup_{k\geq1}|x_k| = \alpha\|x\|_\infty$.

karena $\sup_{k\geq1}|x_k| < \infty$ maka$\|\alpha\tilde{x}\|_\infty = \alpha\|x\|_\infty < \infty$ atau $\alpha\tilde{x} \in l^\infty$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty \leq \|\tilde{x}\|_\infty + \|\tilde{y}\|_\infty$dan $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty \leq \infty$ yaitu$\tilde{x} + \tilde{y} \in l^\infty$

berdasarkan i), ii) dan iii) terbukti bahwa l^∞ merupakan ruang linear dan $\|.\|_\infty$ norm pada l^∞. Dengan kata lain$(l^\infty, \|.\|_\infty)$ ruang bernorma.

b) Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_k\}, \tilde{y} = \{y_k\} \in l^p$ dan skalar α. Diperoleh :

iv) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

v) $\|\alpha\tilde{x}\|_\mathrm{p} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_\infty < \infty$

vi) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Berdasarkan iv), v) dan vi) terbukti bahwa l^p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l^p. Dengan kata lain$\left(l^p, \|.\|_p\right)$ ruang bernorm (Darmawijaya, 2007).

Contoh:

l^2 merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_2$, dengan syarat:

$$l_2 \quad = \left\{ x = (x_k) \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right. \right\}$$

dan

$$\|.\|_2 = \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right.$$

Bukti:

Diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_k\}, \tilde{y} = \{y_k\} \in l^2$ dan skalar α. Diperoleh :

i) $\|\tilde{x}\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$\|\tilde{x}\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|_2$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_2 < \infty$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_2 \leq \|\tilde{x}\|_2 + \|\tilde{y}\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$

Berdasarkan i), ii) dan iii) terbukti bahwa l^2 merupakan ruang linear dan $\|.\|_2$ norm pada l^2. Dengan kata lain$(l^2, \|.\|_2)$ ruang bernorm.

Teorema 2.5.11

Jika bilangan *real* $p$dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ merupakan ruang Banach.

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ merupakan ruang bernorm.

Jadi tinggal membuktikan bahwa ruang bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p \leq \infty$ diambil sebarang barisan Cauchy $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\} \subset l^p$ dengan

a) $\tilde{x}^{(n)} = \left\{\tilde{x}^{(n)}\right\} = \left(\tilde{x}_1{}^{(n)}, \tilde{x}_2{}^{(n)}, \tilde{x}_3{}^{(n)}, \ldots\right)$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku.

b) $\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$.

Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli $m, n > 0$ diperoleh $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap k. Dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $x_k^{(n)}$ untuk setiap k. Jadi terdapat bilangan x_k sehingga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$. Berdasarkan b) diperoleh untuk $n \geq n_0$berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Selanjutnya dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$. Menurut ketidaksamaan Minkowski.

c) $\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Yang berarti $\tilde{x} = \{x_k\} \in l^p$. Berdasarkan pertidaksamaan a) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku.

d) $\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$

Maka barisan $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\}$ konvergen ke $\tilde{x}$. Berdasarkan hasil c) dan d), terbukti bahwa barisan Cauchy $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\} \subset l^p$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \in l^p$ atau terbukti bahwa $\left(l^p, \|.\|_p\right)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang Banach (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.5.12

Misalkan X merupakan ruang barisan, X dikatakan ruang BK (Banach lengkap) jika X merupakan ruang Banach dan pemetaan koordinatnya $P_n(x) = x_n, x = (x_k) \in X$ kontinu.

Contoh ruang BK (Banach lengkap) adalah ruang barisan l^p, $1 \leq p \leq \infty$ (Ruckle, 1991).

2.6 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan ruang abstrak, yaitu ruang yang dibangun oleh aksioma-aksioma tertentu. Ruang metrik merupakan hal yang fundamental dalam analisis fungsional, sebab memegang peranan yang sama dengan jarak pada *real line R*.

Definisi 2.6.1

Misal X adalah himpunan tak kosong, suatu metriks di X adalah suatu fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku :

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
iii. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri)
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Selanjutnya pasangan (X, d) dengan d adalah metrik pada X disebut ruang metrik. Setiap anggota X disebut titik dan nilai *d(x,y)* disebut jarak(*distance)* dari titik *x* ke titik *y* atau jarak antara titik *x* dan titik *y* (Kreyszig, 1989).

Contoh:

Fungsi d yang didefinisikan oleh $d(x, y) = |x - y|$, dengan x dan y adalah bilangan-bilangan real, adalah metrik dan disebut metrik biasa pada garis real R.

Bukti:

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
iii. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$
iv. $|x - y| + |y - z| \leq |x - y + y - z|$

$$\leq |x - z|$$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Definisi 2.6.2

Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N = N(\epsilon)$ sehingga $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n > N$. Ruang X dikatakan X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Kreyszig, 1989).

Contoh:

(R, d) adalah ruang metriks $d(x, y) = |x - y|$ yang lengkap.

Bukti:

Misalkan $d(x, y) = |x - y|$ mempunyai limit, yaitu:

$\lim_{n\to\infty}|x - y| = 0$ maka $|(x - y) - 0| < \varepsilon$. Selanjutnya diambil $\varepsilon > 0$ berarti y adalah limit dari $d(x, y) = |x - y|$, dengan $\lim\limits_{n\to\infty} x = y$. Terlihat $|x - y| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Jadi terbukti $d(x, y)$ konvergen. Dengan demikian terbukti bahwa (R, d) adalah ruang metriks $d(x, y) = |x - y|$ yang lengkap.

Definisi 2.6.3

Suatu ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika dan hanya jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Dengan kata lain jika $d(x_m, x_n) \to 0 (m, n \to \infty)$ maka terdapat $x \in X$ seningga $d(x_m, x) \to 0 (m \to \infty)$(Maddox, 1970).

Contoh:

$\{x_n\}$ barisan di $\mathbb{R}$ dengan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ adalah salah satu contoh barisan Cauchy yang konvergen dan terbatas, karena $|x_n| \leq 1\ \forall n \in N$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Terbukti bahwa barisan Cauchy $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}$ di $\mathbb{R}$ konvergen adalah terbatas dan limitnya unik.

Definisi 2.6.4

Misal (X,d) adalah suatu ruang metrik. Suatu barisan $(x_n) \in X$ dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sehingga $d(x_n, x) \to 0$ untuk $n \to \infty$ (yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0, d(x_n, x) < \varepsilon$). Titik x adalah unik sebab jika $d(x_n, x) \to 0$ maka $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0$ menunjukkan bahwa $x = y$. Dapat dikatakan x_n konvergen ke limit x (dalam X) sehingga dapat ditulis $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (Beberian, 1996).

Contoh:

Misalkan $\left\{x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ dan $\left\{y_n = 2 + \frac{1}{n}\right\}$ barisan konvergen di $\mathbb{R}$ $x_n \to 0$ dan $y_n \to 2$, akan ditunjukkan $d(x_n, y_n) \to d(0,2)$

$x_n \to 0$. berarti $|\ x_n - 0| = d(\ x_n, 0) = d(0,\ x_n) \to 0$

$y_n \to 2$. berarti $|\ y_n - 2| = d(\ y_n, 2) = d(2,\ y_n) \to 0$

Berdasarkan ketidaksamaan segitiga berlaku:

$$d(\, x_n,\ y_n) \le d(x_n, 0) + d(0,2) + d(2,\ y_n)$$

$$d(\, x_n,\ y_n) \le d(x_n, 0) + d(0,2) + d(y_n, 2)$$

$d(\, x_n,\ y_n) - d(0,2) \le d(x_n, 0) + d(2,\ y_n)$ ....(1)

dan berlaku juga

$$d(0,2) \le d(0, x_n) + d(\, x_n,\ y_n) + d(y_n, 2)$$

$$d(0,2) \le d(x_n, 0) + d(\, x_n,\ y_n) + d(y_n, 2)$$

$$d(0,2) - d(\, x_n,\ y_n) \le d(x_n, 0) + d(y_n, 2)$$

$-\{d(\, x_n,\ y_n) - d(0,2)\} \le d(x_n, 0) + d(y_n, 2)$ ....(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh bahwa

$$-\{d(\, x_n,\ y_n) - d(0,2)\} \le d(x_n, 0) + d(y_n, 2) \le d(\, x_n,\ y_n) - d(0,2)$$

$|d(\, x_n,\ y_n) - d(0,2)| \le\ d(x_n, 0) + d(y_n, 2) \to 0 + 0 = 0$ ketika $n \to \infty$, hal ini berakibat

$|d(\, x_n,\ y_n) - d(0,2)| \to 0$ketika $n \to \infty$

Sehingga terbukti bahwa ketika $d(\, x_n,\ y_n) \to d(0,2)$

Lemma 2.6.5

Jika X = (X,d) adalah ruang metrik, maka :

i. Suatu barisan konvergen di X adalah terbatas dan limitnya adalah unik.
ii. Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ di X, maka $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$(Kreyszig, 1989).

Teorema 2.6.6

Setiap barisan Cauchy adalah terbatas.

Bukti :

Jika $\{a_n\}$ barisan Cauchy maka untuk $\varepsilon = 1$ ada bilangan asli N sehingga $|a_m - a_n| < 1$ dimana $n, m > N$. Perhatikan bahwa untuk $n_0 > N$ maka $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > N$. Jika $M = maks(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, 1 + |a|)$ jelas $|a_n| \leq M$ untuk setiap bilangan asli N sehingga barisan $\{a_n\}$ terbatas (Parzynsky dan Zipse, 1987)**.**

Contoh :

Barisan$\{x_n\}$, dengan$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ adalah salah satu contoh barisan Cauchy.

Bukti:

Akan ditunjukkan barisan tersebut terbatas, artinya terdapat M, sedemikian sehingga:

$$|x_n| \leq M \text{untuk setiap } n \in N$$

Selanjutnya ambil $M = 2$, sehingga dengan demikian

$$|x_n| \leq M$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq 2 \text{untuk setiap } n \in N$$

Jadi terbukti barisan Cauchy $\{x_n\}$ terbatas.

2.7 Operator

Definisi 2.7.1

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator(Kreyszig, 1989).

Definisi 2.7.2

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama.

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator A : X → Y dikatakan linear jika untuk setiap x, y ∈ X dan setiap skalar α berlaku A(αx) = αAx dan A(x + y) = Ax + Ay (Kreyszig, 1989).

Contoh:

Misal:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$, dan $y = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Untuk membuktikan bahwa A adalah operator linear maka harus memenuhi sifat:

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$
2. $A(x\alpha) = \alpha A(x)$

Bukti:

Pertama akan dibuktikan sifat yang pertama

1. $A(x + y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= A(x) + A(y)$$

Selanjutnya misal kita ambil nilai sembarang $\alpha = 2$

2. $A(x\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left((2) \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -12 & -16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -12 & -16 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha A(x)$$

Jadi, karena sifat 1 dan 2 terpenuhi maka terbukti bahwa A adalah operator linear.

Definisi 2.7.3

Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ masing-masing ruang bernorm.

a. Operator A : X → Y dikatakan terbatas jika ada bilangan M ∈ R dengan M ≥ 0 sehingga untuk setiap x ∈ X berlaku $\|Ax\| \geq M\|x\|$.
b. Operator A dikatakan kontinu di x ∈ X jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$sehingga untuk setiap y ∈ X dengan $\|x - y\| \leq \delta$berlaku $\|Ax - Ay\| \leq \varepsilon$.
c. Jika A kontinu di setiap x ∈ X, A disebut kontinu pada X (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.7.4

Jika X dan Y masing-masing ruang Bernorm atas *field* yang sama maka l_c(X, Y) merupakan ruang *linear*.

Bukti :

Diambil sebarang $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarangα, β, a, buntuk setiap $x, y \in X$ diperoleh

$$(\alpha A + \beta B)(ax + by) = \alpha A(ax + by) + \beta B(ax + by)$$

$$= \alpha Aax + \alpha Aby + \beta Bax + \beta Bby$$

$$= \alpha aAx\ \alpha bAy + \beta aBx + \beta bBy$$

$$= \alpha aAx + a\beta Bx + b\alpha Ay + b\beta By$$

$$= a(\alpha A + \beta B)x + b(\alpha A + \beta B)y$$

Jadi, $(\alpha A + \beta B)$ merupakan operator linear.

Karena A dan B terbatas maka ada bilangan real $M_1, M_2 \geq 0$ sehingga,

$$\begin{aligned}\|(\alpha A + \beta B)x\| &= \|\alpha Ax + \beta Bx\| \\ &\leq \|\alpha Ax\| + \|\beta Bx\| \\ &= |\alpha|\|Ax\| + |\beta|\|Bx\| \\ &\leq |\alpha|M_1\|x\| + |\beta|M_2\|x\| \\ &= (|\alpha|M_1 + |\beta|M_2)\|x\|\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\alpha A + \beta B$ terbatas (kontinu).

Jadi $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$

Telah dibuktikan bahwa untuk setiap $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarang skalar α, β berlaku $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$. Jadi $\mathcal{L}_c(X, Y)$ linear (Ruckle, 1991).

Contoh :

$$A = \begin{cases} \frac{1}{2^i} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} . B = \begin{cases} \frac{1}{3^i} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

A,B operator yang direpresentasikan sebagai matriks 3x3.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^3} \end{bmatrix}$$

Ambil sembarang skalar α, β, a, b untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$

$\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$, $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_3)$

$(\alpha A + \beta B)(ax + by)$=

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\beta}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{3^3} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} a\mathrm{x}_1 + \mathrm{by}_1 \\ a\mathrm{x}_2 + \mathrm{by}_2 \\ a\mathrm{x}_3 + \mathrm{by}_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2^2} + \frac{\beta}{3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2^3} + \frac{\beta}{3^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\mathrm{x}_1 + \mathrm{by}_1 \\ a\mathrm{x}_2 + \mathrm{by}_2 \\ a\mathrm{x}_3 + \mathrm{by}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right)\mathrm{x}_1 + b\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right)\mathrm{y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & a\left(\frac{\alpha}{2^2} + \frac{\beta}{3^2}\right)\mathrm{x}_2 + \mathrm{b}\left(\frac{\alpha}{2^2} + \frac{\beta}{3^2}\right)\mathrm{y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & a\left(\frac{\alpha}{2^3} + \frac{\beta}{3^3}\right)\mathrm{x}_3 + \left(\frac{\alpha}{2^3} + \frac{\beta}{3^3}\right)\mathrm{y}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right)\mathrm{x}_1 & 0 & 0 \\ 0 & a\left(\frac{\alpha}{2^2} + \frac{\beta}{3^2}\right)\mathrm{x}_2 & 0 \\ 0 & 0 & a\left(\frac{\alpha}{2^3} + \frac{\beta}{3^3}\right)\mathrm{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right)\mathrm{y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b}\left(\frac{\alpha}{2^2} + \frac{\beta}{3^2}\right)\mathrm{y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\alpha}{2^3} + \frac{\beta}{3^3}\right)\mathrm{y}_3 \end{bmatrix}$$

$$= a(\alpha A + \beta B)x + b(\alpha A + \beta B)y$$

Jadi, $(\alpha A + \beta B)$ merupakan operator linear.

Misalkan $\|Ax\| \leq M_1\|x\|$, $\|Bx\| \leq M_2\|x\|$

$$\|(\alpha A+\beta B)x\| = \left\|\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2^2}+\frac{\beta}{3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2^3}+\frac{\beta}{3^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix}\right\|$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2^2}+\frac{\beta}{3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2^3}+\frac{\beta}{3^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix}\right\|$$

$$= \left\|\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}\right)\mathrm{x}_1 + \left(\frac{\alpha}{2^2}+\frac{\beta}{3^2}\right)\mathrm{x}_2 + \left(\frac{\alpha}{2^3}+\frac{\beta}{3^3}\right)\mathrm{x}_3\right\|$$

$$= \left\|\frac{\alpha}{2}\mathrm{x}_1 + \frac{\alpha}{2^2}\mathrm{x}_2 + \frac{\alpha}{2^3}\mathrm{x}_3 + \frac{\beta}{3}\mathrm{x}_1 + \frac{\beta}{3^2}\mathrm{x}_2 + \frac{\beta}{3^3}\mathrm{x}_3\right\|$$

$$= \left\|\alpha\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}_1 + \frac{1}{2^2}\mathrm{x}_2 + \frac{1}{2^3}\mathrm{x}_3\right) + \beta\left(\frac{1}{3}\mathrm{x}_1 + \frac{1}{3^2}\mathrm{x}_2 + \frac{1}{3^3}\mathrm{x}_3\right)\right\|$$

$$\leq \left\|\alpha\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}_1 + \frac{1}{2^2}\mathrm{x}_2 + \frac{1}{2^3}\mathrm{x}_3\right)\right\| + \left\|\beta\left(\frac{1}{3}\mathrm{x}_1 + \frac{1}{3^2}\mathrm{x}_2 + \frac{1}{3^3}\mathrm{x}_3\right)\right\|$$

$$\leq \|\alpha Ax\| + \|\beta Bx\|$$

$$\leq |\alpha|\|Ax\| + |\beta|\|Bx\|$$

$$\leq |\alpha|M_1\|x\| + |\beta|M_2\|x\|$$

$$= (|\alpha|M_1 + |\beta|M_2)\|x\|$$

Dengan demikian,$(\alpha A+\beta B)$ terbatas (kontinu).

Teorema 2.7.5

Jika Y ruang Banach maka $\mathcal{L}_c((\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \|.\|)$ ruang Banach.

Bukti :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{\mathrm{A_i}\} \subset \mathcal{L}_c((\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \|.\|)$.

Jadi untuk setiap bilangan ε_0 terdapat $n_0 \in \mathrm{N}$ sehingga jika $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$berlaku $\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0$.

Misal, untuk setiap x $\in$ X dan $m, n \geq n_0$ diperoleh

$\|A_m x - A_n x\|$= $\|(A_m - A_n)x\|$

$$\leq \|A_m - A_n\|\|x\| < \varepsilon_0\|x\|$$

Jelas untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (dapat dipilh bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga $\varepsilon_0 \| x \| < \varepsilon$ ada $n_0 \in \mathrm{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$berlaku $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$.

Dengan demikian diperoleh barisan Cauchy $\{A_i x\} \subset Y$ dan Y lengkap, dengan kata lain $\{A_i x\}$ konvergen ke $y_x \in Y$.

Jadi, $\lim_{n\to\infty} A_n x = y_x$ dan x menentukan suatu operator A sehingga $A_x = y_x$.

Proses di atas dapat diulang untuk $z \in X$ tetap, dengan $z \neq x$. Jadi diperoleh $\lim_{n\to\infty} A_n z = y_z$ dan z menentukan suatu operator A sehingga $A_z = y_z$.

Untuk setiap skalar a dan b, diperoleh $ax + bz \in X$,

$\lim_{n\to\infty} A_n(ax+bz) = y_{ax+bz}danax+bz$ menentukan suatu operator A sehingga $A(ax+bz) = y_{ax+bz}$.

Jadi $A(ax+bz) = lim_{n\to\infty} A_n(ax+bz)$

$$= \lim_{n\to\infty}(aA_nx + bA_nz)$$

$$= \lim_{n\to\infty} aA_nx + \lim_{n\to\infty} bA_nz$$

$$= a\lim_{n\to\infty} A_nx + b\lim_{n\to\infty} A_nz$$

$$= ay_x + by_z$$

$$= aAx + bAz$$

Jadi operator A bersifat linear.

Untuk $n \to \infty$ diperoleh

$\|(A_m - A_n)x\| = \|A_mx - Ax \quad \|$

$$= \|(A_mx - Ax)\|$$

$$= \|(A_m - A)x\| < \varepsilon_0\|x\|$$

Jadi operator $(A_m - A)$ dengan $m \geq n_0$ bersifat linear terbatas.

Karena A_m dan $A_m - A$ masing-masing terbatas, serta $A = A_m - (A_m - A)$ maka A terbatas (kontinu).

Jadi $A \in \mathcal{L}_c((X,Y), \|.\|)$ dengan kata lain$\mathcal{L}_c((X,Y), \|.\|)$ ruang Banach (Maddox, 1970).

Definisi 2.7.6

Diberikan ruang Bernorm X dengan *field*$\mathbb{R}$.

a. Pemetaan $f: X \to \mathbb{R}$ disebut fungsi.
b. Himpunan semua fungsi *linear* kontinu pada X disebut ruang dual X, biasanya ditulis $X^* \in l_c(X, Y)$(Kreyszig, 1989).

Contoh:

Ruang barisan l_2 merupakan ruang Banach dengan ruang dual $(l_2)^* = \{x^*: l_2 \to \mathbb{R}\}$ yaitu koleksi semua fungsional linear dan kontinu pada l_2.

Teorema 2.7.7

Misal X dan Y ruang BK (Banach lengkap). Jika A matriks tak hingga yang memetakan X ke Y maka A kontinu.

Bukti :

Misal A = (a_{ij})

X = $\left(x_j\right) \in X$

y = $(y_i) \in Y$ dapat dinyatakan

$$y_i = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} x_j$$

Mendefinisikan suatu fungsi linear kontinu pada X. Jelas bahwa untuk setiap :

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$

Misal $s = (s_j)$, $t = (t_j)$ dan $\alpha \in R$

$$f_m(s) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}s_j \; f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_j$$

$$(i) f_m(s) + f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}s_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}s_j + a_{ij}t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(s_j + t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(s + t)_j$$

$$= f_m(s + t)$$

$$(ii)(f_m)(ax) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(a_{xj})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a\left(a_{ij}x_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$

$$= a(f_m(x))$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti f_m merupakan fungsi linear pada X.

Selanjutnya akan ditunjukkan f_m kontinu pada X.

Hal ini sama saja membuktikan f_m terbatas pada X.

Diketahui X ruang BK maka terdapat M > 0 sehingga $|P(x)| = |x_k| \leq M$

Oleh karena itu :

$$|f_m(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|M$$

Berdasarkan pembuktian di atas, f_m mendefinisikan fungsi linear kontinu pada *x*

$f_m(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$

Maka *f* juga kontinu pada *x*.

Karena *y* ruang BK diperoleh

$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)}$atau

$$Ax^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j^{(n)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f\left(x^{(n)}\right)$$

$$= f(x)$$

$$A(x)_i \, , \forall_i$$

Jika *y* = *Ax* maka bukti lengkap (Ruckle, 1991).

Definisi 2.7.8

Matriks takhingga $A = (a_{ij})$ adalah matriks dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan elemen pada baris dan kolom sebanyak takhingga (Berberian, 1996).

Definisi 2.7.9

Diketahui suatu operator $T \in B(H_1, H_2)$ maka $T^* \in B(H_1, H_2)$ disebut operator pendamping*adjoint operator* T jika untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$ berlaku $(Tx, y) = (x, T^*y)$ (Fuhrmann,1987).

Contoh:

Misalkan A adalah suatu operator $A \in \mathcal{L}_c\left(l_3, l_{3/2}\right)$ maka operator $A^* \in \mathcal{L}_c\left((l_3)^*, \left(l_{3/2}\right)^*\right)$disebut operator pendamping(*adjoint operator)* A jika untuk setiap $x \in l_3$ dan $y^* \in \left(l_{3/2}\right)^*$ berlaku:

$$\langle A(x), y^* \rangle = \langle x, A^*(y^*) \rangle$$

2.8 Operator Kompak

Jika X dan Y adalah ruang Banach dan $T: X \to Y$ adalah pemetaan linear, maka T dikatakan kompak jika untuk setiap barisan yang terbatas $\{x_n\}$di , maka $\{TX_n\}$ memiliki subbarisan yang konvergen di Y (MacCluer, 2009).

Contoh:

Sebarang operator linier $T: C^n \to C^n$ adalah contoh operator kompak.

Bukti:

Misalkan barisan $\{x_n\}$ adalah barisan terbatas di C^n, maka $|x_n| \leq M$, dengan M adalah skalar. Karena T kompak maka T terbatas. Selanjutnya perhatikan bahwa Tx_n adalah sebarang vektor di C^n. Misalkan $R = M|T|$, maka

$|Tx_n - 0| \leq |T||x_n| \leq M|T| = R$untuk semua $\{x_n\}$ barisan terbatas di C^n.

$\{Tx_n \in C^n: |Tx_n - 0| = d(Tx_n, 0) \leq R = B(0, R)\}$barisan terbatas di C^n. Karena barisan C^n terbatas merupakan operator kompak, maka $\{Tx_n\}$ memiliki subbarisan yang konvergen.Sehingga dengan demikian terbukti bahwa $T: C^n \to C^n$ adalah operator kompak.

2.9 Basis

Definisi 2.9.1

Ruang vektor *V* dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor *V*.

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga untuk setiap vektor $x \in V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Secara umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B, jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V, maka untuk setiap $x \in V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n x_n$$

(Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.9.2

Diberikan ruang vektor V. Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linear jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.9.3

Diberikan ruang vektor V atas lapangan B. Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = B$.

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\}$, dengan $\tilde{e}_k$ vektor di dalam R^n yang komponen ke-k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n (Darmawijaya, 2007).

2.10 Basis Biotonormal

Definisi 2.10.1

Himpunan biortonormal di ruang Hilbert adalah himpunan E dengan sifat:

1. Untuk setiap $e \in E, \|e\| = 1$
2. Untuk vector berbeda e dan f di E , $\langle e, f \rangle = 0$ (MacCluer, 2009).

Definisi 2.10.1

Basis biortonormal untuk ruang Hilbert H adalah himpunan biotonormal maksimal, himpunan biotonormal yang tidak dimuat di sembarang himpunan biotonormal (MacCluer, 2009).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

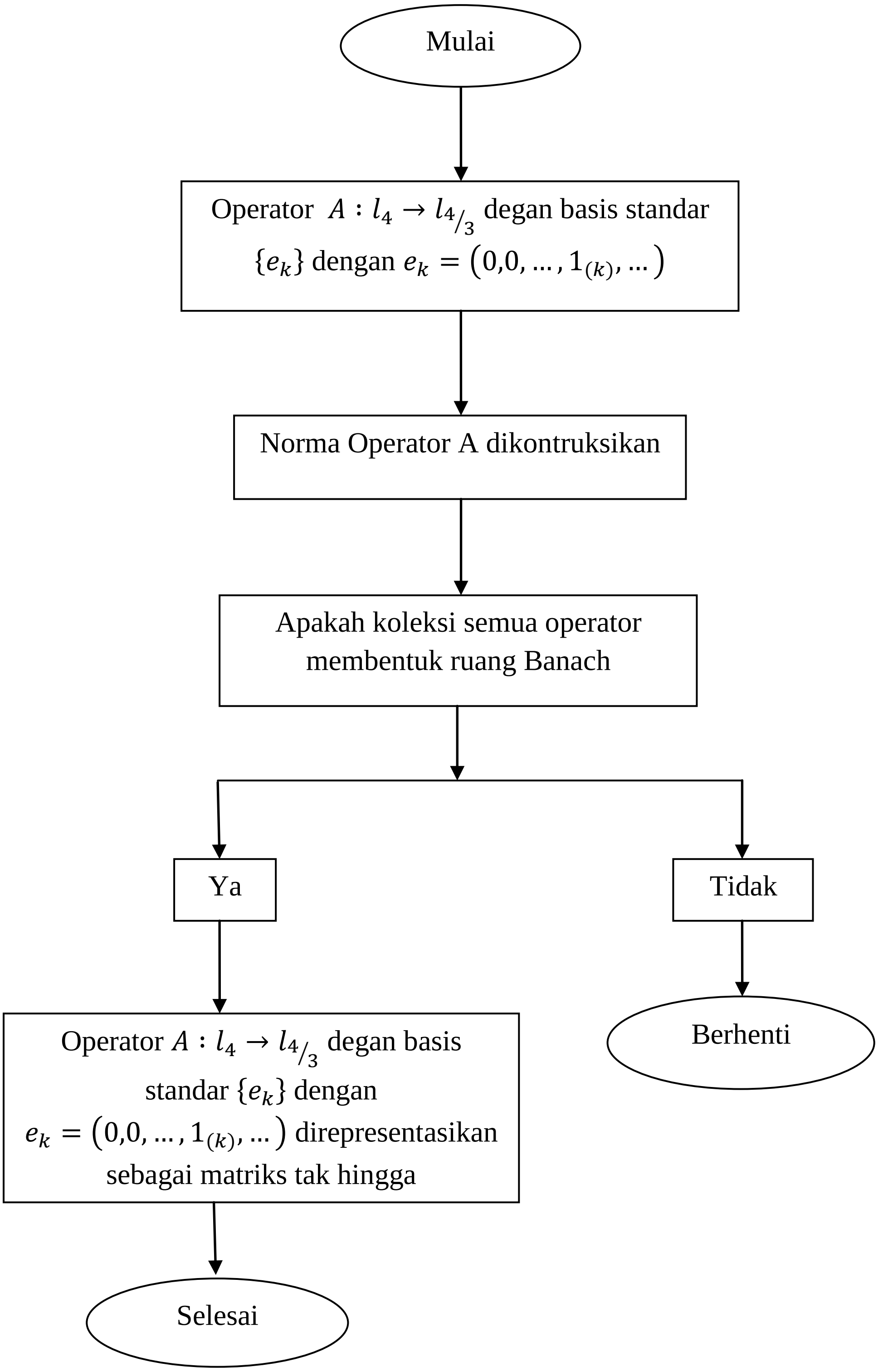
3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Mengkonstruksikan operator A dari ruang barisan l_4 ke ruang barisan $l_{4/3}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0,\dots,1_{(k)},\dots)$.
2. Mengkonstruksikan norma operator A
3. Menyelidiki apakah koleksi semua operator membentuk ruang Banach
4. Merepresentasikan operator A sebagai matriks takhingga yang dikerjakan pada barisan l_4 ke ruang barisan $l_{4/3}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0,\dots,1_{(k)},\dots)$.

3.2.1 Diagram Alir Metode Penelitian

Secara garis besar metode penelitian yang akan dilaksanakan seperti diagram alir dibawah ini :



V. KESIMPULAN

Operator linear dan kontinu $A : l_4 \rightarrow l_{4/3}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks $A = \left(a_{ij}\right)$ yang memenuhi:

1. $Ax = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\right\} \in l_{4/3}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_4$
2. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^{4/3} < \infty$
3. $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| < \infty$

Koleksi semua operator $SM\ A : l_4 \rightarrow l_{4/3}$ yang dinotasikan dengan $SM\left(l_4, l_{4/3}\right)$ membentuk ruang Banach.

DAFTAR PUSTAKA

Ansori, M. dan Suharsono. 2015. Operator Pada Ruang Barisan Terbatas, *Prosiding Semirata bidang MIPA BKS-PTN Barat, Universitas Tanjungpura Pontianak*, 2: 30-36.

Anton, H. dan Rorres, C. 2005. *Aljabar Linear Elementer edisi 8*. (Alih bahasa : Irzam Harmein, Julian Gressando, editor : Amalia Safitri).Erlangga, Jakarta.

Berberian, S. K. 1996. *Fundamentals of Real Analysis*. Springer, Texas.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Fuhrmannn, P. A. 1981. *Linear System and Operator in Hilbert Space*. Mc Graw Hill and Sons, New York.

Kreyszig, E. 1989. *Introductory Function Analysis with Application*. Willey Classic Library, New York.

MacCluer, B.D. 2009. *Elementary Functional Analysis.* Springer, New York.

Maddox, I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*. Cambridge University Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Parzynski and Zipse. 1987. *Introduction to Mathematical Analysis*. Mc Graw Hill International Edition, Singapore.

Ruckle, W. H. 1991. *Modern Analysis*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Soeparna, D. 2006. On the SM-operators, *Berkala Ilmiah MIPA*, 16: 49-53.

Yahya, Y., Suryadi, D. H. S. dan Agus, S. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.