ANALISIS SPEKTRAL PADA PEMODELAN *AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE WITH EXOGENOUS INPUT* (ARIMAX)

(Skripsi)

Oleh

LINDA RASSIYANTI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

SPECTRAL ANALYSIS IN AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE WITH EXOGENOUS INPUT (ARIMAX)

By

Linda Rassiyanti

The purpose of this study is to determine the hidden periodicity of the inflation and to obtain the best ARIMAX model using spectral analysis. Inflation and the import levels of goods and services in Indonesia from 1966 to 2016 which collected from official website of World Bank is used. The results shows that the periodicity of Indonesian inflation is 6 years and the best model for data inflation with import levels of goods and services as exogenous variable is ARIMAX (1,0,1) $(1,0,0)^6$ with the AIC value is equal to 343,98 and the SBC value is equal to 339,521.

Key words: analysis spectral, periodicity, periodogram, ARIMAX

ABSTRAK

ANALISIS SPEKTRAL PADA PEMODELAN *AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE WITH EXOGENOUS INPUT* (ARIMAX)

Oleh

Linda Rassiyanti

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui periodisitas tersembunyi dari data inflasi serta mendapatkan model ARIMAX terbaik menggunakan analisis spektral. Dalam penelitian ini, data yang digunakan adalah data inflasi serta tingkat impor barang dan jasa Indonesia sejak tahun 1966 hingga 2016 yang diperoleh melalui situs resmi *World Bank*. Dari hasil penelitian, menunjukkan bahwa periodisitas dari data inflasi Indonesia adalah 6 tahun dan model terbaik untuk data inflasi dengan tingkat impor barang dan jasa sebagai variabel eksogen adalah ARIMAX $(1,0,1)(1,0,0)^6$ dengan nilai AIC sebesar 343,98 dan nilai SBC sebesar 339,521.

Kata kunci: analisis spektral, periodisitas, periodogram, ARIMAX

ANALISIS SPEKTRAL PADA PEMODELAN *AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE WITH EXOGENOUS INPUT* (ARIMAX)

Oleh

LINDA RASSIYANTI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **ANALISIS SPEKTRAL PADA PEMODELAN *AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE WITH EXOGENOUS INPUT* (ARIMAX)**

Nama Mahasiswa : Linda Rassiyanti

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031070

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.	**Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.**
NIP. 19570101 198403 1 020	NIP. 19650125 199003 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.**	....
Sekretaris	: **Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Drs. Nusyirwan, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **13 Maret 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Linda Rassiyanti**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031070**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Analisis Spektral pada Pemodelan *Autoregressive Integrated Moving Average with Exogenous Input* (ARIMAX)**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Maret 2018

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL

E55DBADF761989522

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Linda Rassiyanti

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 29 Januari 1996. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Rasidi dan Ibu Rasijah, serta adik dari Septi Rasianti Ningsih.

Penulis memulai pendidikan dari sekolah dasar di SD Negeri 1 Gedong Air pada tahun 2002. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 2 Bandar Lampung tahun 2008. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 9 Bandar Lampung pada tahun 2011.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN pada tahun 2014. Pada periode tahun 2015/2016 penulis terdaftar menjadi anggota bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan Himpunan Mahasiswa Matematika Unila dan anggota biro Kesejahteraan Mahasiswa Badan Eksekutif Mahasiswa FMIPA Unila.

Pada tahun 2017 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Kantor Pelayanan Kekayaan Negara dan Lelang (KPKNL) Bandar Lampung dan sebagai salah satu bentuk pengabdian kepada masyarakat penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata di Desa Ruang Tengah, Kec. Penengahan, Kab. Lampung Selatan.

KATA INSPIRASI

Jangan iri kecuali kepada dua perkara, orang yang dianugerahi Allah harta kekayaan kemudian ia membelanjakannya di jalan yang benar dan orang yang diberi hikmah oleh Allah (pengetahuan tentang Al-quran dan hadis) kemudian ia melaksanakan dan mengajarkannya.

(H.R. Bukhari)

Barang siapa yang menapaki suatu jalan dalam rangka menuntut ilmu, maka Allah akan memudahkan baginya jalan menuju surga.

(H.R. Ibnu Majah dan Abu Dawud)

Jika kamu tidak menyerah dari harapan dan impianmu, maka akan selalu ada akhir yang baik.

(Choi Minho)

Bersyukur adalah kunci kebahagiaan.

(Linda Rassiyanti)

PERSEMBAHAN

Ku persembahkan karyaku yang sederhana ini kepada:

Papa dan Mama

Terima kasih kepada Papa dan Mama yang senantiasa menjadi tempat berkeluh kesah, memberikan semangat, kasih sayang, dukungan moril dan materil serta do'a yang tiada henti.

Kakakku Septi Rasianti Ningsih

Terima kasih kepada Kakakku yang selalu memberikan do'a, motivasi, saran, dukungan serta nasehat selama ini.

Sahabat-sahabatku Risky, Reka, Fietra, Mona, dan Indah

Terima kasih kepada para sahabatku yang selalu menemani selama masa perkuliahan dalam suka dan duka, selalu memberikan do'a, semangat, motivasi, dan saran padaku.

Almamater dan Negeriku

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT berkat rahmat dan hidayahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa kita ke dari jalan yang gelap gulita menuju jalan yang terang benderang. Semoga kita semua mendapatkan syafaatnya di yaumul akhir kelak. Aamiin.

Pada proses penyusunan skripsi, penulis memperoleh banyak bantuan, dukungan, bimbingan serta kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A.,Ph.D. selaku dosen pembimbing pertama yang telah menyumbangkan ilmunya serta telah banyak meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing hingga skripsi ini terselesaikan.
2. Ibu Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing dua yang telah banyak membantu dan memberi saran dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Prof. Wamiliana.M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung sekaligus dosen Pembimbing Akademik.

5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A, Ph.D selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
6. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan segala bentuk bantuan kepada penulis.
7. Orang tuaku tercinta dan kakakku tersayang, serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan kasih sayang yang tak terhingga, selalu menjadi penyemangat dan tak henti-hentinya mendoakan untuk keberhasilan penulis.
8. Teman-teman terbaik di kampus, Fietra, Indah, Mona, Risky, Reka, Putri Maulidina, Arif, dan Aldo yang telah banyak membantu, memberikan perhatian dan semangat kepada penulis.
9. Teman-teman satu bimbingan Rama, Dea, Ica, Lala, Yolanda, dan Siti Komariah yang berjuang bersama serta saling mendukung dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Adik-adik tingkat tersayang, Rina, Rini, Moni, dan Nurah yang selalu memberikan perhatian dan semangat kepada penulis.
11. Keluarga besar HIMATIKA Universitas Lampung.
12. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2014.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga informasi tambahan, saran, dan kritik untuk pengembangan lebih lanjut sangatlah penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan bagi kita semua.

Bandar Lampung,   Maret 2018

Penulis

Linda Rassiyanti

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Perekonomian yang ideal adalah perekonomian yang terus menerus tumbuh, namun pada kenyataannya tidak demikian. Salah satu indikator yang menunjukkan suatu negara memiliki perekonomian yang baik adalah tingkat inflasi yang rendah. Inflasi secara sederhana diartikan sebagai meningkatnya harga-harga secara umum dan terus-menerus. Faktor-faktor yang mempengaruhi tingkat inflasi adalah meningkatnya kegiatan ekonomi, kebijakan pemerintah dibidang harga dan pendapatan, melemahnya nilai tukar rupiah, serta peningkatan inflasi dapat terjadi akibat pengaruh yang berasal dari luar negeri. Kebijakan ekonomi diperlukan untuk menjaga kestabilan perekonomian Indonesia. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, pembuatan kebijakan ekonomi untuk mengatasi inflasi tersebut dapat dilakukan dengan melakukan analisis deret waktu terhadap historis data inflasi tersebut.

Deret waktu merupakan data yang disusun berdasarkan urutan waktu atau data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu. Waktu yang digunakan dapat berupa minggu, bulan, tahun, dan sebagainya. Analisis deret waktu menghasilkan model yang dapat digunakan untuk melihat apa yang terjadi pada suatu kurun waktu tertentu. Ditinjau dari segi domain, analisis deret waktu dibagi menjadi dua yaitu analisis deret waktu pada domain frekuensi dan domain waktu. Analisis deret waktu pada domain frekuensi dianggap sebagai akibat dari adanya komponen siklus pada frekuensi berbeda yang sulit diperoleh dalam domain waktu (Chatfield, 1996).

Untuk mengatasi hal tersebut terdapat alternatif analisis yang dapat mengetahui perioditas tersembunyi dari suatu data deret waktu yaitu analisis spektral. Dengan menggunakan analisis spektral dapat diketahui perioditas atau siklus inflasi yang terjadi di Indonesia. Setelah mendapatkan perioditas dari data inflasi, selanjutnya periode tersebut dapat digunakan untuk melakukan pemdelan.

Pada penelitian ARIMAX untuk nilai ekspor di negara Thailand (Kongcharoen & Kruangpradit, 2013) menunjukkan bahwa nilai MSFE (*Mean Square Forecast Error*) model ARIMAX lebih baik dari pada model ARIMA. Hal serupa juga dikatakan oleh Harahap (2014), dalam penelitiannya yang berjudul "Analisis Peramalan Penjualan Sepeda Motor di Kabupaten Ngawi dengan ARIMA dan ARIMAX" menunjukkan bahwa hasil perbandingan model peramalan ARIMA dan ARIMAX menunjukkan bahwa MAPE (*Mean Absolute Precentage Error)* untuk data penjualan sepeda motor pada model ARIMAX bernilai lebih kecil daripada model ARIMA.

Oleh karena itu, dalam penelitian ini pemodelan yang digunakan untuk data inflasi Indonesia adalah pemodelan ARIMAX dengan variabel impor sebagai variabel eksogennya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dilakukannya penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui perioditas tersembunyi dari data deret waktu inflasi Indonesia.
2. Menentukan model terbaik untuk variabel inflasi dengan penambahan variabel eksogen impor Indonesia.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui perioditas atau siklus inflasi yang terjadi di Indonesia.
2. Mengetahui model terbaik untuk meramalkan tingkat inflasi yang terjadi di Indonesia dengan penambahan variabel impor.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Deret Waktu

Menurut Cryer (1986), data deret waktu adalah data yang disusun berdasarkan urutan waktu atau data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu. Waktu yang digunakan dapat berupa minggu, bulan, tahun, dan sebagainya. Data deret waktu merupakan serangkaian data pengamatan yang berasal dari satu sumber tetap dan terjadi berdasarkan indeks waktu t secara beruntun dengan interval waktu yang tetap. Wei (2006) berpendapat setiap pengamatan dapat dinyatakan sebagai variabel random Z_t dengan notasi Z_{t1}, Z_{t2}, ..., Z_{tn}.

Ditinjau dari segi domain, analisis deret waktu dibagi menjadi dua yaitu analisis deret waktu pada domain waktu (*time domain*) dan analisis deret waktu pada domain frekuensi (*frequency domain*). Analisis deret waktu dalam domain waktu yaitu berupa analisis yang menggunakan fungsi autokorelasi, autokorelasi parsial, dan autokovarians. Model-model deret waktu pada domain waktu antara lain *Autoregressive* (AR), *Moving Average* (MA), *Autoregressive Moving Average* (ARMA), dan *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA). Namun, analisis deret waktu pada domain frekuensi yaitu analisis deret waktu dianggap sebagai akibat dari adanya komponen siklus pada frekuensi berbeda yang sulit diperoleh dalam domain waktu (Chatfield, 1996).

2.2 Stasioneritas

Stasioneritas berarti bahwa tidak terjadinya pertumbuhan dan penurunan data. Suatu data dapat dikatakan stasioner apabila pola data tersebut berada pada kesetimbangan disekitar nilai rata-rata yang konstan dan variansi disekitar rata-rata tersebut konstan selama waktu tertentu (Makridakis, 1999). Stasioneritas dibagi menjadi 2 yaitu :

1. Stasioner dalam rata-rata

   Stasioner dalam rata-rata adalah fluktuasi data berada di sekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak bergantung pada waktu dan variansi dari fluktuasi tersebut. Dari bentuk plot data seringkali dapat di ketahui bahwa data tersebut stasioner atau tidak stasioner. Apabila dilihat dari plot ACF, maka nilai-nilai autokorelasi dari data stasioner akan turun menuju nol sesudah time *lag* (selisih waktu) kelima atau keenam.

2. Stasioner dalan variansi

   Sebuah data deret waktu dikatakan stasioner dalam variansi apabila struktur dari waktu ke waktu mempunyai fluktuasi data yang tetap atau konstan dan tidak berubah-ubah. Secara visual untuk melihat hal tersebut dapat dibantu dengan menggunakan plot deret waktu, yaitu dengan melihat fluktuasi data dari waktu ke waktu (Wei, 2006).

2.3 Pembedaan

Pembedaan dilakukan untuk menstasionerkan data nonstasioner. Pembedaan dibagi menjadi dua yaitu pembedaan biasa dan pembedaan musiman.

2.3.1 Pembedaan Biasa

Menurut Pankratz (1991), ketika data tidak mempunyai rata-rata yang konstan, kita dapat membuat data baru dengan rata-rata konstan dengan cara pembedaan data, artinya kita menghitung perubahan pada data secara berturut-turut. Pembedaan pertama atau d=1 dirumuskan :

$$W_t = X_t - X_{t-1}$$

Jika pembedaan pertama d=1 belum membuat seri data mempunyai rata-rata yang konstan, maka dilakukan pembedaan ke-2 atau d=2 yang berarti kita menghitung perbedaan pertama dari perbedaan pertama. Kita definisikan W^*_t sebagai pembedaan pertama dari z_t sehingga rumus untuk pembedaan kedua d=2 sebagai berikut :

$$\begin{aligned} W_t &= W^*_t - W^*_{t-1} \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \end{aligned}$$

2.3.2 Pembedaan Musiman

Pembedaan musiman berarti menghitung pergeseran data secara musiman berdasarkan periode waktu tertentu, biasanya dinotasikan s untuk menstimulasi rata-rata dalam seri menjadi konstan. Untuk data kuartalan (s = 4), untuk data bulanan (s = 12), dan seterusnya. Sebuah data seri mungkin cukup dilakukan dengan pembedaan biasa, cukup dengan pembedaan musiman saja atau kedua-keduanya. Misalkan didefinisikan D adalah derajat pembedaan musiman (berapa kali pembedaan musiman dilakukan). Jika d=0 dan pembedaan musiman (D=1) dihitung untuk semua t sebagai :

$$W_t = X_t - X_{t-s}$$

Jika transformasi telah digunakan untuk menstabilkan varian, pembedaan musiman digunakan untuk X_t . Pembedaan musiman digunakan untuk menghapus sebagian besar data musiman (Pankratz, 1991).

2.4 Uji Akar Unit Augmented Dickey Fuller

Uji akar unit dapat pula dipandang sebagai uji stasioneritas. Dickey dan Fuller (1979) memandang tiga model persamaan regresi yang bisa digunakan untuk menguji kehadiran akar unit, yakni :

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_{2t} + \varepsilon_t$$

dengan $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Perbedaan antara ketiga regresi tersebut hanya terletak pada keberadaan elemen-elemen deterministik a_0 dan a_{2t}. Parameter yang menjadi perhatian dalam model tersebut adalah a_1. Jika $a_1 = 1$ maka y_t mempunyai akar unit, dengan kata lain y_t tidak stasioner. Jika $|a_1| < 1$ maka y_t tidak mempunyai akar unit, dengan kata lain y_t stasioner. Dengan hipotesis sebagai berikut :

H_0: $|a_1| = 1$

H_1: $|a_1| < 1$

dapat diuji menggunakan statistik-t untuk menentukan apakah y_t mempunyai akar unit atau tidak. Model di atas dapat dilakukan reparameterisasi sebagai berikut :

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_{2t} + \varepsilon_t$$

dengan, $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ dan $\gamma = a_1 - 1$. Ketiga model regresi ini dikenal sebagai regresi Dickey-Fuller. Parameter yang menjadi perhatian pada ketiga model regresi Dickey-Fuller ini sekarang adalah γ. Jika $\gamma = 0$, yang berarti $a_1 = 1$, maka y_t mempunyai akar unit atau y_t tidak stasioner. Dengan hipotesis sebagai berikut :

H_0: $\gamma = 0$

H_1: $\gamma < 0$

Menurut Rusdi (2011), nilai statistik-t dibandingkan dengan nilai kritis DF (nilai kritis statistik) untuk menentukan apakah menerima atau menolak hipotesis nol. Aturan keputusan diambil berdasarkan kriteria berikut:

1. Jika statistik-t lebih besar dari nilai kritis DF maka terima H_0 dan disimpulkan y_t mempunyai akar unit atau y_t tidak stasioner.
2. Jika statistik-t kurang dari nilai kritis DF maka tolak H_0 dan disimpulkan y_t tidak mempunyai akar unit atau y_t stasioner.

2.5 Fungsi Autokorelasi dan Fungsi Autokorelasi Parsial

Dalam metode deret waktu, alat utama untuk mengidentifikasi model dari data yang akan diramalkan adalah dengan menggunakan fungsi autokorelasi atau *Autocorrelation Function* (ACF) dan fungsi autokorelasi parsial atau *Partial Autocorrelation Function* (PACF).

2.5.1 Fungsi Autokorelasi

Dari proses stasioner suatu data deret waktu (X_t) diperoleh E (X_t) = μ dan Var (X_t) = E $(X_t - \mu)^2 = \sigma^2$, yang konstan dan kovarian Cov (X_t, X_{t+k}), yang fungsinya hanya pada perbedaan waktu $|t - (t-k)|$. Maka dari itu, hasil tersebut dapat ditulis sebagai kovariansi antara X_t dan X_{t+k} sebagai berikut :

$$\gamma = \mathrm{Cov}\,(X_t, X_{t+k}) = E\,(X_t - \mu)\,(X_{t+k} - \mu)$$

dan korelasi antara X_t dan X_{t+k} didefinisikan sebagai :

$$\rho_k = \frac{Cov\,(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var\,(X_t) Var\,(X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

dimana notasi Var (X_t) dan Var (X_{t+k}) = γ_0. Sebagai fungsi dari k, γ_k disebut fungsi autokovarian dan ρ_k disebut fungsi autokorelasi (ACF). Dalam analisis deret waktu, γ_k dan ρ_k menggambarkan kovarian dan korelasi antara X_t dan X_{t+k} dari proses yang sama, hanya dipisahkan oleh *lag* ke-k (Wei, 2006).

2.5.2 Fungsi Autokorelasi Parsial

Menurut Wei (2006), autokorelasi parsial digunakan untuk mengukur tingkat keeratan antara X_t dan X_{t+k}, apabila pengaruh dari *time lag* 1, 2, 3, . . . , dan seterusnya sampai k-1 dianggap terpisah. Ada beberapa prosedur untuk menentukan bentuk PACF yang salah satunya akan dijelaskan sebagai berikut. Fungsi autokorelasi parsial dapat dinotasikan dengan:

$$\text{corr}\,(X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \ldots, X_{t+k})$$

misalkan X_t adalah proses yang stasioner dengan $E(X_t) = 0$, selanjutnya X_{t+k} dapat dinyatakan sebagai model linear,

$$X_{t+k} = \emptyset_{k1} X_{t+k-1} + \emptyset_{k2} X_{t+k-2} + \ldots + \emptyset_{kk} X_t + \varepsilon_{t+k} \qquad (2.1)$$

dengan $\emptyset_{ki}$ adalah parameter regresi ke-i dan ε_{t+k} adalah nilai kesalahan yang tidak berkorelasi dengan X_{t+k-j} dengan j=1,2, … , k. Untuk mendapatkan nilai PACF, langkah pertama yang dilakukan adalah mengalikan persamaan (2.1) dengan X_{t+k-j} pada kedua ruas sehingga diperoleh :

$$X_{t+k-j} X_{t+k} = \emptyset_{k1} X_{t+k-1} X_{t+k-j} + \emptyset_{k2} X_{t+k-2} X_{t+k-j} + \ldots + \emptyset_{kk} X_t X_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k} X_{t+k-j}$$

Selanjutnya nilai harapannya adalah :

$$E(X_{t+k-j} X_{t+k}) = E(\emptyset_{k1} X_{t+k-1} X_{t+k-j} + \emptyset_{k2} X_{t+k-2} X_{t+k-j} + \ldots + \emptyset_{kk} X_t X_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k} X_{t+k-j})$$

Dimisalkan nilai $E(X_{t+k-j} X_{t+k}) = \gamma_j$, j = 0,1,…,k dan karena $E(\varepsilon_{t+k}\, X_{t+k-j}) = 0$, maka diperoleh :

$$\gamma_j = \emptyset_{k1} \gamma_{j-1} + \emptyset_{k2} \gamma_{j-2} + \cdots + \emptyset_{kk} \gamma_{j-k} \qquad (2.2)$$

Persamaan (2.2) dibagi dengan γ_0

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \emptyset_{k1} \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} + \emptyset_{k2} \frac{\gamma_{j-2}}{\gamma_0} + \cdots + \emptyset_{kk} \frac{\gamma_{j-k}}{\gamma_0}$$

diperoleh,

$$\rho_j = \emptyset_{k1}\rho_{j-1} + \emptyset_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{j-k}$$

dan diberikan $\rho_0 = 1$.

Untuk j = 1, 2, 3 ,…, k didapatkan sistem persamaan sebagai berikut :

$$\rho_1 = \emptyset_{k1}\rho_0 + \emptyset_{k2}\rho_1 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-1},$$

$$\rho_2 = \emptyset_{k1}\rho_1 + \emptyset_{k2}\rho_0 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-2},$$

$$\vdots$$

$$\rho_k = \emptyset_{k1}\rho_{k-1} + \emptyset_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_0 \qquad (2.3)$$

Sistem persamaan (2.3) dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer. Persamaan (2.3) untuk j = 1, 2, 3, …, k digunakan untuk mencari nilai-nilai fungsi autokorelasi parsial *lag* k yaitu $\emptyset_{k1}, \emptyset_{k2}, \ldots, \emptyset_{kk}$.

a. Untuk *lag* pertama (k = 1) dan (j = 1) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

   $\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0$, karena $\rho_0 = 1$ sehingga $\rho_1 = \emptyset_{11}$ yang berarti bahwa fungsi autokorelasi parsial pada *lag* pertama akan sama dengan fungsi autokorelasi pada *lag* pertama.

b. Untuk *lag* kedua (k = 2) dan (j = 1,2) diperoleh sistem persamaan :

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1$$

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 \qquad (2.4)$$

   persamaan (2.4) jika ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi :

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh :

$$\emptyset_{22} = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

c. Untuk *lag* ketiga (k = 3) dan (j = 1,2,3) diperoleh sistem persamaan :

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_2$$

$$\rho_2 = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 + \emptyset_{33}\rho_1$$

$$\rho_3 = \emptyset_{11}\rho_2 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_0 \quad (2.5)$$

persamaan (2.5) jika ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi :

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{22} \\ \emptyset_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{bmatrix}$$

dengan aturan Cramer diperoleh :

$$\emptyset_{33} = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

d. Untuk k *lag* j = 1,2,3,…, k diperoleh sistem persamaannya adalah :

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_2 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_2 = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 + \emptyset_{33}\rho_1 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\rho_3 = \emptyset_{11}\rho_2 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_0 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-3}$$

$$\vdots$$

$$\rho_k = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_2 + \emptyset_{33}\rho_3 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_0 \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) jika dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{22} \\ \phi_{33} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

dengan aturan Cramer diperoleh :

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix}$$

Nilai autokorelasi parsial *lag* k hasilnya adalah,

$$\phi_{kk} = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

dengan ϕ_{kk} disebut PACF antara X_t dan X_{t+k}.

Fungsi autokorelasi parsial (PACF) :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Jadi diperoleh autokorelasi parsial dari X_t pada *lag* k didefinisikan sebagai :

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

Himpunan dari $\phi_{kk}\{\emptyset_{kk} : k = 1,2,\dots\}$, disebut sebagai *partial autocorrelation function* (PACF). Fungsi ϕ_{kk} menjadi notasi standar untuk autokorelasi parsial

2.6 Analisis Spektral

Analisis spektral digunakan pada data deret waktu untuk mencari periodisitas tersembunyi. Analisis spektral atau juga disebut spektrum diperkenalkan oleh Schuster yaitu seorang pekerja sosial pada abad ke-19 digunakan pada bidang kelautan, meteorologi, dan astronomi dengan tujuan mencari periodositas tersembunyi (Bloomfield, 2000).

2.6.1 Populasi Spektrum dan Fungsi Pembangkit Autokovarian

Anggap $\{Z_t\}$ adalah proses stasioner bernilai real pada kovarian dengan mean $E(Z_t) = \mu$ dan autokovarian ke-k adalah γ_k, dengan $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3,\dots$. Diasumsikan autokovarian dapat dijumlahkan, sehingga fungsi pembangkit autokovarian didefinisikan sebagai berikut :

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k \tag{2.7}$$

Dimana variansi proses γ_0 merupakan koefisien $B^0 = 1$ dan autokovarian pada lag ke-k (γ_k) merupakan koefisien B^k dan B^{-k}. Jika diberikan deret autokovarian γ_k yang dapat dijumlahkan, maka densitas spektral ada dan didefinisikan sebagai berikut :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-i\omega k} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) dapat diuraikan menggunakan hubungan Euler yaitu, $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ dan $e^{-i\omega} = \cos\omega - i\sin\omega$ maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\{\ldots + \gamma_{-1}[\cos(-\omega) - i\sin(-\omega)] + \gamma_0[\cos(0) - i\sin(0)] + \gamma_1[\cos(\omega) - \\
&\qquad i\sin(\omega)] + \cdots\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma_0[\cos(0) - i\sin(0)] + \frac{1}{2\pi}\{\gamma_1[\cos(-\omega) - i\sin(-\omega) + \cos(\omega) - i\,sin(\omega)] \\
&\qquad + \gamma_2[\cos(-2\omega) - i\sin(-2\omega) + cos(2\omega) - i\sin(2\omega)] + \cdots\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma_0[\cos(0) - i\sin(0)] + \frac{1}{2\pi}\{\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k[\cos(-\omega k) - i\sin(-\omega k) + \cos(\omega k) - \\
&\qquad i\sin(\omega k)]\} \\
&= \frac{1}{2\pi}[1-0] + \frac{1}{2\pi}\{\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\,[\cos(-\omega k) - i\sin(-\omega k) + \cos(\omega k) - i\sin(\omega k)]\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{2\pi}\{\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k 2\cos(\omega k)\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{2\pi}\{\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k\cos(\omega k)\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{2\pi}\{2\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cos(\omega k)\} && (2.9) \\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{\pi}\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k\cos(\omega k), \qquad -\pi \le \omega \le \pi && (2.10)
\end{aligned}$$

2.7 Periodogram

\`

Periodogram digunakan untuk melihat periodisitas tersembunyi dari data deret waktu. Penerapan analisis spektral dalam menentukan model peramalan data deret waktu yaitu digunakan untuk melihat periodositas dari data deret waktu dengan melihat periodogramnya. Periode yang diperoleh selanjutnya digunakan untuk menentukan periode dari suatu model data deret waktu (Wei, 2006).

Diberikan data runtun waktu dengan n observasi dalam bentuk polinomial trigonometrik adalah :

$$Z_t = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (a_k cos\omega_k t + b_k \sin \omega_k t) + e_t \quad (2.11)$$

dimana $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, [\frac{n}{2}]$ adalah frekuensi Fourier dan a_k serta b_k dinamakan koefisien Fourier yang dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Least Square Error*, persamaan (2.13) dikenal sebagai deret Fourier.

Penggambaran Fourier diatas dapat dipandang sebagai model regresi sederhana sebagai berikut :

$$Z_t = X_t\beta + e_t\,, \quad e_t \sim N(0,\sigma^2). \quad (2.12)$$

dengan

$$X_t = [\cos\omega_0 t \quad \sin\omega_0 t \quad \cos\omega_1 t \quad \sin\omega_1 t \quad \ldots \quad \cos\omega_{n/2} t \quad \sin\omega_{n/2} t]$$

$$\beta = [a_0 \quad b_0 \quad a_1 \quad b_1 \quad \ldots \quad a_{n/2} \quad b_{n/2}]$$

Dengan menggunakan metode *LSE* didapat nilai $\hat{\beta}$ sebagai berikut :

$$b = \hat{\beta} = [\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t]^{-1} [\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t] \quad (2.13)$$

Persamaan (2.14) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$Z_t = [\cos\omega_0 t \quad \sin\omega_0 t \quad \cos\omega_1 t \quad \sin\omega_1 t \quad \ldots \quad \cos\omega_{n/2} t \quad \sin\omega_{n/2} t] \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{n/2} \\ b_{n/2} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t =$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t & \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_1 t \cos \omega_0 t & \cdots & \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_{n/2} t \cos \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t & \sum_{t=1}^{n} \sin^2 \omega_0 t & \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_1 t \sin \omega_0 t & \cdots & \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_{n/2} t \sin \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t & \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_0 t \cos \omega_1 t & \sum_{t=1}^{n} \cos^2 \omega_1 t & \cdots & \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_{n/2} t \cos \omega_1 t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_0 t \sin \omega_{n/2} t & \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_0 t \sin \omega_{n/2} t & \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_1 t \sin \omega_{n/2} t & \cdots & \sum_{t=1}^{n} \sin^2 \omega_{n/2} t \end{bmatrix}$$

Dapat dibuktikan bahwa :

a. $\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi k t i}{n}} = \begin{cases} n, \text{ untuk } k = 0 \\ 0, \text{ untuk } k = \pm 1, \dots, \pm(n-1) \end{cases}$

b. $\sum_{t=1}^{n} \cos \ \omega_k t = 0$, untuk k = 1, 2, 3, ..., $\frac{n-1}{2}$,

$\sum_{t=1}^{n} \sin \omega_k t = 0$, untuk k = 1, 2, 3, ..., $\frac{n-1}{2}$

c. $\sum_{t=1}^{n} \cos \omega_j t \cos \omega_k t = \begin{cases} 0, \text{ untuk } k \neq j \\ \frac{n}{2}, \text{ untuk } k = j \end{cases}$

d. $\sum_{t=1}^{n} \sin \omega_j t \sin \omega_k t = \begin{cases} 0, \text{ untuk } k \neq j \\ \frac{n}{2}, \text{ untuk } k = j \end{cases}$

e. $\sum_{t=1}^{n} \cos \omega_j t \sin \omega_k t = 0$, untuk semua j dan k.

Bukti :

a. $\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi k t i}{n}}$

Untuk k = 0, maka diperoleh :

$$\sum_{t=1}^{n} e^{2\pi+0+ti} = \sum_{t=1}^{n} e^{0}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} 1 = n$$

Untuk k = ±1, ±2, ... , ±(n-1), misalkan $z = e^{\frac{2\pi k t i}{n}}$, sehingga persamaan (a) dapat ditulis sebagai berikut :

$\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi kti}{n}} = \sum_{t=1}^{n} Z^t$

$= \frac{1-Z^n}{1-Z}$, untuk 0 < |k| < n dan Z ≠ 1 (2.15)

$Z = e^{\frac{2\pi ki}{n}} \Leftrightarrow Z^n = e^{\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)n}$

$= e^{(2\pi ki)}$

$= \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)$

$= 1$, untuk k = ±1, ±2, ... , ±(n-1) (2.16)

Subtitusikan persamaan (2.16) ke persamaan (2.15), sehingga diperoleh :

$\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi kti}{n}} = \frac{1-Z^n}{1-Z}$

$= \frac{1-1}{1-Z}$

= 0, untuk k = ±1, ±2, ... , ±(n-1)

b. Dari hasil (a) diperoleh :

$\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi kti}{n}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n}(\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n}\cos\omega_k t + i\ \sum_{t=1}^{n}\sin\omega_k t = 0$ (2.17)

Dari persamaan (2.19) hasilnya sama dengan nol, jika komponen real dan imajiner keduanya sama dengan nol, sehingga:

$$\sum_{t=1}^{n}\cos\omega_k t = 0 \text{ dan}$$

$$i\sum_{t=1}^{n}\sin\omega_k t = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n}\sin\omega_k t = 0.$$

c. $\sum_{t=1}^{n}\cos\omega_j t\cos\omega_k t$

$= \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{\omega_j ti} + e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\omega_k ti} + e^{-\omega_k ti}\right)$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{(\omega_j+\omega_k)ti} + e^{(\omega_j-\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j+\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j-\omega_k)ti}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti(k+j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(-k+j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(k-j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(-k-j)}{n}}\right\} \quad (2.18)$$

Dari hasil (a) diperoleh :

Jika k ≠ j, maka persamaan (2.18) hasilnya = 0.

Jika k = j, maka persamaan (2.18) akan menjadi :

$$\sum_{t=1}^{n}\cos\omega_j t\cos\omega_k t = \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{\omega_j ti} + e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\omega_k ti} + e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti2k}{n}} + e^{0} + e^{0} + e^{\frac{2\pi ti(-2k)}{n}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}(0 + 1 + 1 + 0)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} 1$$

$$= \frac{n}{2}$$

d. $\sum_{t=1}^{n}\sin\omega_j t\sin\omega_k t$

$$= \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_j ti} - e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_k ti} - e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left(e^{(\omega_j+\omega_k)ti} - e^{(\omega_j-\omega_k)ti} - e^{(-\omega_j+\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j-\omega_k)ti}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti(k+j)}{n}} - e^{\frac{2\pi ti(-k+j)}{n}} - e^{\frac{2\pi ti(k-j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(-k-j)}{n}}\right\} \quad (2.19)$$

Dari hasil (a) diperoleh :

Jika k ≠ j, maka persamaan (2.19) hasilnya = 0.

Jika k = j, maka persamaan (2.19) akan menjadi :

$$\sum_{t=1}^{n}\sin\omega_j t\sin\omega_k t = \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_j ti} - e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_k ti} - e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti2k}{n}} - e^{0} - e^{0} + e^{\frac{2\pi ti(-2k)}{n}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}(0 - 1 - 1 + 0)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n} -2$$

$$= \frac{n}{2}$$

e. $\sum_{t=1}^{n} \cos \omega_j t \sin \omega_k t$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2}\left(e^{\omega_j ti} + e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_k ti} - e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= -\frac{1}{4i}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{(\omega_j+\omega_k)ti} - e^{(\omega_j-\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j+\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j-\omega_k)ti}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4i}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti(k+j)}{n}} - e^{\frac{2\pi ti(-k+j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(k-j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(-k-j)}{n}}\right\} \qquad (2.20)$$

Dari hasil (a) diperoleh :

Jika k ≠ j, maka persamaan (2.20) hasilnya = 0.

Jika k = j, maka persamaan (2.20) akan menjadi :

$$\sum_{t=1}^{n} \cos \omega_j t \sin \omega_k t = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2}\left(e^{\omega_j ti} + e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_k ti} - e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} i \sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti(2k}{n}} - e^{0} + e^{0} - e^{\frac{2\pi ti(-2k)}{n}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4} i \sum_{t=1}^{n}(0 - 1 - 1 + 0) = 0$$

sehingga diperoleh :

$$\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

$$\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_1 t \\ \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_1 t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_{n/2} t \end{bmatrix} \qquad [Z_t] = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_1 t \\ \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_1 t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_{n/2} t \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (2.13) diperoleh :

$$b = \hat{\beta} = [\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t]^{-1} [\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t]$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{n/2} \\ b_{n/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t \qquad (2.22)$$

Dari persamaan (2.22) diperoleh nilai $\hat{\beta}$ yaitu :

$$a_0 = (\sum_{t=1}^{n} cos^2 \omega_0 t)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_0 t \; Z_t$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_0 t$$

$$b_0 = (\sum_{t=1}^{n} sin^2 \omega_0 t)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_0 t \; Z_t$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} sin^2 (\frac{2\pi * 0}{n})\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_0 t$$

$$= (0)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_0 t \qquad \text{(tidak terdefinisi)}$$

$$a_k = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_k t \; Z_t$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_k t, \text{ untuk k = 1, 2,..., } \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$b_k = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_k t \; Z_t$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_k t, \text{ untuk k = 1, 2,..., } \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$a_{\frac{n}{2}} = \left(\sum_{t=1}^{n} cos^2 \omega_{n/2} t\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_{n/2} t$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} cos^2 \left(\frac{2\pi * \frac{n}{2}}{n} t\right)\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_{n/2} t$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} 1\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_{n/2} t = \frac{1}{n} Z_t \cos \omega_{n/2} t$$

$$b_{\frac{n}{2}} = \left(\sum_{t=1}^{n} sin^2 \omega_{n/2} t\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_{n/2} t$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} sin^2 \left(\frac{2\pi + \frac{n}{2}}{n} t\right)\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_{n/2} t$$

$$= (0)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_{n/2} t \qquad \text{(tidak terdefinisi)}$$

Atau dalam bentuk yang lebih sederhana adalah sebagai berikut :

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_k t, \text{untuk } k = 0 \text{ dan } k = n/2 \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_k t, \text{untuk } k = 1,2,\dots,\left(\frac{n-1}{2}\right) \end{cases} \tag{2.23}$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_k t, \text{ untuk } k = 1,2,\dots,\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Jumlah kuadrat kesalahan pada persamaan (2.12) dengan menggunakan estimasi kuadrat terkecil adalah :

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} Z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^{n} Z_t X_t\right]\left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right] \tag{2.24}$$

Jika terdapat banyak variabel bebas dan antarvariabel bebas tersebut tidak berkorelasi atau saling independen , maka residual *OLS* $\hat{e_t} = 0$ sehingga persamaan (2.24) akan menjadi :

$$0 = \sum_{t=1}^{n} Z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^{n} Z_t X_t\right]\left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right]$$

$$\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = \left[\sum_{t=1}^{n} Z_t X_t\right]\left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right] \tag{2.25}$$

Dari persamaan (2.13) diperoleh :

$$b = \hat{\beta} = \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right] = \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]\beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{n/2} \\ b_{n/2} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Substitusikan persamaan (2.26) dan persamaan (2.21) ke persamaan (2.25) sehingga diperoleh :

$$\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = [\sum_{t=1}^{n} Z_t X_t][\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t]^{-1}[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t]$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \beta$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \beta$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & a_1 & b_1 & \dots & a_{n/2} & b_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} na_0 \\ 0 * b_0 \\ \frac{n}{2} a_1 \\ \frac{n}{2} b_1 \\ \vdots \\ na_{n/2} \\ 0 * b_{n/2} \end{bmatrix}$$

$$= na_0^2 + 0 + \frac{n}{2} a_1^2 + \frac{n}{2} b_1^2 + \cdots + \frac{n}{2} a_{(n-1)/2}^2 + \frac{n}{2} b_{(n-1)/2}^2 + na_{n/2}^2 + 0$$

diperoleh :

$$\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = \begin{cases} na_0^2 + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} (a_k^2 + b_k^2), & \text{jika n ganjil} \\ na_0^2 + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} (a_k^2 + b_k^2) + na_{n/2}^2, & \text{jika n genap} \end{cases} \tag{2.27}$$

dengan demikian periodogram didefinisikan sebagai berikut :

$$I(\omega_k) = \begin{cases} na_0^2, & \text{jika } k = 0 \\ \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2), & \text{jika } k = 1,2, \ldots, [(n-1)/2] \\ na_{n/2}^2, & \text{jika } k = \frac{n}{2} \text{ untuk n genap} \end{cases} \tag{2.28}$$

2.8 Klasifikasi Model ARIMA

Model Box-Jenkins (ARIMA) dibagi kedalam tiga kelompok, yaitu model *autoregressive* (AR), *moving average* (MA), dan model campuran (*autoregressive moving average*) yang mempunyai karakteristik dari dua model pertama.

1) Model *Autoregressive* (AR)

   Menurut Montgomery (2008) bentuk umum orde ke-p model *Autoregressive* adalah:

$$x_t = \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

   dengan

   δ : intersep

   x_t : nilai variabel pada waktu ke-t

   ε_t : nilai kesalahan pada waktu ke-t

   ϕ_p : parameter autoregresi ke-p

2) Model *Moving Average* (MA)

   Menurut Montgomery (2008) model *moving average* dengan order q dinotasikan MA (q) didefinisikan sebagai :

$$x_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \; \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$

dengan

x_t : nilai variabel pada waktu ke-t

ε_t : nilai kesalahan pada waktu ke-t

θ_i : parameter *moving average* ke-i, i: 1,2,3, …,q

q : order MA

3) Model Campuran

Terdapat 2 model campuran yaitu :

1) Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA)

Menurut Wei (2006) dalam bentuk umum, model *Autoregressive Moving Average* atau ARMA (p,q) diberikan sebagai :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

dengan

x_t : nilai variabel pada waktu ke-t

ε_t : nilai kesalahan pada waktu t

θ_i : parameter *moving average* ke-i, i: 1,2,3, …,q

ϕ_i : parameter autoregresi ke-i, i: 1,2,3, …,p

2). Model *Autoregresive Integrated Moving Average* (ARIMA)

Menurut Brockwell dan Davis (2002) jika d adalah bilangan bulat nonnegative, maka $\{X_t\}$ dikatakan proses ARIMA jika $Y_t = (1 - B)^d x_t$ merupakan akibat dari proses ARMA. Persamaannya adalah sebagai berikut :

$$(1 - B)^d \phi_p(B) X_t = \theta_q(B) \varepsilon_t$$

dengan

X_t : nilai variabel pada waktu ke-t

$(1-B)^d$: *integrated*

$\phi_p(B)$: parameter autoregresi ke-p

$\theta_q(B)$: parameter *moving average* ke-p

e_t : nilai kesalahan pada waktu ke-t

2.9 Musiman dan Model ARIMA

Data deret waktu sering kali menampilkan perilaku periodik. Sebuah rangkaian periodik memiliki pola yang berulang setiap waktu periode ke s, dimana $s > 1$. Pengalaman menunjukkan bahwa model ARIMA sering menghasilkan perkiraan yang baik dari data periodik. Salah satu jenis yang paling umum dari perilaku periodik adalah variasi musiman dengan s untuk menunjukkan panjang periodisitas.

Model ARIMA untuk waktu musiman dibangun dengan menggunakan prosedur pemodelan berulang yang sama untuk data nonmusiman: identifikasi, estimasi, dan pemeriksaan diagnostik. Dengan data musiman maka harus melakukan diferensi beberapa kali pada observasi dengan panjang s (Pankratz, 1983).

Notasi yang umum untuk model ini adalah :

$$\text{ARIMA } (p,d,q)\ (P,D,Q)^S$$

dengan

(p,d,q) : bagian yang tidak musiman dari model

$(P,D,Q)^S$: bagian musiman dari model

S : jumlah periode per musiman

2.10 Model *Autoregressive Intergrated Moving Average with Exogenous Input* (ARIMAX)

Salah satu model runtun waktu yang dapat dipandang sebagai perluasan model runtun waktu ARIMA atau SARIMA adalah model ARIMAX atau SARIMAX. Model ARIMAX sendiri merupakan model ARIMA dengan variabel eksogen. Dalam model ini faktor-faktor yang mempengaruhi variabel dependen Z pada waktu ke-t dipengaruhi tidak hanya oleh fungsi variabel Z dalam waktu (dalam bentuk model deret waktu tertentu, seperti ARIMA atau SARIMA) tetapi juga oleh variabel-variabel independen lain pada waktu ke –t. Menurut Cools (2009), secara umum, bentuk model ARIMAX (p,d,q) dapat diberikan dengan persamaan sebagai berikut :

$$(1-B)^d\phi_p(B)Y_t = \delta + \theta_q(B)\mathrm{e}_t + \beta_1X_{1,t} + \beta_2X_{2,t} + \cdots + \beta_kX_{k,t} \tag{2.31}$$

Sedangkan untuk persamaan SARIMAX $(p,d,q)(P,D,Q)^s$ diberikan sebagai berikut :

$$(1-B)^d(1-B^s)^D\phi_p(B)\Phi_p(B^s)Y_t = \delta + \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)\mathrm{e}_t + \beta_1X_{1,t} + \beta_2X_{2,t} + \cdots + \beta_kX_{k,t} \tag{2.32}$$

dengan

Y_t : variabel dependen pada waktu ke-t

$X_{k,t}$: variabel eksogen ke-k pada saat t, k = 1,2,...,k

B : operator *backshift*

$\phi_p(B)$: komponen *autoregressive* untuk proses nonmusiman

$\theta_q(B)$: komponen *moving average* untuk proses nonmusiman

$\Phi_P(B^s)$: komponen *autoregressive* untuk proses musiman

$\Theta_Q(B^s)$: komponen *moving average* untuk proses musiman

Dalam model ini Y_t dan $X_{i,t}$,i=1,2,…,k adalah data deret waktu yang diasumsikan stasioner. Jika hanya Y_t yang tidak stasioner (mengandung tren), maka model ARIMAX atau SARIMAX ini dapat digunakan dengan menambahkan komponen model *integrated* (diferens) ke dalam Y_t, sedangkan jika Y_t stasioner tetapi $X_{i,t}$,i=1,2,…,k tidak stasioner maka model tersebut dapat langsung digunakan (Rosadi, 2012).

2.11 Proses Peramalan

Menurut Wei (2006) proses peramalan data deret waktu adalah sebagai berikut :

1. Identifikasi Model

   Langkah-langkah yang dilakukan dalam mengidentifikasi model adalah sebagai berikut :

   a. Plot data deret waktu dan apabila data deret waktu tidak stasioner dalam varians maka dilakukan transformasi Box-Cox.

   b. Menghitung dan memeriksa ACF dan PACF sampel dari deret asli dan bila data deret waktu diindikasikan tidak stasioner dalam rata-rata maka dilakukan proses *differencing*.

c. Menghitung dan memerika ACF dan PACF sampel dari data deret waktu hasil transformasi Box-Cox dan *differencing* untuk mengidentifikasi orde dari model ARIMA (p, d, q).

2. Estimasi Parameter

   Uji signifikansi parameter bertujuan untuk mengetahui parameter tersebut layak digunakan dalam model. Uji signifikansi parameter menggunakan hipotesis sebagai berikut:

   H_0 : $\delta = 0$ (parameter tidak signifikan)

   H_1 : $\delta \neq 0$ (parameter signifikan)

   Statistik uji yang digunakan untuk pengujian signifikansi parameter adalah statistik uji-t persamaannya adalah sebagai berikut :

$$t = \frac{\hat{\delta}}{SE(\hat{\delta})}$$

   Apabila nilai $|t| > t_{\frac{\alpha}{2};n-p}$ atau *p-value* < $\alpha = 0{,}05$ maka dapat diputuskan menolak H_0.

3. Diagnostik Model

   Untuk menguji model yang telah ditetapkan sementara maka perlu dilakukan uji kesesuaian model untuk membuktikan bahwa model tersebut sudah sesuai digunakan untuk memodelkan data deret waktu dan melakukan peramalan. Dalam hal ini, pemeriksaan diagnostik model meliputi uji galat *white noise* dan uji kenormalan.

a. Uji *White Noise*

Untuk mengetahui autokorelasi antar galat sudah mengikuti proses *white noise* atau tidak maka perlu dilakukan pengujian galat *white noise* melalui nilai autokorelasinya dengan menggunakan uji kelayakan model Ljung Box, dengan hipotesis:

H_0 : $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_k = 0$ (tidak terdapat autokorelasi antar galat)

H_1 : minimal ada satu $\rho_k \neq 0$ (terdapat auotokorelasi antar galat)

Statistik uji Ljung Box adalah :

$$q = n(n+2)\sum_{k=1}^{k}(n-k)^{-1}\hat{\rho}_k^2$$

b. Uji Kenormalan

uji ini dapat dilakukan dengan uji Shapiro wilk dengan hipotesis :

H_0 : galat berdistribusi normal

H_1 : galat tidak berdistribusi normal

Statistik uji Shapiro Wilk yaitu :

$$W = \frac{1}{D}\left[\sum_{i=1}^{k} a_i(x_{n-i+1} - x_i)\right]$$

Kriteria pengambilan keputusan adalah jika :

p-value $< \alpha = 0{,}05$ maka tolak H_0

p-value $\geq \alpha = 0{,}05$ maka menerima H_0

2.12 Pemilihan Model Terbaik

Menurut Yafee (2000), salah satu pemilihan model terbaik dari beberapa model yang sesuai dapat berdasarkan nilai AIC (*Akaike's Information Criterion*) dan SBC (*Schwarz Bayesian Criteria*), rumus AIC dan SBC adalah sebagai berikut:

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L})$$

$$SBC = \ln(n)k - 2\ln(\hat{L})$$

dengan

$\hat{L}$: estimasi likelihood maksimal dari model

k : jumlah parameter yang diduga

n : jumlah pengamatan

Nilai minimum pada AIC dan SBC mengindikasikan model terbaik.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018. Bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data inflasi Indonesia (%) dan tingkat impor barang dan jasa (%) Indonesia tahun 1966 sampai tahun 2016 yang diperoleh dari *World Bank* melalui situs data.worldbank.org.

Tabel 3.1 Data Inflasi (%) dan Impor Barang dan Jasa (%) Indonesia.

Tahun	Inflasi (%)	Impor (%)	Tahun	Inflasi (%)	Impor (%)
1966	2,725	20,752	1992	7,289	25,419
1967	164,722	15,842	1993	19,153	22,324
1968	122,973	14,63	1994	7,777	23,824
1969	21,353	13,926	1995	9,882	25,966
1970	14,253	14,875	1996	8,677	24,833
1971	2,725	15,63	1997	12,571	26,424
1972	16,12	17,747	1998	75,271	40,591
1973	36,878	18,296	1999	14,161	25,762
1974	47,31	20,118	2000	20,447	28,608

Tabel 3.1 Lanjutan.

Tahun	Inflasi (%)	Impor (%)	Tahun	Inflasi (%)	Impor (%)
1975	12,468	20,638	2001	14,296	28,891
1976	14,457	19,566	2002	5,896	24,787
1977	13,012	18,859	2003	5,487	21,732
1978	12,065	19,58	2004	8,551	25,87
1979	31,187	22,156	2005	14,332	28,102
1980	29,145	20,832	2006	14,087	24,065
1981	10,151	23,994	2007	11,259	23,85
1982	7,951	24,699	2008	18,15	27,005
1983	18,613	27,062	2009	8,275	20,055
1984	10,422	20,096	2010	15,264	22,402
1985	6,191	19,67	2011	7,466	23,853
1986	2,254	19,267	2012	3,754	24,989
1987	16,004	21,036	2013	4,966	24,714
1988	7,629	20,602	2014	5,443	24,414
1989	9,485	21,685	2015	4,029	20,722
1990	9,094	24,463	2016	2,45	18,306
1991	8,767	25,344			

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literatur secara sistematis yang diperoleh dari buku-buku penunjang maupun media lain untuk mendapatkan informasi sebanyak mungkin kemudian melakukan simulasi sebagai aplikasi untuk menjelaskan teori yang telah didapat menggunakan *software* SAS dan R. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

3.3.1 Analisis Spektral

Adapun langkah-langkah untuk melakukan analisis spektral terhadap data inflasi adalah sebagai berikut:

1. Memeriksa kestasioneran data inflasi menggunakan uji akar unit *Augmented Dickey Fuller* (ADF). Jika data inflasi tidak stasioner maka melakukan pembeda terhadap data inflasi, dan kembali menguji data hasil pembeda menggunakan uji *Augmented Dickey Fuller* (ADF).
2. Setelah diperoleh data inflasi yang stasioner, maka selanjutnya melakukan analisis spektral untuk menentukan periode dari data inflasi yang diperoleh dari periodogramnnya.

2.3.2 Pemodelan ARIMAX

Jika dalam analisis spektral terbukti bahwa data inflasi memiliki komponen periodik, maka model yang digunakan adalah SARIMAX, tetapi jika data inflasi tidak terbukti memiliki komponen periodik maka model yang digunakan adalah model ARIMAX. Pada pemodelan ini variabel eksogen yang digunakan adalah data impor. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi kestasioneran data inflasi menggunakan uji akar unit *Augmented Dickey Fuller* (ADF).
2. Menentukan orde *Autoregressive* (AR) dan *Moving Average* (MA) dengan melihat plot ACF dan PACF.
3. Menguji signifikansi parameter dari model ARIMAX yang terbentuk, menggunakan statistik uji-t.
4. Melakukan diagnostik model yang meliputi :
   a. Uji *white noise* menggunakan uji Ljung Box.
   b. Uji normalitas menggunakan uji Shapiro Wilk.

5. Menentukan model terbaik menggunakan kriteria AIC dan SBC dengan pengambilan keputusan didasarkan pada nilai AIC dan SBC minimum pada model.
6. Menarik Kesimpulan

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini dapat diambil kesimpulan yaitu:

1. Dari analisis spektral menunjukkan bahwa inflasi Indonesia memiliki periode selama 6 tahun yang artinya perubahan inflasi di Indonesia cenderung akan mengalami kenaikan atau penurunan inflasi setiap 6 tahun sekali.
2. Model terbaik dari data inflasi dengan penambahan variabel impor sebagai variabel eksogen adalah ARIMAX $(1,0,1)(1,0,0)^6$. Dengan bentuk matematis dituliskan sebagai berikut:

$$-0{,}4609(B)0{,}3122(B^6)Y_t = -57{,}3954 + 1{,}1508(B)e_t + 2{,}8773X_1 + e_t$$

atau

$$Y_t = -57{,}3954 + \frac{1{,}1508(B)e_t}{-0{,}4609(B)0{,}3122(B^6)} + 2{,}8773X_1 + e_t$$

DAFTAR PUSTAKA

Bloomfield, P. 2000. *Fourier Analysis of Time Series*. Ed ke-2. A Wiley Interscience Publication, New York.

Brockwell and Davis. 2002. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Ed. ke-2. Springer, New York.

Chatfield, C. 1996. *The Analysis of Time Series:An Introduction.* Ed. ke- 4. Chapman and Hall, New York.

Cools, M.M., Elke, and Wets. 2009. *Investigating The Variability in Daily Traffic Counts Using ARIMAX and SARIMA(X) Models: Assessing Impact of Holidays on Two Divergent Site Locations*. Hasselt University, Belgia.

Cryer, J.D. 1986. *Time Series Analysis*. Duxbury Press, Boston.

Dickey and Fuller. 1979. Distribution of the Estimator for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*. **74**: 427-431.

Harahap, M.R. dan Suharsono, A. 2014. Analisis Peramalan Penjualan Sepeda Motor di Kabupaten Ngawi dengan Arima dan Arimax. *Jurnal Sains dan seni POMITS*. **3**(2) : 122-126.

Kongchareon, C. and Kruangpradit, T. 2013. Autoregressive Integrated Moving Average with Explanatory Variable (ARIMAX) Model for Thailand Export. *Paper of the 33rd International Symposium on Forecasting.*

Makridakis, S., Wheelwright, S.C., and McGee,V.E. 1999. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Erlangga, Jakarta.

Montgomery, D.C., Jennings, C.L., and Kulahci, M. 2008. *Introduction Time Series Analysis and Forecasting*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Pankartz, A. 1983. *Forecasting With Univariate Box-Jenkins Model;Concept and Cases*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Pankartz, A. 1991. *Forecasting With Dynamic Regression Models*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Rosadi, D. 2012. *Analisis Ekonometrika dan Runtun Waktu Terapan dengan R.* CV. Andi, Yogyakarta.

Rusdi. 2011. Uji Akar-Akar Unit dalam Model Runtun Waktu Autoregresif. *Jurnal Pendidikan Matematika STAIN*. **11**(2): 67-78.

Wei, W.W. 2006. *Time Series Analysis:Univariate and Multivariate Methods*. Addison-Wesley Publishing Company, New York.

World, B. 2017. Data. https://data.worldbank.org/indicator. Diakses pada 3 Januari 2018.

Yafee, R. 2000. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting with Aplication of SAS and SPSS.* Academic Press, Inc., New York.