MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-*n* NON HOMOGEN DENGAN FUNGSI GREEN

(Skripsi)

Oleh

FATHURROHMAN AL AYUBI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

RESOLVING nth-ORDER NON HOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH GREEN FUNCTION

By

FATHURROHMAN AL AYUBI

This research will present how to solve nth-order non homogeneous linear differential equation by using green function through Laplace transformation. The general solution of nth-order non homogeneous linear differential equation includes homogeneous solution and non homogeneous solution. Non homogeneous solution is also known as particular solution. From the particular solution, here after it could be solved by using green function through Laplace transformation. Based on this research, we later obtained that nth-order non homogeneous linear differential equation can be solved using green function through Laplace transformation. The general solution obtained was:

$$y(x) = y_h(x) + \int_0^x f(t).w(x-t)dt$$

Keywords: nth-order non homogeneous linear differential equation, green function, laplace transformation

ABSTRAK

MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-*n* NON HOMOGEN DENGAN FUNGSI GREEN

Oleh

FATHURROHMAN AL AYUBI

Dalam penelitian ini akan disajikan bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan fungsi Green melalui transformasi Laplace. Solusi umum dari persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen terdiri dari solusi homogen dan solusi non homogen. Solusi non homogen sering juga disebut solusi partikulir. Selanjutnya dari solusi partikulir ini dapat diselesaikan dengan fungsi Green melalui transformasi Laplace. Berdasarkan hasil penelitian ini, didapat bahwa persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dapat diselesaikan dengan fungsi Green melalui transformasi Laplace. Solusi umum yang diperoleh yaitu:

$$y(x) = y_h(x) + \int_0^x f(t).w(x-t)dt$$

Kata Kunci: persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen, fungsi green, transformasi laplace

MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-*n* NON HOMOGEN DENGAN FUNGSI GREEN

Oleh

FATHURROHMAN AL AYUBI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-*n* NON HOMOGEN DENGAN FUNGSI GREEN**

Nama Mahasiswa : *Fathurrohman Al Ayubi*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031048

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dra. Dorrah Azis, M.Si.
NIP. 19610128 198811 2 001

Dr. Muslim Ansori, M.Si.
NIP. 19720227 199802 1 001

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Lampung

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M. Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Muslim Ansori, M. Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M. Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **11 April 2018**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Fathurrohman Al Ayubi
Nomor Induk Mahasiswa	: 1417031048
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear Orde-n Non Homogen Dengan Fungsi Green" adalah hasil karya saya sendiri. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 11 April 2018

Penulis,

Fathurrohman Al Ayubi

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Fathurrohman Al Ayubi, dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 26 Agustus 1996 dan merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Kamali dan Ibu Mursini.

Penulis menempuh pendidikan di TK Yuridhesma Sari pada tahun 2001 lalu Sekolah Dasar Negeri 01 Marga Jaya pada tahun 2002-2008, pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 1 Meraksa Aji pada tahun 2008-2011, dan pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Meraksa Aji pada tahun 2011-2014. Pada tahun 2014 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung Bandar Lampung melalui jalur SNMPTN.

Pada bulan Januari–Februari 2017 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Tulang Bawang Barat dan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Kiluan Negeri, Kecamatan Kelumbayan, Kabupaten Tanggamus pada bulan Juli-Agustus 2017.

KATA INSPIRASI

"Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan?"

(QS. Ar-Rahman : 13)

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(Q.S. Al – Baqarah : 286)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Asy-Syarh : 5)

"Jangan biarkan kesulitan membuatmu gelisah, karena bagaimanapun juga hanya di malam yang paling gelaplah bintang-bintang tampak bersinar lebih terang."

(Ali bin Abi Thalib)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala hidayah dan karunia-Nya.

Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Dengan kerendahan hati dan rasa syukur, kupersembahkan sebuah karya kecil ini sebagai tanda cinta dan sayangku kepada :

Ayah dan Ibu tercinta yang telah membesarkanku dengan penuh kasih sayang, pengorbanan, dan kesabaran. Terima kasih atas setiap tetes keringat dan doa dari ayah dan ibu untuk kebahagiaan dan keberhasilan putra kalian ini.

Adikku Tasya atas doa, semangat dan dukungan yang selalu diberikan.

Bapak/Ibu dosen, Bapak/Ibu guru, Sahabat, Teman-temanku yang telah banyak membantu dalam perjalananku sampai disini dan Alrmarhumah Keke Buana Tisanayu atas doa dan dukungannya serta almamater yang aku banggakan Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena atas limpahan rahmat, hidayah, serta kasih sayang-Nya Penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear Orde-n Non Homogen Dengan Fungsi Green" ini. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dukungan berbagai pihak. Sehingga dengan segala kerendahan dan ketulusan hati Penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan serta saran dan kesediaan waktu selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan serta saran selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah banyak membantu dalam mengevaluasi serta mengarahkan penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Ayah, Ibu, Tasya, Almarhumah Keke dan keluarga besar penulis yang senantiasa selalu mendukung, mendo'akan serta memberi semangat kepada penulis.
8. Sahabat canda tawa Fadhil, Raka, Ardi, Arisca, Kodir, Zhofar, Alvin, Kiki, Aldo, Zulfikar, Adit, Agus, Arif, Dracjat, Ncek, Redi, Fajar, Ayub, Rahmat, dan Rois yang telah melakukan banyak hal dari awal perkuliahan hingga skripsi ini berhasil terbuat.
9. Teman sekamar selama 40 hari Andri Sepriyawan serta teman-teman KKN lainnya.
10. Teman-teman seperjuangan seluruh Keluarga Matematika 2014, terimakasih atas kebersamaannya selama ini.
11. Kak Rofi'I, Kak Suprayitno, dan Kak Luthfi yang telah membimbing dan mengarahkan penulis menjadi pribadi yang lebih baik.
12. Alamamater Universitas Lampung dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu namanya.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun.

Bandar Lampung, 11 April 2018
Penulis

Fathurrohman Al Ayubi

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika adalah salah satu ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan lainnya. Matematika mempunyai peranan penting untuk ilmu pengetahuan lain seperti kimia, biologi, fisika, ekonomi, dan lain-lain. Salah satu ilmu matematika yang mempunyai peranan penting dengan ilmu pengetahuan lainnya adalah persamaan diferensial.

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang berkaitan dengan turunan suatu fungsi atau memuat suku-suku dari fungsi tersebut dan turunannya. Menurut peubah bebasnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa (satu variabel) dan persamaan diferensial parsial (dua atau lebih variabel). Persamaan diferensial biasa dapat dibagi menurut kelinieran, orde, dan koefisiennya. Persamaan diferensial yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan.

Persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan sering kali diselesaikan dengan beberapa metode penyelesaian, antara lain: metode koefisien tak tentu, metode invers operator, dan lain-lain. Selain metode-metode tersebut masih ada cara lain untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan, yaitu dengan metode fungsi Green.

Fungsi Green dikembangkan oleh matematikawan Inggris, George Green pada tahun 1830. Metode fungsi Green adalah metode penyelesaian yang dalam proses menemukan penyelesaian suatu persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan, terlebih dahulu ditentukan nilai fungsi Green dari suatu persamaan diferensial tersebut. Nilai fungsi Green dapat ditemukan dengan menggunakan transformasi Fourier, transformasi Laplace, dan variasi parameter.

Berdasarkan latar belakang di atas, pada penelitian ini digunakan metode fungsi Green dalam penyelesaian suatu persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan melalui transformasi Laplace. Keunggulan dari metode transformasi Laplace adalah masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan dapat diselesaikan secara langsung tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogennya.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui cara menyelesaikan persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan menggunakan metode fungsi Green melalui transformasi Laplace.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini diantaranya:

1. Sebagai salah satu cara pemecahan masalah pada jenis persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen dengan koefisien konstan.
2. Dapat dijadikan referensi untuk penelitian selanjutnya dengan persamaan diferensial yang lain.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Linear Orde-*n*

Definisi 2.1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan diantara derivatif-derivatif yang dispesifikasikan pada suatu fungsi yang tidak diketahui nilainya, dan diketahui jumlah serta fungsinya (Birkhoff, 1978).

Contoh :

1. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + xy\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$
2. $\frac{\partial v}{\partial s} + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) = v$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Definisi 2.2. Persamaan Diferensial Linear

Suatu persamaan diferensial dalam bentuk standar

$$y' = f(x,y) \tag{2.1}$$

Jika $f(x,y)$ dapat ditulis sebagai $f(x,y) = -p(x) + q(x)$, persamaan diferensial tersebut adalah berbentuk linear yang berbentuk

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.2}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Definisi 2.3. Orde dan Degree

Suatu persamaan diferensial biasa orde-*n* adalah persamaan berbentuk:

$F\ (x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ yang menyatakan hubungan antara peubah bebas x, peubah tak bebas $y(x)$ dan turunannya yaitu $x, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke-*n*, maka persamaan diferensial tersebut orde (tingkat) ke-*n*. Jika turunan tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajad *k*maka persamaan diferensial tersebut mempunyai derajat *k* (Kartono, 2000).

Definisi 2.4. Persamaan Diferensial Linear Orde-*n*

Suatu persamaan diferensial linear orde-*n* adalah persamaan yang berbentuk:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad (2.3)$$

di mana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dan $g(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang *I*, serta $a_n \neq 0$ untuk setiap $x \epsilon I$. Selang *I* disebut selang definisi (selang asal) dari persamaan diferensial itu. Jika fungsi $g(x) = 0$, maka persamaan (2.3) homogen. Jika $g(x) \neq 0$, persamaan (2.3) disebut non homogen. Bila semua koefisien $a_n(x),\ a_{n-1}(x), \ldots, a_0$ adalah tetap persamaan (2.3) dikatakan persamaan diferensial dengan koefisien konstan (Finizio dan Ladas, 1998).

Definisi 2.5. Persamaan Diferensial Linear Orde-*n* Non Homogen

Bentuk umum dari persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen yaitu:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad (2.4)$$

di mana $a_i(x)(i = 0, 1, \dots, n-1, n)$ konstan, $g(x) \neq 0$, dan semua nilai dari $y, y', \dots, y^{n-1}$, dan y^n dengan selang $x > 0$ dan $\frac{f(x)}{a_n(x)} = \emptyset(x)$ (Bronson dan Costa, 2007).

Solusi umum $y(x)$ untuk persamaan diferensial non homogen dapat diperolehkan apabila solusi homogen $y_h(x)$ dari persamaan diferensial homogennya diketahui. Kemudian $y(x)$ dibentuk dengan penambahan $y_h(x)$ sebagai solusi persamaan diferensial homogen dan $y_p(x)$ sebagai solusi partikulernya (persamaan diferensial non homogen).

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{2.5}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

2.2 Fungsi Green

Definisi 2.6. Fungsi

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek X dalam satu himpunan yang disebut daerah asal dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (Purcelll, Varbeg, dan Ringdon, 2004).

Definisi 2.7. Diferensial

Misalkan $y = f(x)$ terdiferensiasi dari peubah bebas x dan y misalkan bahwa dx dan dy maka $\Delta(x)$ adalah kenaikan sebarang peubah acak $x. dx$ yang disebut diferensial peubah acak x dan $\Delta y(x)$ adalah perubahan aktual dalam peubah y

sewaktu x berubah daari x ke $x + \Delta(x)$ yaitu $\Delta(y) = f\big(x + \Delta(x) - f(x)\big)$. Dy disebut diferensial peubah tak bebas y yang didefinisikan oleh $dy = f'(x)dx$ (Purcelll, Varbeg, dan Ringdon, 2004).

Definisi 2.8. Turunan

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang bilangan c yaitu:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \tag{2.6}$$

asalkan limit ada (Purcelll, Varbeg, dan Ringdon, 2004).

Definisi 2.9. Integral

F suatu anti turunan dari f pada selang I jika $D_x F(x) = f(x)$ pada I yakni jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I (Purcelll, Varbeg, dan Ringdon, 2004).

Definisi 2.10. Fungsi Green

Fungsi Green, $\boldsymbol{G}(x)$ untuk operator-Δdan wilayah batas D (domain D) pada titik $x_0 \in D$ adalah fungsi yang didefinisikan untuk $x \in D$ seperti:

1. $\boldsymbol{G}(x)$memiliki turunan-turunan yang kontinu, kecuali pada titik $x = x_0$ yaitu $\Delta\boldsymbol{G} = 0$
2. $\boldsymbol{G}(x) = 0$ untuk $x = X$
3. Fungsi $\boldsymbol{G}(x)$ terbatas pada x_0 dan mempunyai turunan kontinu dimanapun (Strauss, 1992).

Definisi 2.11. Fungsi Green Persamaan Diferensial

Misalkan

$$\widehat{D}xf(x) = f(t) \tag{2.7}$$

di mana $\widehat{D}x$ adalah operator diferensial. Maka solusi dari

$$\widehat{D}x\boldsymbol{G}(x,t) = \delta(x-t) \tag{2.8}$$

dapat dihitung dengan

$$f(x) = \int \boldsymbol{G}(x,t)f(t)dt \tag{2.9}$$

(Duffy, 1998).

Definisi 2.12. Fungsi Green Persamaan Diferensial Linear Orde-*n*

Fungsi $\boldsymbol{G}(x,t)$ dari persamaan

$$a_n(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{2.10}$$

dikatakan fungsi Green untuk masalah nilai awal persamaan diferensial di atas jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

1. $\boldsymbol{G}(x,t)$ terdefinisi pada daerah $R = I \times I$ dari semua titik (x,t) dengan x dan t terletak pada selang I.
2. $\boldsymbol{G}(x,t)$, $\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n x}{\partial x^n}$, merupakan fungsi kontinu pada $R = I \times I$.
3. Untuk setiap x_0 dalam selang I dan fungsi $f \in C(I)$, fungsi $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)dt$ adalah solusi persamaan diferesial (1) yang memenuhi kondisi awal $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \cdots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$

(Sugiarto, 2002).

2.3 Transformasi Laplace

Definisi 2.13. Transformasi Laplace

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi dari t terdefinisi untuk $t > 0$. Kemudian $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, jika ada dinamakan transformasi suatu fungsi dari s, katakan $F(s)$. Fungsi $F(s)$ ini dinamakan transformasi Laplace dari $f(t)$ dan dinotasikan oleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2.11}$$

Operasi yang baru ditunjukkan yang menghasilkan $F(s)$ dari suatu fungsi $f(t)$ yang diberikan, disebut transformasi Laplace (Kartono, 2002).

Definisi 2.14. Transformasi Laplace Invers

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $f(t)$ dinamakan transformasi Laplace Invers dari $F(s)$ dan dinotasikan dengan $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Kemudian untuk mencari $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ kita harus mencari suatu fungsi dari t yang transformasi Laplacenya adalah $F(s)$ (Kartono, 2002).

Berikut adalah beberapa fungsi $F(s)$ dan transformasi Laplace inversnya $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Tabel 2.1. Transformasi Laplace Invers

No	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{t^n}{n!}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\sin at$
6.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
7.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
8.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

Definisi 2.15. Konvolusi

Konvolusi dari dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah

$$f(x).\,g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \tag{2.12}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Teorema 2.1. Konvolusi

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ dan $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, maka

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)dt = F(s)G(s)\right\} \tag{2.13}$$

Jika $\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = F(s)$ dan $\mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} = G(s)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \mathcal{L}\{\int_0^x f(u)g(t-u)dt\} \tag{2.14}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Bukti:

Diketahui:

$F(s) = \int_0^\infty e^{-su}f(u)du$ dan $G(s) = \int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv$

Maka

$$F(s).\,G(s) = \int_0^\infty e^{-su}f(u)du\,.\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv$$

$$F(s).\,G(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)}f(u)\,g(v)dudv$$

Misal: $u + v = t\,; v = t - u$

$$F(s).\,G(s) = \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-st}f(u)\,g(t-u)dudt$$

$$F(s).\,G(s) = \int_{t=0}^\infty e^{-st}\left[\int_{u=0}^t f(u)g(t-u)du\right]dt$$

$$F(s).G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right]$$

$$F(s).G(s) = \int_0^t f(u)g(t-u)du \blacksquare$$

Teorema 2.3. Transformasi Laplace dari Turunan

Transformasi Laplace dari turunan ke-*n* ($n = 1, 2, 3, \ldots$) dari $y(x)$ adalah

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s''Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - sy^{(n-)}(0) - y^{(n-1)}(0) \tag{2.15}$$

Jika kondisi awal untuk $y(x)$ pada $x = 0$ diberikan oleh

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \ldots, y^{n-1}(0) = c_{n-1} \tag{2.16}$$

Maka (2.13) dapat ditulis ulang sebagai

$$\mathcal{L}\left(y''(x)\right) = s''Y(s) - c_0 s^{n-1} - c_1 s^{n-2} - \cdots - c_{n-2}s - c_{n-1} \tag{2.17}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Bukti:

Jika $n = 2$ maka

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)dt$$

Misal:$u = e^{-st}$; $du = -se^{-st}dt$; $dv = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$; $v = \frac{dy}{dt} = y'(t)$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = [e^{-st}.y'(t)]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}.y'(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = [e^{-st}.y'(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y'(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left[\left(e^{-s.\infty}.y'(\infty)\right) - \left(e^{-s.0}.y'(0)\right)\right] + s\int_0^\infty e^{-st}.y'(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left[(0) - \left(e^0.y'(0)\right)\right] + s\int_0^\infty e^{-st}.y'(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -y'(0) + s\int_0^\infty e^{-st}.y'(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -y'(0) + s\int_0^\infty e^{-st}.y'(t)dt$$

Misal: $u = e^{-st}$; $du = -se^{-st}dt$; $dv = \frac{dy(t)}{dt}$; $v = y(t)$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -y'(0) + s\left(\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{dy}{dt}\right)dt\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -y'(0) + s\left([e^{-st}.y(t)]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}.y(t)dt\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -y'(0) + s\left([e^{-st}.y(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}.y(t)dt\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -y'(0) + s\left(\left[\left(e^{-s.\infty}.y(\infty)\right) - \left(e^{-s.0}.y(0)\right)\right] + s\int_0^\infty e^{-st}.y(t)dt\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -y'(0) + s\left(\left[(0) - \left(e^0.y(0)\right)\right] + s\int_0^\infty e^{-st}.y(t)dt\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -y'(0) - s.y(0) + s^2.Y(s) = s^2.Y(s) - s.y(0) - y'(0)$$

Jika kondisi awal untuk $y(x)$ pada $x = 0$ diberikan oleh

$$y(0) = c_0\ ;\ y'(0) = c_1$$

Persamaan menjadi

$$\mathcal{L}\left(y''(x)\right) = s^2.Y(s) - s.c_0 - s.c_1 \blacksquare$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil, tahun ajaran 2017/2018 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini bersifat studi literatur dengan mengkaji jurnal-jurnal dan buku-buku teks yang berkaitan dengan bidang yang teliti. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Transformasi Laplace pada kedua sisi dari persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen, sehingga diperoleh $Y(s)$.
2. Mengambil transformasi Laplace invers untuk memperoleh $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\{Y(s)\}$.
3. Dengan menggunakan teorema Konvolusi, diperoleh solusi umum fungsi Green persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen, akan ditunjukan bahwa fungsi Green $\boldsymbol{G}(x, t)$ untuk persamaan diferensial linear orde-*n* non homogen.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial non homogen orde-*n* dengan koefisien konstandapat dibentuk menjadi fungsi Green dengan menggunakan metode transformasi Laplace
2. Solusi umum dari persamaan diferensial non homogen orde-*n* dengan koefisien konstan adalah:

$$y(x) = y_h(x) + \int_0^x f(t).w(x-t)dt$$

5.2 Saran

Pada penelitian ini, fungsi Green yang dibahas dalam penelitian ini hanyalah fungsi Green dari persamaan diferensial non homogen orde-*n* dengan koefisien konstan, di mana untuk mendapatkan fungsi Green menggunakan metode transformasi Laplace. Untuk itu, diperlukan pengembangan lebih lanjut tentang fungsi Green dan cara mendapatkan fungsi Green. Misalnya mencari fungsi Green dari persamaan diferensial parsial dengan metode transformasi Fourier.

DAFTAR PUSTAKA

Alwi, Wahidah, dkk. 2015. Fungsi Green Yang Dikontruksikan Pada Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde-*n*. *Jurnal MSA*. **3**(1).

Birkhoff, G. dan Rota. 1978. *Ordinary Diferential Equation*. John Wiley and Sons Inc., USA.

Bronson, R. dan Costa, G. 2003. *Persamaan Diferensial*. Erlangga, Jakarta.

Djauhari, Eddy. 2015. Membangun Fungsi Green Dari Persamaan Linear Non Homogen Tingkat-*n*. *Jurnal Matematika Integratif*. **1**(2).

Duffy, D.F. 1998. *Green's Functions With Aplications*. CRC Press, USA.

Fininzio, N. dan Ladas, G. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern*. Penerjemah Widiarti. ITB, Bandung.

Kartono. 2002. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Andi Offset, Yogyakarta.

Purcell, dkk. 2004. *Kalkulus Dan Ilmu Ukur Analitik*. Jilid 1, Edisi Kelima. Penerjemah Susila, I Nyoman Kartasasmita, dkk. Erlangga, Jakarta.

Strauss, W.A. 1992. *Partial Diferential Equation And Introduction*. John Wiley And Sons Inc., Canada.