METODE PREDIKSI TAK BIAS LINIER TERBAIK EMPIRIS SPASIAL PADA *SMALL AREA ESTIMATION* MENGGUNAKAN MATRIKS TIPE *BISHOP CONTIGUITY*

Skripsi

Oleh

CHATERINE PRATAMI PUTRI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

METODE PREDIKSI TAK BIAS LINIER TERBAIK EMPIRIS SPASIAL PADA *SMALL AREA ESTIMATION* MENGGUNAKAN MATRIKS *BISHOP CONTIGUITY*

Oleh

Chaterine Pratami Putri

Pendugaan secara tidak langsung adalah pendugaan parameter yang menggunakan informasi tambahan mengenai parameter yang sama pada area kecil. Gabungan asumsi-asumsi dasar dari pengaruh acak dan pengaruh tetap tersebut membentuk model pengaruh campuran. Teknik penyelesaian model linier campuran dengan melakukan pendugaan komponen ragam dengan *Maximum Likelihood* (ML) dan *Maximum Likelihood* Terkendala disebut dengan model *Restricted Maximum Likelihood* (REML). Pada penelitian ini, data yang digunakan adalah data kontinu dengan memperhatikan pengaruh acak yang berkorelasi spasial. Pendugaan parameter dilakukan dengan metode SEBLUP dengan menggunakan matriks hubungan ketetanggaan sudut yaitu matriks *Bishop Contiguity*. Nilai dugaan yang dihasilkan bernilai positif baik dengan metode ML maupun REML. Berdasarkan kriteria MSE, metode SEBLUP REML lebih akurat dibandingkan dengan penduga langsung dan metode ML.

Kata Kunci : SEBLUP, *Bishop Contiguity*, Penduga *Maximum Likelihood* (ML), Penduga *Restricted Maximum Likelihood* (REML).

ABSTRACT

SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTOR METHOD OF SMALL AREA ESTIMATION USING BISHOP CONTIGUITY MATRIX

By

Chaterine Pratami Putri

Indirect approximation is an estimation parameter that uses additional information on the same parameters in a small area. The combination of basic assumptions from these random effects and fixed effects forms a mixed influence model. The technique for solving linear mixed model by making prediction of variety component with Maximum Likelihood (ML) method and Constrained Maximum Likelihood is called as Restricted Maximum Likelihood (REML) model. In this research, the data used are continuous data with respect to the random effects on spatial correlation. The parameter estimation is done by using SEBLUP method by using angle neighborhood matrix which is Bishop Contiguity matrix. The value of the resulting allegedly positive value both with the ML method and REML. Based on MSE criteria, REML SEBLUP method is more accurate than direct estimator and ML method.

Keyword : *SEBLUP, Bishop Contiguity, Maximum Likelihood (ML), Restricted Maximum Likelihood (REML).*

METODE PREDIKSI TAK BIAS LINIER TERBAIK EMPIRIS SPASIAL PADA *SMALL AREA ESTIMATION* MENGGUNAKAN MATRIKS TIPE *BISHOP CONTIGUITY*

Oleh

CHATERINE PRATAMI PUTRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi	:	**METODE PREDIKSI TAK BIAS LINIER TERBAIK EMPIRIS SPASIAL PADA *SMALL AREA ESTIMATION* MENGGUNAKAN MATRIKS *BISHOP CONTIGUITY***
Nama Mahasiswa	:	*Chaterine Pratami Putri*
No. Pokok Mahasiswa	:	1317031018
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.	**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP 19800502 200501 2 003	NIP 19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.** .....

Sekretaris : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Eri Setiawan, M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **23 Februari 2018**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"**Metode Prediksi Tak Bias Linier Terbaik Empiris Spasial Pada *Small Area Estimation* Menggunakan Matriks *Bishop Contiguity* **"**adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 28 Februari 2018
Yang menyatakan

Chaterine Pratami Putri
NPM. 1317031018

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 14 November 1995, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara, dari Bapak Drs. Eddy Wilson dan Ibu Sutri Sukmawati.

Penulis memulai pendidikan di Taman Kanak-kanak (TK) Shandy Putra Telkom tahun 2000, Sekolah Dasar (SD) di SDN 2 Rawalaut pada tahun 2001, Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMPN 12 Bandar Lampung pada tahun 2007, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMAN 1 Bandar Lampung pada tahun 2010.Tahun 2013, penulis terdaftar sebagai mahasiswi Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SNMPTN.

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif berorganisasi di berbagai organisasi seperti Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA UNILA 2013/2014 sebagai anggota bidang eksternal dan BEM U KBM UNILA 2014/2015 sebagai staff kementrian dalam negeri.Penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) Periode I di DesaLabuhan Baru, Kecamatan Way Serdang, Kabupaten Mesuji, Provinsi Lampung serta Kuliah Praktik di Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung pada periode bulan Juli-Agustus 2016 dan diberikan kesempatan untuk ikut berpartisipasi sebagai operator dalam kegiatan pengolahan sensus ekonomi 2016.

Motto

"Berangkat dengan penuh keyakinan. Berjalan dengan penuh keikhlasan. Istiqomah dalam menghadapi cobaan. YAKIN, IKHLAS, dan ISTIQOMAH"
(Mario Teguh)

"Jalani saja. Semua yang ada pada dirimu kamulah yang paling paham. Orang lain mungkin bisa menilai sesuai kapasitas pemahaman mereka. Tapi tidak paham apa yang kau rasa"
(Penulis)

"Musuh yang paling berbahaya di atas dunia ini adalah penakut dan bimbang. Teman yang paling setia, hanyalah keberanian dan keyakinan yang teguh"
(Anonim)

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan) kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain"
(Q.S.Al Insyiroh 6-7)

"Barang siapa memberi kemudahan kepada orang yang berada dalam kesulitan maka ALLAH akan memberikan kemudahan di dunia maupun di akhirat baginya "
(HR. Muslim)

SANWACANA

Puji syukur Penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas karunia serta rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Metode Prediksi Tak Bias Linier Terbaik Empiris Spasial Pada *Small Area Estimation* Menggunakan Matriks *Bishop Contiguity*". Selesainya penulisan skripsi ini adalah berkat motivasi, pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Dengan segala kerendahan dan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Ibu Widiarti, S.Si.,M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan, bantuan, nasehat, motivasi dan kesediaan waktu selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dra.Wamiliana M.A., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung sekaligus dosen Pembimbing II dan pembimbing akademik, terima kasih atas arahan, motivasi,dan bantuannya selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Eri Setiawan., M.Si. selaku Penguji Utama, terima kasih atas kesediaan untuk menguji, saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.

5. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Kedua orang tua penulis Ayahanda Drs. Eddy Wilson Ibunda Sutri Sukmawati serta a
7. dik-adik (Iqbal dan Fadhila) dan Bikwo Maidewi terima kasih atas do'a, nasehat, dukungan, dan motivasi yang tak terduga selama ini..
8. M. Faisal Ali S.Pd atas kesediaan waktu dan menjadi *moodbooster* penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat seperjuangan Matematika 2013, Septi, Tika, Dian, Evi dan Imel atas bantuan, semangat dan rasa kekeluargaan sampai saat ini.
10. Sahabat semasa sekolah Miendira, Anisa, Rima, Putri, Ayu dan Tanti yang selalu memberikan canda tawa dan semangat sampai saat ini.
11. Saudara tak sedarah Kementerian Dalam Negeri, Badan Eksekutif Mahasiswa Universitas Lampung periode 2014/2015 Septi, Ria, Nandha, Jeany, Dimas, Raffi, Sedy, Kak Doko dan Mbak Andar.
12. Teman-teman satu atap Kuliah Kerja Nyata (KKN) Periode I yang tak terlupakan, Ayu, Aan, Fadhli, Ais, Parasian dan Yudhi atas kebersamaanya selama 60 hari di desa Labuhan Baru, Mesuji.
13. Almamater tercinta Universitas Lampung.
14. Semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Bandar Lampung, 23 Februari 2018
Penulis

Chaterine Pratami Putri

/

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1.Latar Belakang dan Masalah 1

1.2.Tujuan Penelitian..... 3

1.3.Manfaat Penelitian..... 3

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. *Small Area Estimation* 4

2.2. Analisis Data Spasial 6

2.3. Matriks Pembobot Spasial 7

2.3.1. *Rook Contiguity*..... 7

2.3.2. Bishop Contiguity……..... 8

2.3.3. *Queen Contiguity*..... 9

2.4. Prediksi Tak Bias Linier Terbaik Empiris 10

2.5. Prediksi Tak Bias Linier Terbaik Empiris Spasial..... 11

2.6. *Maximum Likelihood Estimation (ML)* dan *Restricted Maximum Likelihood* (REML)..... 17

2.7. Generalisasi Kuadrat Terkecil (*Generalized Least Square*)..... 18

III. METODE PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian 20

3.2. Data Penelitian 20

3.3. MetodePenelitian..... 22

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. *Small Area Estimation* dengan metode SEBLUP 24

4.2. Pendugaan MSE 30

V. KESIMPULAN

5.1.Kesimpulan..... 33

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

3.1 Jumlah Keluarga Prasejahtera se-Kecamatan Kota Bandar Lampung Tahun 2015 21
4.1 Nilai Dugaan Koefisien Regresi, Ragams Peubah Acak Area (σ_u^2) dan Koefisien Autoregresif Spasial ($\hat{\rho}$) Metode SEBLUP ML dan REML 30
4.2 Nilai MSE Metode Penduga Langsung 31
4.3 Nilai MSE dengan Metode Penduga Langsung, ML dan REML 32

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Small area estimation (SAE) adalah teknik statistika yang digunakan untuk menduga parameter subpopulasi dengan ukuran sampel yang kecil. Pada metode SAE, informasi yang digunakan bukan hanya berasal dari area itu tetapi juga memanfaatkan informasi tambahan dari area kecil lain yang memiliki karakteristik serupa dengan area kecil tersebut, atau nilai pada waktu yang lalu, juga nilai peubah yang memiliki hubungan dengan peubah yang sedang diamati (Rao, 2003).

Model area kecil mengasumsikan bahwa pengaruh acak galat area saling bebas. Namun dalam beberapa kasus, asumsi ini sering dilanggar. Penyebabnya adalah keragaman suatu area dipengaruhi area sekitarnya, sehingga pengaruh spasial dapat dimasukkan ke dalam pengaruh acak. Pengaruh spasial merupakan hal yang lazim terjadi antara satu area dengan area yang lain, ini berarti bahwa area yang satu mempengaruhi area lainnya (Petrucci dan Salvati, 2004).

Ada dua asumsi dasar dalam mengembangkan model untuk SAE, yaitu bahwa keragaman didalam area kecil dapat diterangkan oleh hubungan keragaman yang ada pada informasi tambahan sebagai pengaruh tetap. Asumsi lainnya adalah

bahwa keragaman khusus area kecil tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan dan merupakan pengaruh acak area kecil. Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model linier campuran *(mixed models).*

Salah satu sifat menarik dari model linier campuran adalah kemampuannya dalam menduga kombinasi linier dari pengaruh tetap dan pengaruh acak. Henderson (1953, 1975) mengembangkan teknik penyelesaian model linier campuran, yaitu metode prediksi tak bias linier terbaik (*best linier unbiased prediction*, BLUP). Pada metode ini terlebih dahulu dilakukan pendugaan komponen ragam dengan metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*) dan kemungkinan maksimum terkendala (*restricted maximum likelihood*), sehingga disebut prediksi tak bias linier terbaik empiris (*Empirical Best Linear Unbiased Prediction*, EBLUP) (Henderson,1975).

Pada perkembangannya pendekatan EBLUP dikembangkan dengan memasukkan pengaruh spasial ke dalam model. Penduga BLUP dengan memperhatikan pengaruh acak area yang berkorelasi spasial dikenal dengan istilah penduga Spasial BLUP (*Spatial empirical best linear unbiased prediction*).Penduga SEBLUP memasukkan matriks pembobot spasial tetangga terdekat (*nearest neighbors*) ke dalam model EBLUP.

Kedekatan hubungan antara wilayah satu dengan wilayah lain pada data spasial dapat dilihat melalui matriks pembobot spasial.Matriks pembobot spasial digunakan untuk menentukan bobot antar lokasi yang diamati berdasarkan hubungan ketetanggaan antar lokasi. Jenis-jenis matriks pembobot spasial antara

lain persinggungan sisi (*rook contiguity*), persinggungan sudut (*bishop contiguity*), persinggungan sisi-sudut (*queen contiguity*). Data yang diambil dalam penelitian ini adalah data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015 yang diambil dari BKKBN Provinsi Lampung. Penelitian ini menerapkan metode SEBLUP dengan matriks *bishopcontiguity* sebagai matriks pembobot dalam menentukan bobot antar lokasi.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan metode *SEBLUP* pada data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015 dengan menggunakan matriks tipe *Bishop Contiguity.*

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui ada tidaknya pengaruh spasial pada suatu area kecil.
2. Membandingkan keakuratan data berdasarkan nilai MSE (*Mean Square Error*) pada metode penduga langsung, metode ML (*Maximum Likelihood*) dan REML (*Restricted Maximum Likelihood*).

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Small Area Estimation*

Suatu area dikatakan kecil jika ukuran contoh dalam domain tersebut tidak cukup memadai untuk mendukung ketelitian penduga langsung (Rao, 2003). Area kecil biasanya digunakan untuk mendefinisikan area geografi yang kecil atau domain yang memiliki ukuran contoh sangat kecil. Namun, ketika penduga langsung tersebut digunakan untuk suatu area yang kecil, maka akan menimbulkan galat baku yang besar (Ghosh dan Rao, 1994). Selain itu, pendugaan langsung tidak dapat dilakukan pada area yang tidak terpilih sebagai contoh, karena tidak adanya data yang dapat digunakan untuk melakukan pendugaan.

Pendugaan parameter dan inferensinya yang menggunakan informasi tambahan mengenai parameter yang sama pada area kecil lain yang memiliki karakteristik serupa, atau nilai pada waktu yang lalu, atau nilai dari peubah yang memiliki hubungan dengan peubah yang sedang diamati tersebut dinamakan pendugaan tidak langsung (*indirect estimation*). Metode ini secara statistik memiliki sifat meminjam kekuatan (*borrowing strength*) dari informasi mengenai hubungan antara peubah yang diamati dengan informasi yang ditambahkan, sehingga mengefektifkan jumlah contoh yang kecil. Penambahan informasi mengenai parameter adalah salah satu penanganan masalah galat baku pada pendugaan area

kecil. Sebaliknya, pendugaan langsung pada area kecil akan menghasilkan varians yang besar dan tidak dirancang untuk skala kecil.

Asumsi dasar dalam pengembangan model untuk SAE adalah bahwa keragaman di dalam area kecil peubah yang sedang diamati dapat diterangkan oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tembahan yang disebut sebagai pengaruh tetap. Asumsi lainnya adalah bahwa keragaman khusus area kecil tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan dan merupakan pengaruh acak area kecil. Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model linier campuran (*mixed models).*

Model pengaruh campuran dalam pendugaan area kecil pertama kali dikembangkan oleh Fay dan Herriot (1979), untuk menduga pendapatan per kapita suatu area kecil berdasarkan data survei Biro Sensus Amerika Serikat (*U.S. Bureau of the Cencus)*. Model Fay-Herriot merupakan model dasar bagi pengembangan pemodelan area kecil, yaitu $\hat{\theta} = \theta_i + e_i$; $\theta_i = J\, x_i^T + v_i$dimana $\hat{\theta}_i$ adalah penduga langsung bagi area ke-*i*, θ_i merupakan parameter yang menjadi perhatian bagi area ke-*i*, β adalah koefisien regresi, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ip})$ adalah peubah penyerta, $e_i$adalah galat contoh pada area ke-*i*. v_i adalah pengaruh acak area dengan e_i dan v_i saling bebas dengan $E(e_i) = E(v_i) = 0$ dan $Var(e_i) = \sigma_i^2$ serta $Var(v_i) = \tau^2$ ($i = 1, 2, ..., m$).

Model pendugaan area kecil terbagi menjadi dua tipe, yaitu model tingkat area (*basic area level models*) dan model tingkat unit (*unit level area models*) (Gosh dan Rao 1994). Model tingkat area digunakan jika data penyerta yang bersesuaian

dengan data peubah yang diamati tidak tersedia hingga tingkat unit pengamatan, sedangkan model tingkat unit digunakan jika data penyerta yang bersesuaian dengan data peubah yang diamati tersedia hingga tingkat unit contoh.

2.2 Analisis Data Spasial

Data spasial adalah data yang memuat adanya informasi lokasi atau geografis dari suatu wilayah. Menurut De Mers (Budiyanto, 2010) analisis spasial mengarah pada banyak macam operasi dan konsep termasuk perhitungan sederhana, klasifikasi, penataan, tumpang-susun geometris, dan pemodelan kartografis. Secara umum analisis spasial membutuhkan suatu data yang berdasarkan lokasi dan memuat karakteristik dari lokasi tersebut.

Analisis spasial terdiri dari tiga kelompok yaitu visualisasi, eksplorasi, dan pemodelan. Visualisasi adalah menginformasikan hasil analisis spasial. Eksplorasi adalah mengolah data spasial dengan metode statistika. Sedangkan pemodelan adalah menunjukkan adanya konsep hubungan sebab akibat dengan menggunakan metode dari sumber data spasial dan data non spasial untuk memprediksi adanya pola spasial (Pfeiffer, 2008). Lokasi pada data spasial harus diukur agar dapat mengetahui adanya efek spasial yang terjadi. Menurut Kosfeld(2006), informasi lokasi dapat diketahui dari dua sumber yaitu:

1. Hubungan ketetanggaan (*neighborhood*).

Hubungan ketetanggaan mencerminkan lokasi relatif dari satu unit spasial atau lokasi ke lokasi yang lain dalam ruang tertentu. Hubungan ketetanggaan dari unit-

unit spasial biasanya dibentuk berdasarkan peta. Ketetanggaan dari unit-unit spasial ini diharapkan dapat mencerminkan derajat ketergantungan spasial yang tinggi jika dibandingkan dengan unit spasial yang letaknya terpisah jauh.

2. Jarak (*distance*)

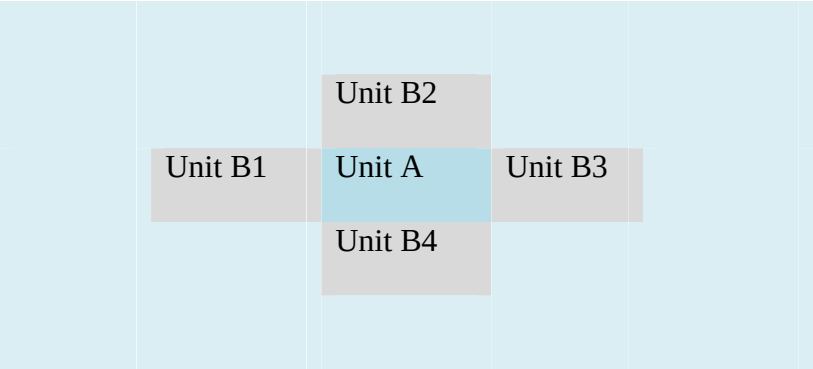
Lokasi yang terletak dalam suatu ruang tertentu dengan adanya garis lintang dan garis bujur menjadi sebuah sumber informasi. Informasi inilah yang digunakan untuk menghitung jarak antar titik yang terdapat dalam ruang. Diharapkan kekuatan ketergantungan spasial akan menurun sesuai dengan jarak yang ada.

2.3 Matriks Pembobot Spasial

Hal yang sangat penting dalam analisis spasial adalah adanya pembobot atau sering disebut sebagai matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial digunakan untuk menentukan bobot antar lokasi yang diamati berdasarkan hubungan ketetanggaan antar lokasi. Menurut Kosfeld(2006)pada grid umum ketetanggaan dapat didefinisikan dalam beberapa cara, yaitu:

a. *Rook contiguity*

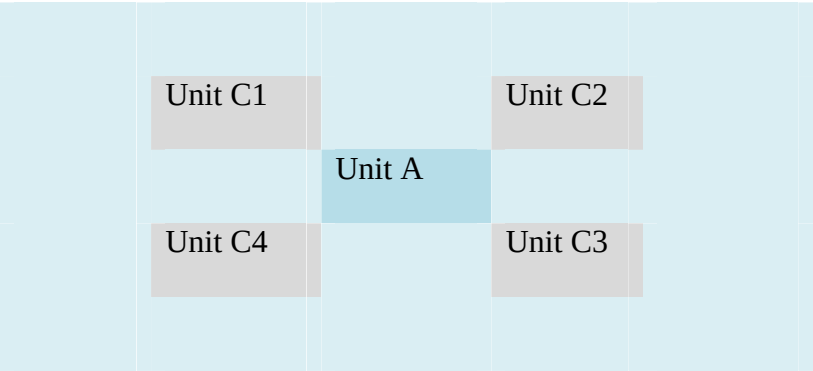
Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sudut tidak diperhitungkan. Ilustrasi *rook contiguity* dilihat pada Gambar 1, dimana unit B1, B2, B3, dan B4 merupakan tetangga dari unit A.



Gambar 1. *Rook Contiguity*

b. *Bishop contiguity*

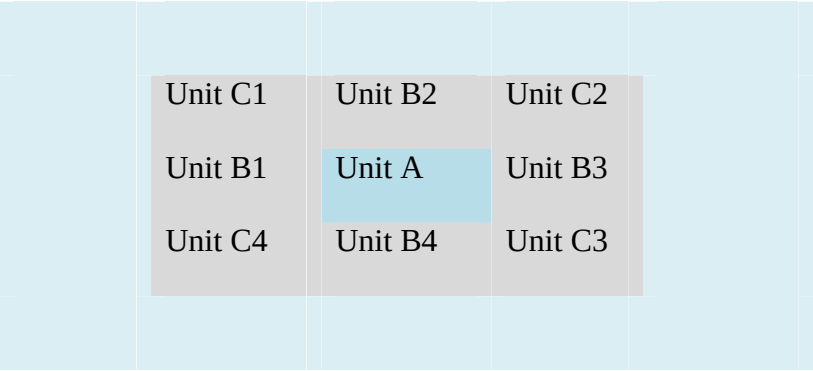
Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sudut-sudut yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sisi tidak diperhitungkan. Ilustrasi untuk *bishop contiguity* dilihat pada Gambar 2, dimana unit C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A.



Gambar 2. *Bishop Contiguity*

c. *Queen contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sudut juga diperhitungkan. Ilustrasi untuk *queen contiguity* dapat dilihat pada Gambar 3, dimana unit B1, B2, B3, dan B4 serta C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A.



Gambar 3. *Queen Contiguity*

Pada umumnya ketetanggaan antar lokasi didasarkan pada sisi-sisi utama bukan sudutnya. Matriks pembobot spasial **W** dapat diperoleh dari dua cara yaitu matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* $\boldsymbol{W}^*$) dan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix*).

Matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* $\boldsymbol{W}^*$) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot yang sama rata terhadap tetangga lokasi terdekat dan yang lainnya nol, sedangkan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix*) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot satu bagi tetangga terdekat dan yang lainnya nol.

2.4 Prediksi Tak Bias Linier Terbaik Empiris

Model pengaruh campuran Fay-Herriot selanjutnya dijabarkan oleh Russo*et al* (2005) untuk tingkat area sebagai berikut:

1. $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$, merupakan vektor data pendukung (peubah penyerta).
2. $\theta_i = x_i^T\beta + z_i v_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$. θ_i merupakan parameter yang menjadi perhatian dan diasumsikan memiliki hubungan dengan peubah penyerta.
3. $\mathrm{E}(v_i) = 0$, $\mathrm{Var}(v_i) = \sigma_v^2$
4. $\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i$, penduga langsung untuk domain ke-*i* yang merupakan fungsi linier dari parameter yang menjadi perhatian dan galat contoh e_i.
5. $\hat{\theta}_i = x_i^T\beta + z_i v_i + e_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$ merupakan gabungan dari (2) dan (4) yang terdiri dari pengaruh acak dan pengaruh tetap sehingga menjadi bentuk khusus dari model linier campuran dengan struktur peragam yang diagonal.

Model nomor (5) tersebut merupakan model tingkat area, yaitu:

$$\hat{\theta}_i = x_i^T\beta + z_i v_i + e_i \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \qquad (2.1)$$

dengan x_i adalah peubah penyerta tingkat area dan z_i adalah insiden matriks. Model persamaan (1) merupakan kasus khusus dari model linier campuran terampat dengan struktur koragam diagonal. Teknik penyelesaian model tersebut untuk memperoleh BLUP bagi $\theta_i = x_i^T\beta + z_i v_i$ telah dikembangkan oleh Henderson (1953) dengan asumsi σ_v^2 diketahui. Penduga BLUP dari θ_i berdasarkan persamaan (1) adalah:

$$\tilde{\theta}_i = x_i^T\tilde{\beta} + \gamma_i(\hat{\theta}_i - x_i^T\tilde{\beta})$$

$$= \gamma_i\hat{\theta}_i + (1-\gamma_i)x_i^T\tilde{\beta} \qquad (2.2)$$

dengan $\gamma_i = \sigma_v^2 z_i^2/(\sigma_v^2 z_i^2 + \sigma_i^2)$ dan $\tilde{\beta}$ adalah koefisien regresi yang diduga dengan *generaized least square* (GLS), yaitu $\tilde{\beta} = (X^TV^{-1}X)^{-1}X^TV^{-1}\hat{\theta}$. Kuadrat tengah galat (*Mean square error*, MSE) dari $[\hat{\theta}_i(\sigma_v^2)]$ adalah:

$$\text{MSE}[\hat{\theta}_i(\sigma_v^2)] = g_{1i}(\sigma_v^2) + g_{2i}(\sigma_v^2) \qquad (2.3)$$

2.5 Prediksi Tak Bias Linier Terbaik Empiris Spasial

Misalkan didefinisikan vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_m)^T$, $\boldsymbol{v} = (v_1, ..., v_m)^T$ dan $\boldsymbol{e} = (e_1, ..., e_m)^T$, dan matriks $\mathbf{X} = (x_1^T, ..., x_m^T)^T$ dan $\mathbf{Z} = \text{diag}(z_1, ..., z_m)$. Berdasarkan definisi vektor dan matriks tersebut, maka persamaan $\hat{\theta} = x_i^T\beta + z_i v_i + e_i$ untuk i = 1, 2, ..., m dalam notasi matriks adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}v + \boldsymbol{e} \qquad (2.4)$$

Model pada persamaan (2.2) mengasumsikan bahwa terdapat pengaruh acak area, namun pengaruh tersebut saling bebas antar area. Pada kenyataannya, sangat beralasan untuk mengatakan bahwa ada korelasi antar area yang berdekatan. Korelasi tersebut akan semakin berkurang seiring dengan jarak yang bertambah. Hal ini sesuai dengan hukum pertama tentang geografi yang merupakan pilar kajian analisis data spasial, yaitu "*everything is related to everything else, but near things are more related than distant things*". Segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang lebih dekat akan lebih berpengaruh daripada sesuatu yang jauh (Schanbenberger dan Gotway, 2015).

Model SAE dengan memasukkan korelasi spasial antar area pertama kali diperkenalkan oleh Cressie (Cressie 1991 diacu dalam Rao 2003), dengan mengasumsikan ketergantungan spasial mengikuti proses *Conditional Autoregressive* (Otoregresif bersyarat, CAR). Model SAE ini kemudian dikembangkan lagi oleh beberapa peneliti, diantaranya Petrucci dan Salvati(2004), Pratesi dan Salvati (2008), Singh*et.al.*(2005) dengan mengasumsikan bahwa ketergatungan spasial yang dimasukkan ke dalam komponen galat dari faktor acak mengikuti proses *Simultaneous autoregressive* (Simultan otoregresif, SAR). Model SAR sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Anselin (1993) dimana vektor pengaruh acak $v = (v_i)$ memenuhi:

$$v = \rho \mathbf{W} v + \boldsymbol{u} \tag{2.5}$$

Koefisien ρ dalam persamaan (2.5) adalah koefisien otoregresif spasial yang menunjukkan kekuatan dari hubungan spasial antar pengaruh acak. Nilai ρ berkisar antara – 1 hingga 1. Nilai $\rho > 0$ menunjukkan bahwa suatu area dengan nilai parameter yang tinggi pula dan sebuah area dengan nilai parameter yang rendah dikelilingi oleh area dengan nilai parameter yang rendah pula. Disisi lain, $\rho < 0$ menunjukkan bahwa suatu area dengan nilai parameter yang tinggi dikelilingi oleh area lain dengan nilai parameter yang rendah, atau sebaliknya (Savitz dan Raudenbush, 2009).

W adalah matriks pembobot spasial yang menggambarkan struktur ketetanggaan dari area kecil dalam bentuk standarisasi baris (jumlah setiap baris pada matriks **W** adalah 1), v adalah pengaruh acak area dan u adalah vektor galat dari

peubahacak area dengan rata-rata sama dengan nol dan ragam $\sigma_u^2\mathbf{I}_m$. Persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$v = (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{u} \qquad (2.6)$$

Dengan **I** adalah matriks identitas berukuran *m* x *m*. Dari persamaan (2.6) terlihat bahwa rata-rata ***v*** adalah 0 dan matriks koragam ***v***(**G**) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} &= E[vv^T] = E(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{uu}^T(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1})^{\mathrm{T}}] = \\
&= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1} E[\boldsymbol{uu}^T]((\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1})^{\mathrm{T}} = \\
&= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1}\sigma_{\mathrm{u}}^2\mathbf{I}((\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1})^{\mathrm{T}} = \\
&= \sigma_{\mathrm{u}}^2(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1})((\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{\mathrm{T}})^{-1} = \\
&= \sigma_{\mathrm{u}}^2\,[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{\mathrm{T}}]^{-1} = \\
\mathbf{G} &= \sigma_{\mathrm{u}}^2\,[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{\mathrm{T}}]^{-1}
\end{aligned}$$

Persamaan (2.6) dimasukkan ke dalam persamaan (2.4) menghasilkan:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{e} \qquad (2.7)$$

Matriks koragam dari $\hat{\theta}$ dengan R = diag(σ_i^2) adalah:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} + \mathbf{ZGZ}^T = \mathrm{diag}(\sigma_i^2) + \mathbf{Z}\sigma_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^T)]^{-1}\mathbf{Z}^T \qquad (2.8)$$

Penduga spasial BLUP untuk parameter θ_i dengan σ_u^2, σ_i^2 dan ρ diketahui adalah:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta_i^s}(\sigma_{\boldsymbol{u}}^2, \rho) &= xi\hat{\beta} + \boldsymbol{b}_i^T\,\{\sigma_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^T)]^{-1}\}\mathbf{Z}^T \\
&\times \{\mathrm{diag}(\sigma_i^2) + \mathbf{Z}\sigma_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^T)]^{-1}\mathbf{Z}^T\}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

dimana $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}\hat{\theta}$ dan b_i^T adalah vektor berukuran 1 x *n* (0, 0, ...0, 1, 0, ...0) dengan 1 menunjukkan pada lokasi ke-*i*. Penduga spasial BLUP tersebut

diperoleh dengan memasukkan matriks koragam pada persamaan (2.9), ke dalam penduga BLUP. Spatial BLUP akan sama dengan BLUP jika $\rho = 0$.

Seperti halnya dengan penduga EBLUP, penduga SEBLUP ($\widetilde{\theta_i^s}(\widehat{\sigma_u^2}, \hat{\rho})$) diperoleh dari Spasial BLUP dengan mengganti nilai σ_u^2, ρ dengan pendugaannya.

Asumsi kenormalan dari pengaruh acak digunakan untuk menduga σ_u^2 dan ρ dengan menggunakan prosedur baik ML maupun REML dengan fungsi *log-likelihood* memiliki maksimum global dan beberapa maximum lokal (Patresi dan Salvati 2005 diacu dalam Pratesi dan Salvati 2008). Hasil pendugaan tersebut kemudian digunakan untuk melakukan pndugaan terhadap SEBLUP, dengan rumus penduga SEBLUP adalah:

$$\widetilde{\theta_i^s}(\widehat{\sigma_u^2}, \hat{\rho}) = xi\hat{\beta} + \mathbf{b}_i^T \{\hat{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W})(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)]^{-1}\}\mathbf{Z}^T$$
$$\times \{ \text{diag}(\sigma_i^2) + \mathbf{Z}\hat{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W})(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)]^{-1}\mathbf{Z}^T\}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \qquad (2.10)$$

Dengan mengasumsikan normalitas, σ_u^2 dan ρ dapat diestimasi keduanya dengan prosedur ML (*Maximum Likelihood*) dan REML (*Restricted Maximum Likelihood*). Penelitian ini menggunakan distribusi *Normal Multivariate* yaitu :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)/2} \text{--}\infty < x_i < \infty \,; i = 1, \dots, p \qquad (2.11)$$

Karena $\Sigma = \mathbf{V}, X = \hat{\theta}$, dan $\mu = \boldsymbol{X\beta}$.

$$f(\hat{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{V}|^{1/2}} e^{-(\hat{\theta}-x\beta)^T \mathrm{v}^{-1}(\hat{\theta}-x\beta)/2} \,; -\infty < x_i < \infty \,; i = 1, \dots, m$$

Fungsi *log-likelihood* dari distribusi *Normal Multivariate* yaitu:

$$l(\beta, \sigma_u^2, \rho) = -\frac{1}{2}m\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\mathbf{V}| - \frac{1}{2}(\hat{\theta} - X\beta)^T V^{-1}(\hat{\theta} - X\beta) \qquad (2.12)$$

dengan $\mathbf{V}$ telah dijelaskan pada persamaan (2.9), dengan turunan parsial dari $l(\beta, \sigma_u^2, \rho)$ dengan menggunakan metode ML (*Maximum Likelihood*) yaitu :

$$s\sigma_u^2(\beta, \sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial_l}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T\} + \frac{1}{2}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$s\sigma_u^2(\beta, \sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial_l}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} tr\{V^{-1}Z\sigma_u^2[-C^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}} - \mathbf{2W})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T]$$

$$+\frac{1}{2}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T\mathbf{V}^{-1}Z\sigma_u^2[-C^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}} - \mathbf{2W})\mathbf{C}^{-1}]\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \qquad (2.13)$$

Kemudian matriks yang berisikan turunan kedua dari fungsi *log-likelihood* yaitu matriks *fisher scoring* adalah

$$\mathfrak{I}(\sigma_u^2, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T\} & \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^T\} \\ \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^T\} & \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^T\} \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

dengan A = $\sigma_u^2[-C^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}} - \mathbf{2W})\mathbf{C}^{-1}]$. Penduga ML σ_{uML}^2 dan β_{ML} didapat secara *iterative* dengan menggunakan algoritma *"scoring"*:

$$\begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \rho \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \rho \end{bmatrix}^{n} + \left[\mathfrak{I}\left(\sigma_u^{2(n)}, \rho^n\right)\right]^{-1} s\left[\beta\left(\sigma_u^{2(n)}, \rho^n\right),\right] \sigma_u^{2(n)}, \rho^n \qquad (2.15)$$

dimana n merupakan nilai dari iterasi yang ditentukan oleh nilai awal n=0, serta *s* yang merupakan vektor *score* yaitu vektor yang elemen turunan pertama fungsi ln-*likelihood* terhadap masing-masing parameter.

Turunan parsial dari *log-likelihood* terkendala (REML) $l_R(\beta, \sigma_u^2, \rho)$ dengan memperhatikan komponen varian yaitu

$$S_{R\sigma_u^2}(\sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial l_R}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{P}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\boldsymbol{T}}\} + \frac{1}{2}\hat{\theta}\mathbf{P}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{P}\hat{\theta}$$

$$S_{R\sigma_u^2}(\sigma_u^2,\rho) = \frac{\partial l_R}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{PZ}\sigma_u^2[-\mathbf{C^{-1}}(\mathbf{2}\rho\mathbf{WW}^{\boldsymbol{T}} - 2\mathbf{W})\mathbf{C^{-1}2^T}\}$$

$$+\frac{1}{2}\hat{\theta}\mathbf{PZ}\sigma_u^2[-\mathbf{C^{-1}}(\mathbf{2}\rho\mathbf{WW}^{\boldsymbol{T}} - 2\mathbf{W})\mathbf{C^{-1}2^T}\mathbf{P}\hat{\theta} \qquad (2.16)$$

dengan $\mathbf{P} = \mathbf{V^{-1}} - \mathbf{V^{-1}X}(\mathbf{X^TV^{-1}X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X^TV^{-1}}$dan $C = [(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}\mathrm{T})]$

Kemudian matriks berisi turunan kedua yang langsung diterapkan dengan algoritma "*scoring*" dan langkah selanjutnya mengikuti langkah prosedur ML dengan matriks *fisher scoring* sebagai berikut :

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{R}}(\sigma_u^2,\rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}tr\{\mathbf{PZC}^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{PZC}^{-1}\mathbf{Z}^T\}\frac{1}{2}tr\{\mathbf{PZC}^{-1}\mathbf{PZAZ}^T\} \\ \frac{1}{2}tr\{\mathbf{PZAZ}^T\mathbf{PZC}^{-1}\mathbf{Z}^T\}\frac{1}{2}tr\{\mathbf{PZAZ}^T\mathbf{PZAZ}^T\} \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

MSE dari penduga Spasial EBLUP adalah :

$$MSE\left[\tilde{\theta}_{\mathrm{i}}(\hat{\sigma}_{\mathrm{u}}^2)\right] = MSE\left[\tilde{\theta}_{\mathrm{i}}(\sigma_{\mathrm{u}}^2)\right] + \mathrm{E}[\tilde{\theta}_{\mathrm{i}}(\hat{\sigma}_{\mathrm{u}}^2) - \tilde{\theta}_{\mathrm{i}}(\sigma_{\mathrm{u}}^2)]^2 \qquad (2.18)$$

dimana persamaan akhir didapatkan sebagai pendekatan secara umum. Kemudian pendekatan untuk $MSE\left[\tilde{\theta}_{\mathrm{i}}(\hat{\sigma}_{\mathrm{u}}^2,\hat{\rho})\right]$ adalah:

$$MSE\left[\tilde{\theta}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{S}}(\hat{\sigma}_{\mathrm{u}}^2,\hat{\rho})\right] \approx g_{1i}(\sigma_{\mathrm{u}}^2,\rho) + g_{2i}(\sigma_{\mathrm{u}}^2,\rho) + g_{3i}(\sigma_{\mathrm{u}}^2,\rho) \qquad (2.19)$$

dimana $g_{3i}(\sigma_{\mathrm{u}}^2,\rho)$ adalah dengan pendekatan.

$$tr\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_i^T}\left(\mathbf{C^{-1}Z^TV^{-1}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{2}}\mathbf{C^{-1}Z^T}(-\mathbf{V^{-1}ZC^{-1}Z^TV^{-1}})\right) \\ \boldsymbol{b_i^T}\left(\mathbf{AZ^TV^{-1}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{2}}\mathbf{C^{-1}Z^T}(-\mathbf{V^{-1}ZAZ^TV^{-1}})\right) \end{bmatrix}\mathbf{V}$$

$$\times \begin{bmatrix} b_i^T\left(\mathbf{C^{-1}Z^TV^{-1}} + \sigma_{\mathrm{u}}^2\mathbf{C^{-1}Z^T}(-\mathbf{V^{-1}ZC^{-1}Z^TV^{-1}})\right) \\ b_i^T\left(\mathbf{AZ^TV^{-1}} + \sigma_{\mathrm{u}}^2\mathbf{C^{-1}Z^T}(-\mathbf{V^{-1}ZAZ^TV^{-1}})\right) \end{bmatrix}^T \overline{\mathbf{V}}(\hat{\sigma}_{\mathrm{u}}^2,\hat{\rho})\} \qquad (2.20)$$

Pada praktiknya penggunaan penduga $\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})$ telah terhubung dengan penduga dari $MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right]$. Suatu penduga tak bias dengan pendekatan pada MSE telah terhitung dengan mengikuti pernyataan:

$$MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right] \approx g_{1i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) + g_{2i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) + 2g_{3i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) \qquad (2.21)$$

2.6 *Maximum Likelihood Estimation* (ML) *dan Restricted Maximum Likelihood*(REML)

MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) merupakan metode pendugaan parameter yang menggunakan pendekatan distribusi dari data yang dimiliki serta asumsi distribusi yang diberlakukan oleh data tersebut, sehingga dapat diperoleh fungsi *likelihood* dari suatu data tersebut. MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) ini menyediakan metode umum, dimana suatu kondisi dalam suatu sampel acak terdapat penduga, dimana penduga tersebut mempunyai sifat yang konsisten dan sifat-sifat lain yang sangat diperlukan sebagai suatu penduga.

Dalam menggunakan metode MLE, pertama dimisalkan bahwa peubah acak dari suatu populasi adalah X, dimana X mempunyai fungsi peluang yang mewakili beberapa parameter $\boldsymbol{\theta}$: $\boldsymbol{Pr\,x} = x = f(x;\theta)$. Lalu dimisalkan bahwa fungsi$f$diketahui tetapi nilaiθtidak diketahui.

Fungsi peluang bersama dari peubah acak $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dapat ditulis menjadi:

$$(\theta) = f(x1, x2, \dots, xn\,;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_j;\theta) \qquad (2.22)$$

fungsi tersebut lebih dikenal dengan sebutan *likelihood* dari suatu sampel. Sifat dari MLE ini diperlukan untuk memilih penduga dari parameter yang tidak

diketahui. Jika suatu kelompok distribusi ingin menentukan dua atau lebih parameter yang tidak diketahui, yaitu $\theta_{1,2,\dots,n}$ maka fungsi *likelihood* dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = f(x_1, \dots, x_n;\ \theta_1, \dots, \theta_k)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \dots, \theta_k) \qquad (2.23)$$

Prosedur ML menghasilkan penduga yang bias dari parameter acak. Hal ini menjadi penting dalam sampel yang kecil dan dapat menghasilkan penduga yang tak bias apabila menggunakan REML. Estimasi θ dalam REML didasarkan pada optimalisasi dan mengikuti fungsi *log-likelihood* (Brunk, 1975).

2.7 Generalisasi Kuadrat Terkecil (*Generalized Least Squares*)

Perhatikan model linier

$$Y = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon \qquad (2.24)$$

Diasumsikan matriks kovariansnya $\sum \sigma^2 \Delta (\sigma^2 < \infty)$ dengan σ^2 adalah parameter yang tidak diketahui nilainya dan Δ adalah matriks definit positif nxn dengan trase matriks sama dengan n. Jika suatu matriks Q adalah simetrik definit positif maka Q non singular atau Q^{-1}ada, dan karena itu ada matriks nxn nonsingular (misal P) sedemikian rupa sehingga :

$$P^T P = \mathrm{Q}^{-1} \qquad (2.25)$$

MatriksΔ adalah simetriks dan definit positif sehingga non-singular, karena itu ada suatu matriks nxn nonsingular P sehingga$P^T P = \Delta^{-1}$. Pada model linear kalikan kedua ruas dengan matriks P ini:

$$\mathbf{P}\mathrm{Y} = \mathbf{P}\boldsymbol{X}\beta + \mathbf{P}\varepsilon \qquad (2.26)$$

Penerapan metode kuadrat terkecil pada model (2.26) akan menghasilkan persamaan normal sebagai berikut:

$$\mathbf{P^T P} Y = \mathbf{X^T P^T X B} \tag{2.27}$$

dengan B adalah penduga kuadrat terkecil untuk β berdasarkan model di atas. Karena $\mathbf{X^T P^T X B}$ adalah matriks definit positif jika **X** mempunyai peringkat kolom penuh (*full column rank*) sehingga$\mathbf{X^T P^T X B}$ adalah nonsingular dan$\boldsymbol{P^T P}$ = Δ^{-1} maka solusi persamaannya adalah:

$$B = \mathbf{X^T P^T P X^{-1} P^T P} Y \tag{2.28}$$

atau

$$B = (\mathbf{X}'\Delta^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Delta^{-1}\mathrm{Y} \tag{2.29}$$

Persamaan terakhir ini dinamakan penduga kuadrat terkecil umum (*Generalized Least Squares*) untuk β selanjutnya disingkat dengan GLS (Usman dan Warsono, 2009).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2016/2017, bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini yaitu :

1. Data yang digunakan adalah data sekunder Kota Bandar Lampung yaitu Jumlah Keluarga Prasejahtera se-Kecamatan di Kota Bandar Lampung tahun 2015 dengan variabel :

   Y : Jumlah keluarga prasejahtera

   X1 : Jumlah keluarga membeli pakaian baru

   X2 : Jumlah keluarga makan minimal 2 kali sehari

   X3 : Jumlah keluarga bila sakit akan berobat

   X4 : Jumlah keluarga memakai pakaian berbeda di rumah, kantor, dan sekolah

   X5 : Jumlah keluarga makan ikan, daging, telur per minggu

   X6 : Jumlah keluarga menjalankan ibadah

Secara lengkap data Keluarga Prasejahtera se-Kecamatan Kota Bandar Lampung Tahun 2015 disajikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Jumlah Keluarga Prasejahtera se-Kecamatan Kota Bandar Lampung Tahun 2015

KECAMATAN	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Kedaton	1596	8452	9057	9374	9157	8087	9626
Sukarame	480	6772	6788	6852	6848	6742	6883
Tanjungkarang Barat	787	11258	11462	11488	11432	11276	11426
Panjang	2253	8945	8538	9890	9783	8538	9537
Tanjungkarang Timur	760	6493	7175	7445	7380	6390	7391
Tanjungkarang Pusat	878	9854	9928	9834	9879	9846	9911
Telukbetung Selatan	1294	8411	8474	8770	8275	6909	8686
Telukbetung Barat	1130	6429	6735	7081	6960	6107	7090
Telukbetung Utara	621	10566	10897	10890	10842	10651	10907
Rajabasa	909	8644	8736	8856	8828	8694	8877
Tanjungsneng	1067	9192	9914	9911	9818	9389	10035
Sukabumi	2419	10895	10751	11968	11678	9733	12049
Kemiling	2002	13439	15552	15831	15738	13163	15512
Kedamaian	797	9998	10081	10265	10261	9945	10298
Teluk Betung Timur	4128	6541	9125	9594	8011	5655	9945
Way Halim	1153	13241	13342	13440	13263	12793	13282
Enggal	227	5155	5197	5246	5243	4890	5248
Langkapura	667	7512	7407	7655	7617	7520	7653
Labuhan Ratu	448	5083	5019	5167	5102	5080	5178
Bumi Waras	793	9039	9155	9170	9132	7228	9120

Sumber : BKKBN Kota Bandar Lampung

2. Penentuan matriks pembobot W yaitu dengan melihat peta Kota Bandar Lampung.

3.3 Metode Penelitian

Langkah-langkah untuk menduga :

1. Menentukan matriks pembobot spasial yang telah terstandarisasi yaitu dengan matriks pembobot *Bishop contiguity*.
2. Melakukan pendugaan langsung dengan menghitung proporsi Keluarga Prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015 dengan rumus :

   $\hat{p}_i = \frac{y_i}{n_i}$, untuk i =1, 2, ……., 20.

   dengan :

   $\hat{p}_i$ = proporsi keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015

   y_i = jumlah keluarga prasejahterakota Bandar Lampung tahun 2015 ke-i

   n_i = jumlah kecamatan kota Bandar Lampung ke-i
3. Menghitung ragam dari peubah respon yaitu data jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015 dengan rumus :

   $$V(y) = s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)$$

4. Melakukan pendugaan komponen ragam dari pengaruh acak σ_u^2 dengan menggunakan *algoritma scoring* dengan rumus :

   $$\begin{bmatrix}\sigma_u^2 \\ \rho\end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix}\sigma_u^2 \\ \rho\end{bmatrix}^{(n)} + \left[\mathfrak{I}\left(\sigma_u^{2(n)},\ \rho^n\right)\right]^{-1} s\left[\hat{\beta}(\sigma_u^{2(n)},\ \rho^n), \sigma_u^{2(n)},\ \ \rho^n\right]$$

5. Melakukan pendugaan koefisien regresi (β) dengan GLS yaitu :

$$\hat{\beta} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1}$$

6. Melakukan pendugaan proporsi jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung dengan metode *SEBLUP* dengan rumus :

$$\tilde{\theta}_i^s(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) = \boldsymbol{x_i}\hat{\beta} + \boldsymbol{b_i^T}\{\hat{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}}[(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)(\mathrm{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)]^{-1}\}\boldsymbol{Z}^T \left\{\boldsymbol{diag}(\sigma_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{Z}\,\sigma_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}}\left[\left(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T\right)(\mathrm{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)\right]^{-1}\right\}^{-1} (\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

7. Membandingkan pendugaan langsung dengan pendugaan tidak langsung (SEBLUP) dengan melihat criteria *MSE* dengan rumus :

$$MSE(\hat{p}_i^{seblup}) = var(\hat{p}^{seblup}) + bias^2$$

$$MSE[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2)] = MSE[\tilde{\theta}_i(\sigma_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}})] + E[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2) - \tilde{\theta}_i(\sigma_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}})]^{\boldsymbol{2}}$$

V. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan dari penelitian ini yaitu :

1. Nilai koefesien autoregresif spasial yang dihasilkan bernilai 1 untuk metode ML dan metode REML. Hal ini berarti angka proporsi keluarga prasejahtera berbanding lurus dengan angka proporsi di kecamatan lain di Kota Bandar Lampung.

2. MSE pada metode REML menghasilkan MSE lebih kecil dibandingkan MSE metode ML dan penduga langsung, dapat diartikan keakuratan metode REML dalam mencari nilai MSE untuk keluarga prasejahtera di Kota Bandar Lampung lebih baik dibandingkan dengan menggunakan metode ML dan Penduga Langsung.

DAFTAR PUSTAKA

Anselin, L. 1993.*Exprolatory Spatial Data Analysis and Geographic Information Systems*. National Center for Geographic Information and Analysis of California. Santa Barbara: CA93106.

Anselin, L., Syabri, I., dan Youngihn, K. 2004. *Geoda: An Introduction to Spatial Data Analysis.* University of Illinois. Urbana.

Brunk, H.D. 1975. *An introduction to mathematical statistics*. John Willey and Sons, New York.

Budiyanto, E. 2010. *Sistem Informasi Geografis dengan ArcView GIS*. Penerbit Andi. Yogyakarta.

Fay, R.E. and Herriot, R A. 1979. Estimation of income for smll places; An application of James-Stein precedures to census data. *Journal of the American Statistical Association*,**74**: 269-277.

Gosh, M. and Rao, JNK. 1994. Small Area Estimation: an appraisal (with discussion). *Statistical Science*.**9**(1):55-93.

Henderson, CR. 1953. Estimation of Variance and Covariance Components. *Biometrics*.**9**:226-252.

Henderson, CR. 1975. Best Linier Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model. *Biometrics***. 31**: 423-447.

Kosfeld, R. 2006. *Spatial Econometrics*. University of Kassel. Germany

Petrucci, M. andSalvati, N.2004. Small area eastimation considering spatially Correlated errors.The unit level random effects model. Dipartimento *di Statistica "G. Parenti" viale morgagn, Firence.* **1** :228.

Pfeiffer, DIR. (2008). *Spatial Analysis in Epidemiologi*. Oxford University Press. New York.

Pratesi, M. dan Salvati, N. 2008. Small area estimation: the EBLUP estimator basedon spatially correlated random area effects. Statistical methods andapplication,**17**:113-141.

Rao JNK. 2003. *Small Area Estimation*. Wiley,London.

Russo C., Sabbatini M., dan Salvatore R. 2005. *General Linier Models in Small AreaEstimation* : *an assessment in agricultural surveys*,http://www.siap.sagarpa.gob. mx/mexsai/trabajos/t44.pdf [12 Februari 2017]

Savitz, N. and Raudenbush, S.W. 2009. Exploiting spatial dependence to improve measurement of neighborhood social processes.*Sociological Methodology*. **39**: 151-183.

Schabenberger, O. andGotway, CA. 2005.*Statistical Methods fos Spatial Data Analysis*.Chapman & Hall/CRC.

Singh BB, Shukla K, Kundu D. 2005. Spatial-temporal models in small area estimation. *Survey Methodology* 31:183-195.

Usman, M. danWarsono. 2009. *Teori Model Linier danAplikasinya*. Sinar BaruAlgesindo, Bandung.