DESAIN KONTROL STABILISASI PADA SUATU GEROBAK

(Skripsi)

Oleh

ZULFIKAR FAKHRI BISMAR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

DESAIN KONTROL STABILISASI PADA SUATU GEROBAK

Oleh

ZULFIKAR FAKHRI BISMAR

Sistem kontrol merupakan perlakuan terhadap suatu sistem dengan masukan tertentu untuk mendapatkan hasil yang baik sesuai dengan yang diinginkan. Dalam mempelajari sistem kontrol akan dicari fungsi alih sistem dengan pendekatan model matematika. Dalam penyelesaiannya, dapat dibantu dengan menggunakan komputasi. Sistem gerobak dapat dipandang sebagai sebuah sistem. Pada penelitian ini, akan ditinjau gerobak bergerak secara horizontal di permukaan yang licin dengan didorong atau ditarik. Kemudian, akan dikaji model matematika dari sistem gerobak terkait, serta menentukan desain kontrol yang baik agar gerobak dapat kembali menuju kesetimbangan. Solusi numerik diperoleh dengan mensimulasikan Model Ruang Keadaan (*State-space Model*) dengan menggunakan software GNU Octave-4.2.1®. Sedangkan solusi analitik diperoleh dengan menggunakan prosedur perhitungan solusi sistem persamaan differensial biasa orde satu berdimensi dua. Berdasarkan hasil penelitian, Sistem gerobak merupakan sistem yang dapat dikontrol dan diobservasi. Model input kontrol yang baik adalah $u = -100\,y - 10\,\frac{dy}{dt}$. Dengan batas waktu 5 detik dan toleransi jarak simpangan gerobak 0,001 cm dari titik *equilibrium*, sistem bekerja pada gerobak dengan massa kurang dari 3,5 Kg.

Kata Kunci : Sistem Kontrol, Sistem Linier, Sistem Persamaan Diferensial Biasa, Model Ruang Keadaan, Komputasi.

ABSTRACT

STABILIZATION OF A CART CONTROL DESIGN

By

ZULFIKAR FAKHRI BISMAR

Control system is a treatment to the system with a certain input to obtain a desired good output. In order to learn control system, will be determine the transfer function of the system with a mathematical modeling approachment, and can be solved by mathematical computing. The cart can be treated as a system. In this research, will be assumed that a cart moves horizontally on the slippery surface by being pushed, or being pulled. Then, will be determined mathematical model on the related cart system, and find out a good control design so that it can be quickly returned to the *equilibrium*. Numerical solution can be found by simulate State-space Model of the system using GNU Octave-4.2.1®. Meanwhile, the analytical solution can be found by using procedures to find solution of the systems of n-linear first order differential equations. Based on the results, the cart system is a controllable and observable system. The proper input control is $u = -100\,y - 10\,\frac{dy}{dt}$. Within 5 seconds, and assuming that the maximum amplitude is 0,001 cm around the *equilibrium*. The system works on the cart which has the weight about 3,5 Kg or less.

Keywords : Control Systems, Linear Systems, System of Differential Equations, State-space Model, Mathematical Computing.

DESAIN KONTROL STABILISASI PADA SUATU GEROBAK

Oleh

ZULFIKAR FAKHRI BISMAR

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **DESAIN KONTROL STABILISASI PADA SUATU GEROBAK**

Nama Mahasiswa : ***ZULFIKAR FAKHRI BISMAR***

Nomor Pokok Mahasiswa : **1417031138**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.	**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP. 19740316 200501 1 001	NIP. 19700831 199903 1 002

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Lampung

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing: **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI UNIVERSITAS LAMPUNG FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 16 April 2018

PERNYATAAN

Nama	: Zulfikar Fakhri Bismar
Nomor Induk Mahasiswa	: 1417031138
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Desain Kontrol Stabilisasi pada Suatu Gerobak"** adalah hasil karya saya sendiri. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 11 Mei 2018

Penulis

METERAI TEMPEL
TGL. 20
A188DAFF071093169
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Zulfikar Fakhri Bismar
NPM. 1417031138

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Zulfikar Fakhri Bismar, dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 11 Desember 1995 dan merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Bismaryanto dan Ibu Nirwana.

Penulis menempuh pendidikan di TK Pratama pada tahun 2001 lalu Sekolah Dasar Negeri 2 Rawa Laut pada tahun 2002-2008, pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 2 Bandar Lampung pada tahun 2008-2011 dan pendidikan menengah atas di SMA Negeri 2 Bandar Lampung pada tahun 2011-2014. Pada tahun 2014 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung Bandar Lampung melalui jalur SNMPTN.

Pada bulan Januari – Februari 2017 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Pekerjaan Umum Kota Bandar Lampung dan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Pekon Susuk Kecamatan Kelumbayan Kabupaten Tanggamus pada bulan Juli–Agustus 2017.

KATA INSPIRASI

"Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan?"

(QS. Ar-Rahman : 13)

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(QS. Al – Baqarah : 286)

"Aku berjalan dengan perlahan, tapi aku tidak pernah berjalan mundur."

(Abraham Lincoln)

"Kau takkan pernah tahu jika ketidakberuntunganmu justru menjadi sesuatu yang menyelamatkanmu."

(Cormac McCarthy)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala hidayah dan karunia-Nya.

Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Dengan kerendahan hati dan rasa syukur, kupersembahkan sebuah karya kecil ini sebagai tanda cinta dan sayangku kepada :

Ayah dan Ibu tercinta yang telah membesarkanku dengan penuh kasih sayang, pengorbanan, dan kesabaran. Terima kasih atas setiap tetes keringat dan doa dari ayah dan ibu untuk kebahagiaan dan keberhasilan putra kalian ini.

Kakakku, Billy atas doa, semangat dan dukungan yang selalu diberikan.

Bapak/Ibu dosen, Bapak/Ibu guru, Sahabat, Teman-temanku yang telah banyak membantu dalam perjalananku sampai disini dan insan pilihan Allah SWT yang kelak akan menjadi pendamping hidupku serta almamater yang aku banggakan Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena atas limpahan rahmat, hidayah, serta kasih sayang-Nya Penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Desain Kontrol Stabilisasi pada Suatu Gerobak" ini. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dukungan berbagai pihak. Sehingga dengan segala kerendahan dan ketulusan hati Penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan yang telah memberikan bimbingan, arahan serta saran dan kesediaan waktu selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan serta saran selama penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuna Alam Universitas Lampung sekaligus Dosen Penguji yang telah banyak membantu dalam mengevaluasi serta mengarahkan penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

4. Ibu Widiarti, M.Si. selaku Pembimbing Akademik yang senantiasa memberikan arahan dalam menjalani kegiatan perkuliahan.
5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Keluarga besar penulis yang senantiasa selalu mendukung, mendo'akan serta memberi semangat kepada penulis.
8. Sahabat canda tawa Iin, Fadhil, Raka, Ardi, Fathur, Kodir, Zhofar, Alvin, Kiki, Aldo, Arisca, Adit, Agus, Arif, Drajat, Ncek, Redi, Fajar, Ayub yang telah melakukan banyak hal dari awal perkuliahan hingga skripsi ini berhasil dibuat.
9. Alamamater Universitas Lampung dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu namanya.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun.

Bandar Lampung, 2018
Penulis

Zulfikar Fakhri Bismar

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Sistem kontrol merupakan usaha atau perlakuan terhadap suatu sistem dengan masukan tertentu untuk mendapatkan hasil yang baik sesuai dengan yang diinginkan. Dalam mempelajari sistem kontrol akan dicari fungsi alih sistem beserta respon sistem terhadap suatu fungsi *input* dengan pendekatan model matematika. Fungsi alih sistem berikut respon sistem terhadap fungsi *input* dapat dilakukan dengan menggunakan komputasi.

Seluruh gerobak dapat dipandang sebagai sebuah sistem. Misalkan akan ditinjau gerobak bergerak secara horizontal di permukaan yang licin. Gerobak digambarkan seperti balok kayu yang diberikan roda di bawahnya, gerobak akan bergerak maju mundur dengan didorong atau ditarik. Dengan asumsi tersebut, akan dikembalikan gerobak kembali menuju titik kesetimbangan atau posisi yang diinginkan. Agar gerobak dapat kembali menuju titik kesetimbangan, dibutuhkan model sistem yang dapat dikontrol dan diobservasi. Pada penelitian ini akan dikaji model matematika dari sistem gerobak yang bergerak secara horizontal, serta menentukan desain kontrol yang baik agar gerobak dapat kembali menuju titik kesetimbangan.

1.2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kontrol yang sesuai pada sistem yang diberlakukan pada gerobak agar dapat kembali ke titik kesetimbangan.

1.3. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperkenalkan penerapan sederhana simulasi desain kontrol pada suatu gerobak.
2. Menambah pengetahuan peneliti dan pembaca tentang desain sistem kontrol dengan menggunakan komputasi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pemodelan Sistem Dinamik

Pemodelan sistem dinamik didefinisikan sebagai pembuatan model matematika untuk sistem fisis yang bergantung terhadap waktu. Model sistem dinamik merupakan salah satu tipe model yang sangat vital untuk merepresentasikan bagaimana suatu sistem bekerja dan berubah keadaannya dari waktu ke waktu. Gagasan dari pemodelan sistem dinamik yaitu untuk digunakan sebagai suatu hipotesis yang perlu dibuktikan pada konteks fenomena yang terjadi di dunia (Fishwick, 2007).

Persamaan diferensial biasa merupakan alat yang seringkali digunakan untuk memodelkan sistem dinamik baik linier maupun nonlinier kontinu. Persamaan diferensial biasa digunakan untuk menjelaskan respon dari sistem dinamik untuk semua masukan (*input*) dan keluaran (*output*) yang mungkin (Megretski, 2003).

2.2. Sistem Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Persamaan diferensial orde-n $x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan mendefinisikan peubah baru sebagai $x(t)$ beserta turunannya hingga turunan ke $(n-1)$. Sedemikian sehingga membentuk sistem persamaan diferensial orde satu berdimensi n sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Jika setiap $b_i\ (t) = 0$, maka sistem tersebut disebut sistem linier homogen. Kemudian, Persamaan (2.1) dapat diubah kedalam bentuk matriks sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\dot{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{2.3}$$

Dengan A menyatakan sebagai matriks koefisien sistem dan **b** menyatakan sebagai vektor konstanta.

(Noonburg, 2014).

2.3. Solusi Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde Satu Berdimensi Dua

Sistem persamaan diferensial homogen orde satu berdimensi dua jika mengacu pada Persamaan (2.3) antara lain sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Nilai eigen $\lambda_{1,2}$ matriks A merupakan solusi dari persamaan karakteristik berikut:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda - a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda - a_{22}\end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{2.5}$$

$$\lambda = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \tag{2.6}$$

Bentuk dari solusi umum Sistem (2.4) bergantung pada diskriminan $D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Jika $D > 0$ maka terdapat dua nilai eigen berbeda. Jika $D = 0$, maka terdapat satu nilai eigen. Serta jika $D < 0$, maka terdapat dua nilai eigen kompleks.

Untuk $D > 0$, misalkan λ_1 dan λ_2 merupakan akar-akar real berbeda yang diperoleh dari Persamaan (2.6), serta $(\lambda_1, \mathbf{u_1})$ dan $(\lambda_2, \mathbf{u_2})$ merupakan pasangan eigen (nilai eigen beserta vektor eigennya) matriks koefisien sistem. Solusi umum yang terbentuk adalah:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u_2} \tag{2.7}$$

Untuk $D < 0$, misalkan λ_1 dan λ_2 merupakan bilangan kompleks konjugat $\alpha \pm i\beta$ yang diperoleh dari Persamaan (2.6), serta $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ merupakan vektor eigen yang mengacu pada nilai eigen $\alpha + i\beta$. Dua solusi bilangan kompleks yang terbentuk yaitu:

$$\mathbf{z_1}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \quad \text{dan} \quad \mathbf{z_2}(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \tag{2.8}$$

Dengan menggunakan identitas Euler $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$ diperoleh:

$$\mathbf{z_1}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\,\mathbf{v}) + i\,(e^{\alpha t}\cos(\beta t)\mathbf{v} + \sin(\beta t)\,\mathbf{u}) \tag{2.9}$$

$$\mathbf{z_2}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\,\mathbf{v}) - i\,(e^{\alpha t}\cos(\beta t)\mathbf{v} + \sin(\beta t)\,\mathbf{u}) \tag{2.10}$$

Karena dua vektor real $\frac{1}{2}(\mathbf{z_1}(t) + \mathbf{z_2}(t)) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\,\mathbf{v})$ dan $\frac{1}{2i}(\mathbf{z_1}(t) - \mathbf{z_2}(t)) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathbf{v} + \sin(\beta t)\,\mathbf{u})$ merupakan solusi dari Sistem (2.4), maka kombinasi linier (2.11) dari kedua vektor tersebut merupakan solusi umum dari Sistem (2.4):

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\,\mathbf{v}) + c_2 e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathbf{v} + \sin(\beta t)\,\mathbf{u}) \tag{2.11}$$

Untuk $D = 0$, misalkan λ merupakan nilai eigen dari matriks koefisien sistem, misalkan $\mathbf{u_1}$ merupakan nilai eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ, maka terdapat vektor eigen $\mathbf{u_2}$ yang memenuhi persamaan $(\lambda I - A)\mathbf{u_2} = \mathbf{u_1}$ sedemikian sehingga solusi umum yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{u_1} + c_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}) \tag{2.12}$$

Kemudian, konstanta c_1 dan c_2 dapat ditentukan sesuai dengan syarat nilai awal jika ada (Noonburg, 2014).

2.4. Pengertian Sistem Kontrol

Sistem kontrol merupakan sistem dinamik yang menggabungkan *input* kontrol yang didesain untuk mencapai tujuan pengontrolan. Sistem kontrol dinamik dikatakan berdimensi terbatas jika ruang fasenya (contohnya ruang vektor atau semacamnya) memiliki dimensi yang terbatas. Sistem kontrol dengan waktu yang kontinu dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = f(\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x} \in X, \mathbf{u} \in U, \text{dan } t \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

dengan peubah $\mathbf{x} \in X$, menyatakan keadaan (*state*) pada sistem, sedangkan $\mathbf{u} \in U$ melambangkan *input* pada sistem. X dan U merupakan himpunan terbuka dengan $X \subset \mathbb{R}^n$ dan $U \subset \mathbb{R}^m$. Pemetaan $f : X \times U \to U$ merupakan fungsi nonlinier yang mendekati solusi analitik dari suatu sistem kontrol. $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ akan dilambangkan dengan $\dot{\mathbf{x}}$ sebagai kecepatan yang dialami oleh gerobak (Meyers, 2011).

Sistem kontrol dapat diartikan sebagai suatu kumpulan komponen yang saling berhubungan untuk mengontrol suatu sistem. Masukan (*input*) dan keluaran (*output*) merupakan peubah atau besaran fisis. *Output* merupakan hal yang dihasilkan oleh pengendalian atau kontrol, sedangkan *input* adalah yang mempengaruhi kontrol serta yang mengatur *output* yang akan dihasilkan (Oktaria, 2015).

2.5. Model Ruang keadaan (*State-space Model*)

Model Ruang Keadaan atau *State-space Model* merupakan representasi dari sistem kontrol pada sistem dinamik linier yang dinyatakan dalam bentuk notasi matriks. Salah satu bentuk umum model ruang keadaan yang sering digunakan adalah:

$$\dot{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{2.14}$$

$$y = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \tag{2.15}$$

dengan $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ sebagai vektor *input* dan $\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^n$ sebagai vektor keadaan. Matriks koefisien sistem merupakan matriks simetrik berukuran $n \times n$. Nilai eigen matriks koefisien sistem sangat penting dalam menentukan bagaimana sistem bekerja. Persamaan (2.15) adalah persamaan observasi yang menentukan hubungan antara data dengan vektor keadaan $\mathbf{x}$ tersebut (Aoki, 2013).

2.6. Keterkontrolan dan Keterobservasian

Definisi 2.6.1. Suatu sistem dapat dikontrol pada waktu t_0 jika untuk setiap keadaan $\mathbf{x}(t_0)$ pada suatu model ruang keadaan dan setiap $\mathbf{x}(t_1)$ pada model tersebut, terdapat waktu t_1 dengan $t_1 > t_0$ serta *input* $\mathbf{u}[t_0, t_1]$ sehingga akan memindahkan keadaan $\mathbf{x}(t_0)$ menjadi keadaan $\mathbf{x}(t_1)$ pada waktu t_1. Selain dari itu, maka sistem dapat dikatakan tidak dapat dikontrol pada waktu t_0.

Sifat keterkontrolan merupakan sifat yang menghubungkan antara *input* dengan keadaan (*state*) benda. Oleh karena itu, sifat ini akan melibatkan matriks koefisien sistem dan B dari model ruang keadaan sistem gerobak yang terkait. Dari definisi keterkontrolan, dapat diamati jika sistem dapat dikontrol, berarti benda dapat dikendalikan sesuai keinginan. Akan tetapi, jika suatu sistem bukan sistem yang dapat dikontrol, maka gerobak tidak akan dapat dikembalikan menuju kesetimbangan sesuai yang diinginkan.

Pada umumnya, kontrol yang akan digunakan menggunakan hukum kontrol berikut.

$$\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t) \tag{2.16}$$

Untuk mengimplementasikan hukum kontrol ini, sistem yang ada harus dimodifikasi semua peubah keadaannya. Namun, dalam praktiknya, tidak semua peubah keadaan dapat diukur. Untuk itu, dapat diasumsikan bahwa hanya *output* $\mathbf{y}(t)$ dan *input* $\mathbf{u}(t)$ yang dapat diukur. Sistem gerobak dapat diobservasi jika semua peubah $\mathbf{x}(t)$ berkaitan dengan input $\mathbf{u}(t)$ dan output $\mathbf{y}(t)$. Oleh karena itu, jika setidaknya terdapat satu peubah keadaan yang tidak dapat diobservasi, maka sistem tersebut tidak dapat diobservasi. Akibatnya, salah satu peubah keadaan tersebut tidak berpengaruh terhadap *output* $\mathbf{y}(t)$ yang terjadi.

Definisi 2.6.2. Sistem pada gerobak dikatakan terobservasi pada waktu t_0 jika untuk setiap $\mathbf{x}(t_0)$ pada waktu t_0 pada suatu model ruang keadaan, terdapat waktu t_1 dengan $t_1 > t_0$ sehingga jika ditinjau dari *input* $\mathbf{u}[t_0, t_1]$ dan output $\mathbf{y}[t_0, t_1]$, dapat ditentukan keadaan awal $\mathbf{x}(t_0)$. Selain dari itu, sistem tersebut dikatakan tidak terobservasi pada waktu t_0 (Gopal, 1993).

Teorema 2.6.1 (Polderman dan Willems, 1997)

Jika suatu sistem kontrol didefinisikan dengan:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{2.17}$$

dapat dikontrol, maka rank$(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B) = n$.

Sistem dinamik yang digambarkan dengan Persamaan (2.14) dan (2.15) dapat dikatakan sistem yang dapat dikontrol (*controllable*) jika $\text{rank}(B, AB, A^2B \ldots, A^{n-1}B) = n$, serta dapat diobservasi jika $\text{rank}(C^T, A^TC^T, (A^T)^2 C^T, \ldots, (A^T)^{n-1}C^T) = n$ (Lagarrigue dan Loria, 2005).

2.7. Teori Kestabilan Sistem

Permasalahan mengenai keterkendalian suatu sistem pada umumnya secara matematis jika diberikan keadaan awal $\mathbf{x_0} \in X$, keadaan terakhir $\mathbf{x_T} \in X$, dan waktu $T > 0$ digambarkan sebagai berikut.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \end{cases} \tag{2.18}$$

Titik *equilibrium* untuk sistem tersebut adalah titik $\bar{\mathbf{x}} \in X$ sehingga terdapat nilai $\bar{\mathbf{u}} \in U$ sedemikian sehingga $f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0$. *Input* kontrol dapat dinyatakan dalam fungsi $g: X \to U$ dengan $g(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{u}}$, sehingga Sistem (2.18) berubah menjadi:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), g(\mathbf{x}(t))) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \end{cases} \tag{2.19}$$

Ketika $\mathbf{x}(t)$ bergerak menuju nol untuk $t \to \infty$ dan keadaan $\mathbf{x}(t)$ yang terbentuk merupakan fungsi kontinu pada $0 \le t < \infty$, maka $\mathbf{x}(t)$ tersebut merupakan solusi dari persamaan (2.19) untuk setiap fungsi $f(\mathbf{x}(t), g(\mathbf{x}(t)))$ yang berlaku untuk semua t (Meyers, 2011).

Persamaan (2.18) memiliki bentuk lain sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \end{cases} \tag{2.20}$$

Terdapat kriteria kestabilan sistem sederhana yang ditinjau dari tanda pada nilai eigen matriks koefisien sistem. nilai eigen $\lambda_{1,2,\ldots,n}$ pada matriks koefisien sistem. Jika semua nilai eigen memiliki bagian nilai real negatif, maka setiap solusi yang terbentuk akan bergerak mendekati nol untuk $t \rightarrow \infty$, solusi trivial dari sistem tersebut menunjukkan bahwa sistem dapat dikatakan stabil asimtotik. Jika ada nilai eigen memiliki bagian nilai real positif, maka beberapa solusi akan bergerak menjauhi titik *equilibrium*, sehingga menimbulkan sistem yang tidak stabil (Murdock, 1999).

Selain itu, terdapat beberapa jenis nilai eigen yang akan terbentuk beserta respon yang akan terjadi. Adapun daftar jenis respon yang terbentuk berdasarkan nilai eigen yang akan dibentuk dari matriks koefisien sistem antara lain sebagai berikut.

Tabel 2.1. Daftar jenis respon yang terbentuk berdasarkan nilai eigen matriks koefisien sistem pada sistem.

No.	Jenis Nilai Eigen yang Terbentuk	$(\lambda = \alpha \pm i\beta)$	Respon yang Terbentuk
1	Bilangan real negatif (kecil)	$\lambda = -\alpha$	Fungsi monoton, bergerak menuju kestabilan dengan lambat (Stabil)

2	Bilangan imajiner konjugat	$\lambda = \pm i\beta$	Gerak osilasi terikat berkelanjutan (tidak stabil)
3	Bilangan kompleks konjugat dengan bilangan real positif	$\lambda = \alpha \pm i\beta$	Gerak osilasi tak terikat (tidak stabil)
4	Bilangan real positif	$\lambda = \alpha$	Fungsi monoton tak terikat (tidak stabil)
5	Nol	$\lambda = 0$	Fungsi konstan (Tidak stabil)
6	Bilangan kompleks konjugat dengan bilangan real negatif	$\lambda = -\alpha \pm i\beta$	Gerak osilasi teredam (Stabil)
7	Bilangan real negatif (besar)	$\lambda = -\alpha$	Fungsi monoton, menuju titik kestabilan dengan cepat (stabil)

Notasi λ menyatakan nilai eigen matriks koefisien sistem, α menyatakan sebagai bagian real dari nilai eigen, dan β sebagai bagian imaginer dari nilai eigen (Marsili-Libelli, 2016).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan saat Semester Ganjil Tahun Ajaran 2017/2018 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara simulasi dengan menggunakan software GNU Octave-4.2.1®, Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membuat model matematika sistem dinamik dari gerobak dengan menggunakan hukum II Newton berdasarkan asumsi yang ditetapkan.
2. Mengkaji respon kontrol dengan *input* fungsi *step* dan fungsi impuls.
3. Menguji apakah sistem pada gerobak dapat dikontrol dan diobservasi.
4. Menentukan beberapa alternatif kontrol dengan memvariasikan parameter yang terkait dengan *input* kontrol tersebut.

5. Menentukan respon analitik respon gerobak dengan menggunakan metode persamaan differensial biasa.
6. Mensimulasikan sistem yang sudah diberi kontrol *input* serta memvariasikan parameter yang terkait dengan kontrol *input* untuk melihat apa yang terjadi pada sistem.
7. Menginterpretasikan hasil yang didapat dan kemudian mengambil kesimpulan.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa sistem pada gerobak merupakan sistem yang dapat dikontrol dan diobservasi. Kontrol input yang baik untuk diberlakukan pada gerobak yaitu model kontrol dengan persamaan $u = -100\,y - 10\,\frac{dy}{dt}$. Massa gerobak mempengaruhi waktu yang diperlukan gerobak agar kembali menuju titik kesetimbangan. Semakin besar massa gerobak, maka semakin lama waktu yang diperlukan gerobak untuk kembali menuju titik kesetimbangan. Dengan batas waktu 5 detik dan toleransi jarak simpangan gerobak 0,001 cm dari titik *equilibrium*, sistem bekerja pada gerobak dengan massa kurang dari 3,5 Kg.

B. Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan lebih jauh lagi dengan mempertimbangkan beberapa faktor yang diperkirakan akan mempengaruhi respon yang diperoleh seperti bahan penyusun gerobak, banyaknya roda, beban yang ditopang oleh roda gerobak, serta kondisi jalan yang bergelombang. Selain itu, penelitian ini masih berbentuk simulasi rancangan model matematika sehingga memerlukan uji coba kontrol secara langsung di lapangan.

DAFTAR PUSTAKA

Aoki, M.2013. *State Space Modeling of Time Series*. Springer-Verlag, Inc., New York.

Fishwick, P.A. 2007. *Handbook of Dynamic System Modeling*. Chapman & Hall/CRC. New York

Gopal, M. 1993. *Modern Control Systems Theory*. New Age International, New Delhi.

Lagarrigue, F.L. dan Loria, A. 2005. *Advanced Topics in Control Systems Theory*. Springer-Verlag Paris Inc., Paris.

Marsili-Libelli, S. 2016. *Environment Systems Analysis with MATLAB®*. CRC Press, Florida.

Megretski, A. 2003. Dynamics of Nonlinear Systems. Lecture Note. Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.

Meyers, R.A. 2011. *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Inc., New York

Murdock, J.A. 1999. *Perturbations: Theory and Methods*. Siam, New York.

Noonburg, V.W. 2014. *Ordinary Differential Equations: From Calculus to Dynamical Systems*. Mathematical Association of America, Washington, D.C.

Oktaria, B.W. 2015. Simulasi Sistem Pengendalian Level Air pada Water Surge Tank 1001A SMF Duri PT. Chevron Pacific Indonesia Menggunakan Perangkat Lunak LabVIEW. Skripsi. Universitas Sumatera Utara, Medan.

Polderman, J.W. dan Willems, J.C.1997. *Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach*. Springer-Verlac, Inc., New York.