ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN MASA INKUBASI PANJANG DAN MASA INKUBASI PENDEK

(Skripsi)

Oleh:

NI WAYAN FITRI HANDYANI

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2018

ABSTRAK

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN MASA INKUBASI PANJANG DAN MASA INKUBASI PENDEK

Oleh

NI WAYAN FITRI HANDYANI

Malaria adalah penyakit yang disebabkan oleh protozoa dari genus *Plasmodium* yang berada di dalam sel darah merah atau sel hati dan ditularkan dari orang ke orang melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Penyebaran penyakit malaria dapat dimodelkan dengan ODE dan DDE. Dimana, variabel-variabel yang digunakan adalah $s_H, e_H^s, e_H^l, i_H, r_H, s_M$ dan i_M. Pada penelitian ini dikaji mengenai titik equilibrium, kestabilan titik equilibrium melalui angka reproduksi dasar (R_0 atau R_d) untuk masaing-masing model ODE dan DDE. Dengan menggunakan data yang ada (kota Bandar Lampung) dilakukan simulasi dibawah asumsi tertentu untuk melihat profil dinamik dari masing-masing variabel. Dari hasil penelitian diketahui bahwa, keadaan bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika nilai $R_0 < 1$ dan $R_d < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$ dan $R_d > 1$. Keadaan endemik penyakit stabil asimtotik lokal dan selalu ada jika nilai $R_0 > 1$ dan $R_d > 1$. Dari hasil pengujian secara numerik diperoleh bahwa perubahan nilai bebrerapa parameter mempengaruhi peningkatan laju manusia terinfeksi sehingga mengakibatakan perubahan laju kestabilan. Artinya adanya perubahan nilai parameter terkait akan mempengaruhi kecepatan kestabilan pada keadaan endemik penyakit

Kata kunci: Malaria, ODE, DDE, Titik Equilibrium, dan Angka Reproduksi Dasar.

ABSTRACT

ANALYZE THE STABILITY OF MODELLING MALARIA DYNAMICS WITH LONG AND SHORT INCUBATION PERIOD

By

NI WAYAN FITRI HANDYANI

Malaria is a mosquito-borne infectious disease caused by protozoan parasites of the genus *Plasmodium*, while feeding on humans, infected *Anopheles* female mosquitoes inject parasite into the bloodstream, wich infect liver cells. The transmission of malaria can be modelled by ODE and DDE. Where, the variables used are $s_H, e_H^s, e_H^l, i_H, r_H, s_M$ and i_M. In this research we review about equilibrium points, the stability its through the basic reproduction number (R_0 or R_d) for each model ODE and DDE.Using available data (Bandar Lampung city), we simulate with assumptions the dynamic profile of each variable. The result show, the disease free equilibrium of system is locally asymstotically stable if $R_0 < 1$ and $R_d < 1$ and unstable if $R_0 > 1$ and $R_d > 1$. The endemic equilibrium is locally asymptotically stable whenever exists, i.e. if $R_0 > 1$ and $R_d > 1$. From the results of numerical testing obtained that changes in the value of several parameters affect the increase of infected human rate, resulting in changes in the rate of stability. This means that any changes in the value of related parameters will affect the speed of stability in the state of endemic equilibrium.

Keyword : Malaria, ODE, DDE, Equilibrium Point and Basic Reproduction Number.

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN MASA INKUBASI PANJANG DAN MASA INKUBASI PENDEK

Oleh

NI WAYAN FITRI HANDYANI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN MASA INKUBASI PANJANG DAN MASA INKUBASI PENDEK**

Nama Mahasiswa : *Ni Wayan Fitri Handyani*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031085

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryawan, S.Si., M.Si.	**Drs. Tiryono Ruby, Ph.D.**
NIP 19740316 200501 1 001	NIP 19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Aang Nuryawan, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Drs. Tiryono Ruby, Ph.D.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Subian Saidi, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **19 April 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Ni Wayan Fitri Handyani**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031085**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Masa Inkubasi Panjang dan Masa Inkubasi Pendek**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, April 2018

Yang Menyatakan

Ni Wayan Fitri Handyani

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Sidorejo Kec. Sekampung Udik, Kab. Lampung Timur, pada tanggal 19 Agustus 1996. Penulis merupakan anak kelima dari pasangan Bapak I Ketut Gede Astawa dan Ibu Ni Wayan Wiraga, serta adik perempuan dari ketiga orang kakak laki-laki dan kakak dari dua orang adik.

Penulis telah menyelesaikan pendidikan dasar di SD Negeri 4 Bandar Agung, Lampung Timur pada tahun 2008. Pendidikan mengah pertama di SMP Negeri 1 Bandar Sribhawono, Lampung Timur pada tahun 2011. Pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Bandar Sribhawono, Lampung Timur pada tahun 2014.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada tahun 2014. Penulis terdaftar sebagai anggota GEMATIKA (Generasi Mahasiswa Himpunan Matematika) FMIPA Unila pada tahun periode 2014/2015. Penulis menjadi GARUDA BEM FMIPA Unila dan Magang Natural pada tahun periode 2014/2015.

'Everything is nothing'

Sesungguhnya kita tak pernah benar-benar

memiliki apa yang kita miliki,

karena sejatinya segalanya hanya titipan belaka.

Kesendirian adalah cara untuk belajar

hidup yang lebih baik

Jangan persiapkan dirimu untuk keberhasilan,

melainkan persiapkan dirimu untuk kegagalan.

Cinta adalah dia yang memahamimu,

walau hanya dalam diam.

PERSEMBAHAN

Karyaku yang sederhana ini kupersembahkan kepada:

Ayah dan Ibu Tercinta

Terima kasih kepada Bapak dan Ibu yang selalu mendo'akan kesuksesanku, memberi semangat, nasihat, dukungan serta kasih sayang yang tiada henti.

Kakakku Wayan Arison, Nyoman Leo dan Ketut Adi

Terima kasih kepada Kakak- kakakku yang selalu memberikan dukungan dan nasehatnya selama ini

Adikku Nyoman Nanda dan Ketut Sudire

Terima kasih kepada adik-adikku yang selalu memberikan semangat dan kecerian dalam hidup.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada para sahabatku yang selalu memberikan semangat, do'a, dan motivasi, serta kenangan indah selama ini.

Almamater dan Negeriku

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur atas asung kerta wara nugraha Hyang Widhi yang telah memberikan berkah cinta, kasih dan anugrah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul "Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Masa Inkubasi Panjang dan Masa Inkubasi Pendek".

Penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak yang membantu, memberikan bimbingan, saran ataupun dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Untuk itu penulis mengucapakan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku pembimbing utama yang senantiasa membimbing dan memberikan arahan kepada penulis
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku pembimbing kedua yang senantiasa dengan sabar memberikan arahan dan saran kepada penulis.
3. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku penguji yang telah memberikan kritik dan sarannya dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu Widiarti, S.Si, M.Si, selaku akademik yang telah banyak memberikan dukungan dan mendampingi penulis selama masa perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

6. Seluruh dosen , staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
7. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
8. Ayah dan Ibu tercinta yang senantiasa mendoakan kesuksesan penulis.
9. Kakak-kakak tersayang I Wayan Arison, Nyoman Leo dan Ketut Adi, serta Adik-adik tersayang Nyoman Nanda dan Ketut Sudire yang selalu memberikan dukungan dan doanya.
10. Sahabat-sahabat penulis, Inggi, Billa, Santi, Uung, Wahyu, Darma, Iin, Vivin, Uci, Nandra dan Ijul, yang selalu memberi semangat dan dukungannya.
11. Teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2014 dan teman-teman Natural atas kecerian dan kebersamaannya.
12. Kepada seluruh pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran pembaca sangat diharapkan untuk kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Bandar lampung, April 2017

Penulis

Ni Wayan Fitri Handyani

1417031085

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL..xiv

DAFTAR GAMBAR..xv

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 4
1.3 Manfaat Penelitian 4

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika 6
2.2 Distribusi Eksponensial 6
2.3 Persamaan Differensial Biasa (*Ordinary Differensial Equation*/ ODE)..7
2.4 Persamaan Differensial Waktu Tunda (*Delay Differensial Equation* /DDE) 8
2.5 Persamaan Linier dan Tak Linier 9
2.6 Nilai Eigen...10
2.7 Persamaan Karakteristik 10
2.8 Kesetimbangan dan kestabilan 11
2.8.1 Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium)..11
2.8.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan..12
2.9 Linierisasi 14
2.10 Model Epidemi SEIR...15
2.10.1 Definisi Model Epidemi SEIR...15
2.10.2 Transformasi Model Epidemi SEIR 17
2.11 Rasio Reproduksi Sistem dan *Next Generation* Matriks...................18
2.12 Kriteria Routh-Hurwitz...20
2.13 Persamaan Logistik 21

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian..22
3.2 Data Penelitian 22
3.3 Metode Penelitian 22

IV. HASIL DAN PEMBAHSAN

4.1 Model Deskripsi P.*Vivak* Malaria..24
4.1.1 Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Persamaan Diferensial biasa 26
4.1.2 Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Persamaan Diferensial Waktu Tunda 29
4.2 Titik Equilibrium dari Masa Inkubasi Malaria 30
4.2.1 Titik Equilibrium dari Model Persamaan Diferensial biasa......30
4.2.2 Titik Equilibrium dari Model Persamaan Diferensial Waktu Tunda..37
4.3 Kestabilan Titik Equilibrium Berdasarkan Angka Reproduksi Dasar R_0 pada Model Persamaan Diferensial Biasa 42
4.3.1 Angka Reproduksi Dasar R_0 42
4.3.2 Kestabilan Titik Equilibrium Berdsarkan R_0 46
4.4 Kestabilan Titik Equilibrium Berdasarkan Angka Reproduksi Dasar R_d pada Model Persamaan Diferensial Waktu Tunda.......................54
4.4.1 Angka Reproduksi Dasar R_d 54
4.4.2 Kestabilan Titik Equilibrium Berdsarkan R_d 57
4.5 Simulasi Kedua Model Persamaan 64
4.5.1 Simulasi Keadaan Bebas Penyakit..65
4.5.2 Simulasi Keadaan Endemik Penyakit 66
4.6 Interpretasi Model...74

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 1. Parameter Model 17

Tabel 2. Variabel yang digunakan 25

Tabel 3. Parameter Model yang digunakan... 26

Tabel 4. Nilai Parameter untuk Simulasi Model 65

Tabel 5. Proporsi Jumlah Manusia Terinfeksi dan Angka Reproduksi Dasar 66

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 1. Diagram Transfer Model Epidemi SEIR. 17

Gambar 2. Diagram Alur P.Vivax Malaria.. 24

Gambar 3. Proporsi Manusia Terinfeksi (i_H) dalam Jam, untuk $m = 10$, $a_1 = b_1 = c_1 = 0.3$, $a_2 = 0.4$, $b_2 = c_2 = 0.5$ dan Nilai $R_{01} > 1$, $R_{02} > 1$, $R_{d1} > 1$ dan $R_{d2} > 1$. 67

Gambar 4. Proporsi Manusia Terinfeksi (i_H) dalam Jam, $m = 1.5$, $a_1 = b_1 = c_1 = 0.3$, $a_2 = 0.4$, $b_2 = c_2 = 0.5$ dan Nilai $R_{01} > 1$, $R_{02} > 1$, $R_{d1} < 1$ dan $R_{d2} > 1$. 68

Gambar 5. Proporsi Manusia Terinfeksi (i_H) dalam Jam, , $m = 10$, $d_{s1} = 0.022$, $d_{s2} = 0.04$, $d_{l1} = 0.002$, $d_{l2} = 0.003$ dan Nilai $R_{01} > 1$, $R_{02} > 1$, $R_{d1} > 1$ dan $R_{d2} > 1$. 69

Gambar 6. Proporsi Manusia Terinfeksi (i_H) dalam Jam, $m = 1.5$, $d_{s1} = 0.022$, $d_{s2} = 0.04$, $d_{l1} = 0.002$, $d_{l2} = 0.003$ dan Nilai $R_{01} > 1$, $R_{02} > 1$, $R_{d1} < 1$ dan $R_{d2} > 1$. 70

Gambar 7. Model Persamaan Diferensial Biasa dengan $m = 10$, $a = b = c = 0.3$ $d_s = 0.022$, $d_{l1} = 0.002$ dan Nilai $R_0 > 1$ 71

Gambar 8. Model Persamaan Diferensial Biasa dengan $m = 1$, $a = b = c = 0.3$ $d_s = 0.022$, $d_{l1} = 0.002$ dan Nilai $R_0 < 1$ 72

Gambar 9. Grafik Model Persamaan Diferensial Waktu Tunda dengan $m = 10$, $a = b = c = 0.3$ $d_s = 0.022$, $d_{l1} = 0.002$ dan Nilai $R_d > 1$ 73

Gambar 10. Grafik Model Persamaan Diferensial Waktu Tunda dengan $m = 1$, $a = b = c = 0.3$ $d_s = 0.022$, $d_{l1} = 0.002$ dan Nilai $R_d < 1$ 74

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Persamaan diferensial merupakan cabang dari matematika yang sudah berkembang sejak jaman Isaac Newton dan Leibnitz, hingga saat ini masih memiliki peran yang besar serta banyak diterapkan pada berbagai bidang ilmu seperti fisika, teknik, biologi, kimia, ekologi, ekonomi dan ilmu-ilmu lainnya. Persamaan Diferensial digunakan untuk menyatakan hubungan yang kompleks antara satu variabel tak bebas dengan satu atau beberapa variabel bebas lainnya , ini terlihat misalnya pada masalah penyebaran penyakit malaria.

Malaria adalah penyakit yang mengancam kehidupan dan disebabkan oleh protozoa dari genus *Plasmodium* yang berada di dalam sel darah merah atau sel hati dan ditularkan dari orang ke orang melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Waktu antara gigitan nyamuk dan pelepasan parasit menuju hati disebut dengan masa inkubasi. Masa inkubasi malaria dibedakan menjadi dua, yaitu masa inkubasi ekstrinsik dan masa inkubasi intrinsik. Masa inkubasi intrinsik adalah rentang waktu sejak *sporozoit* (bakteri berbentuk batang) masuk ke tubuh manusia sampai mengalami gejala klinis awal yaitu demam. Sedangkan masa inkubasi ekstrinsik adalah rentang waktu siklus *sporogoni* (siklus dalam tubuh nyamuk). Masa inkubasi intrinsik dibedakan menjadi dua yaitu masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek. Masa inkubasi malaria berkisar antara 8-40 hari sesuai dengan jenis spesies *Plasmodium* dan suhu lingkungannya.

Menurut laporan Badan Kesehatan Dunia (WHO) tahun 2010, terdapat 225 juta kasus malaria dan diperkirakan 781 ribu meninggal pada tahun 2009. Data ini mengalami penurunan dari 233 juta kasus malaria dan 985 ribu kematian pada tahun 2000. Sebagian besar kematian terjadi di antara anak yang tinggal di Afrika di mana seorang anak meninggal setiap 45 detik akibat malaria dan penyakit ini menyumbang sekitar 20% dari semua kematian anak-anak di dunia (WHO, 2011).

Di Indonesia, hingga akhir tahun 2008 kasus malaria menunjukkan kecenderungan menurun, namun masih menjadi masalah kesehatan masyarakat. Berdasarkan data Departemen Kesehatan Indonesia baik API (Annual Parasite Incidence) maupun AMI (Annual Malaria Incidence) menunjukan penurunan selama periode 2000-2008. API pada tahun 2000 berada pada angka 0,81 per seribu penduduk terus turun hingga 0,15 per seribu penduduk pada tahun 2004. Angka ini meningkat menjadi 0,19 pada tahun 2006, untuk kemudian kembali turun pada angka 0,16 per seribu penduduk pada tahun 2007-2008. Hal yang sama terjadi pada AMI. Pada periode 2000-2004 AMI cenderung menurun dari 31,09 menjadi 21,2 per seribu penduduk kemudian hingga tahun 2008 turun menjadi 18,82 per seribu penduduk (Depkes RI, 2009).

Penyakit malaria masih tersebar luas di berbagai daerah, dengan derajat infeksi yang bervariasi. Menuju *Malaria Free Asia Pasicif* di tahun 2030, ternyata malaria masih menjadi ancaman di dunia, terutama di Indonesia. Tahun 2015, sebanyak 438 ribu orang meninggal karena malaria dan 3,2 juta orang memiliki resiko terjangkit malaria diseluruh dunia. Ini merupakan angka yang mengerikan, mengingat banyak wilayah di Indonesia yang juga merupakan daerah endemik malaria serta penyebaran malaria yang relatif cepat antara nyamuk ke manusia atau sebaliknya. Berdasarkan permasalahan diatas, penulis tertarik untuk mengkaji penyebaran penyakit malaria dengan masa inkubasi intrinsik yaitu masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek, sehingga dapat dimanfaatkan untuk memperkirakan model dinamika perilaku penyebaran penyakit malaria di suatau wilayah tertentu.

Dalam hal ini, penulis akan mengkaji model penyebaran penyakit malaria dengan masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek menggunakan persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation* / ODE) dan persamaan diferensial waktu tunda (*Delay Differential Equation/* DDE). Kedua persamaan ini memiliki perbedaan pada waktu tunda masa inkubasi panjang, jika pada model persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation* / ODE) tidak terdapat tundaan waktu pada inkubasi panjang, sedangkan untuk persamaan diferensial waktu tunda

(*Delay Differential Equation/* DDE) memiliki tundaan waktu sebasar τ pada masa inkubasi panjangnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menentukan model penyebaran penyakit malaria dengan masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek menggunakan model persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation* / ODE) dan persamaan diferensial waktu tunda (*Delay Differential Equation/* DDE)
2. Memperkirakan ada atau tidaknya keadaan endemik penyakit malaria pada suatu wilayah tertentu.
3. Menganalisis kestabilan keadaan endemik penyakit pada suatu wilayah.
4. Mengetahui dinamika perilaku penyebaran penyakit malaria dengan masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek melalui pendekatan simulasi numerik.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini, adalah sebagai berikut:

1. Diharapkan dapat menambah wawasan mengenai keterkaitan ilmu Matematika dan ilmu Biologi.

2. Dapat dijadikan sebagai salah satu referensi penelitian terhadap aplikasi persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation*/ ODE) dan persamaan diferensial waktu tunda (*Delay Differential Equation/* DDE) khususnya pada masalah penyebaran penyakit malaria dengan masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek.
3. Dapat memperkirakan penyebaran penyakit masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek dengan mengubah parameter sehingga mampu memproyeksikan jumlah penyebaran penyakit pada waktu tertentu dan memperkirakan penyebaran penyakit malaria dengan masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek dengan memvariasikan parameter.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan penyusunan suatu deskripsi dari beberapa perilaku dunia nyata (fenomena-fenomena alam) kedalam bagian matematika yang disebut dunia matematika. Pemodelan matematika merupakan proses dalam menurunkan model matematika dari suatu fenomena berdasarkan asumsi-asumsi yang digunakan. Proses ini merupakan langkah awal yang tak terpisahkan dalam menerapkan matematika untuk mempelajari fenomena-fenomena alam, ekonomi, sosial maupun fenomena lainnya (Cahyono, 2013).

2.2 Distribusi Eksponensial

Dalam penerapannya, distribusi eksponensial digunakan pada teori antrian sebagai contoh misalnya, selang waktu antara keadaan darurat dan kedatangan di rumah sakit, lama waktu mulai dipakai sampai rusaknya suatu suku cadangan, selang waktu terjadinya bencana, jarak penglihatan antara margasatwa dan spesies berbahaya dalam kejadian acak yang dapat digambarkan peluangnya. Waktu atau selang kejadian antara peubah acak disebut peluang distribusi eksponensial. Distribusi eksponensial juga disebut dengan distribusi selang waktu.

Fungsi Distribusi peluang, mean dan standar deviasi dari distribusi eksponensial peubah acah x dapat dilihat:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \text{ ; (x> 0)} \tag{2.1}$$

$\mu = \theta$ $\sigma = \theta$

Tidak seperti distribusi normal, yang memiliki bentuk dan daerah asal untuk dua nilai σ dan μ, bentuk dari distribusi eksponensial hanya pada satu nilai yaitu θ (McClave dan Sincich, 2000).

2.3 Persamaan Diferensial Biasa (*Ordinary Differential Equation* / ODE)

Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannya. Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan diferensial biasa (ODE) jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu variabel independen (Bronson dan Costa, 2007).

Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari derivatif yang terdapat dalam persamaan diferensial. Derajat dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dalam persamaan diferensial. Atas dasar pengertian di atas, persamaan diferensial:

$$y'(x) = f(x), x \in R \; dan \; y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

adalah persamaan diferensial orde pertama dan berderajat satu. Permasalahan ini dikenal juga dengan sebutan masalah nilai awal (MNA). Solusi dari persamaan diferensial (2.2) adalah mencari sebuah fungsi $y(x)$ yang memenuhi

$y'(x) = f(x)$ dan syarat awal $y(x_0) = y_0$ dengan y_0 sebuah konstanta. Variabel tak bebas adalah variabel yang nilainya bergantung pada nilai variabel bebas. Variabel bebaslah yang menentukan nilai variabel tak bebas dan bahkan sebaliknya. Huruf y sering dipakai sebagai lambang variabel tak bebas, sedangkan huruf x dan t digunakan sebagai variabel bebas. Diferensial variabel tak bebas dilakukan terhadap variabel bebasnya. Beberapa bentuk umum persamaan diferensial, yaitu:

1. Bentuk umum persamaan diferensial linear orde satu:

   $$y' + py = r \qquad (2.3)$$

   p & r adalah fungsi x atau konstan dan tidak mengandung y.

2. Bentuk umum persamaan diferensial linear orde dua:

   $$y'' + py' + qy = r \qquad (2.4)$$

   p , q dan r adalah fungsi x atau konstan dan tidak mengandung y.

3. Bentuk umum persamaan diferensial linear orde n:

   $$a_0 \frac{d^n y}{d^n x} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d^{n-1} x} + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = r \qquad (2.5)$$

   ɑ & r adalah fungsi x atau konstan dan tidak mangandung y (Degeng, 2007).

2.4 Persamaan Diferensial Waktu Tunda (*Delay Differential Equation/* DDE)

Persamaan diferensial waktu tunda adalah suatu persamaan diferensial fungsional yang sederhana dan lebih sering muncul dalam persoalan nyata. Hal ini berarti bahwa persamaan yang menyatakan beberapa turunan dari x pada waktu t, terhadap x dan turunan-turunannya yang lebih rendah pada waktu t, dan pada beberapa waktu sebelumnya $(t - \tau)$, dengan τ menyatakan besarnya tundaan waktu. Persamaan diferensial tundaan mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t-\tau_1), .. x(t-\tau_n)), \ t \geq t_0 \qquad (2.6)$$

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \geq t_0$$

(Arizona dan Faud, 2014).

2.5 Persamaan Linier dan Tak Linier

Diberikan persamaan diferensial biasa

$$F\left(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (2.7)$$

Dikatakan linier jika F adalah linier dalam variabel-variabelnya. Jadi secara umum persamaan diferensial biasa linier orde n dinyatakan dalam

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_n(t)y = g(t) \qquad (2.8)$$

Persamaan yang tidak dalam bentuk persamaan (2.8) merupakan persamaan tak linier. Contoh persamaan tak linier

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \qquad (2.9)$$

$$y'' + 2e^t y' + yy' + y^2 = t^4 \qquad (2.10)$$

Persamaan (2.9) merupakan persamaan pendulum dan tak linier karena ada suku $\sin\theta$. Sedangkan pada persamaan (2.10) karena terdapat suku yy' dan y^2 (Waluya, 2006).

2.6 Nilai Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ pada R^n disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; jelasnya,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{2.11}$$

Untuk skalar dengan sembarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan $\boldsymbol{x}$**,** disebut vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton dan Rorres, 2004).

Teorema 2.1 Nilai Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$ dan λ adalah sebuah bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen .

a) λ adalah sebuah nilai eigen dari A.

b) sistem persamaan $(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ memiliki solusi nontrivial.

c) Terdapat sebuah vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ pada R^n sedemikian rupa sehingga $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

d) λ adalah sebuah solusi dari persamaan karakteristik $det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A}) = 0$ (Anton dan Rorres, 2004).

2.7 Persamaan Karakteristik

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $A_{n\times n}$, dapat dengan menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix \tag{2.12}$$

Atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A) = 0 \tag{2.13}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan (2.13). Persamaan (2.13) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.14}$$

Disebut sebagai persamaan karakteristik matriks A. apabila diperluas lagi, deteminan $det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks A.

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristiknya menjadi:

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n\lambda = 0 \tag{2.15}$$

Berdasarkan teorema alajbar persamaan menjadi:

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n\lambda = 0 \tag{2.16}$$

Memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya n nilai eigen berbeda (Anton dan Rorres, 2004).

2.8 Kesetimbangan dan kestabilan

2.8.1 Titik Kesetimbangan (Equilibrium)

Titik kesetimbangan dari sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (Panvilof, 2004).

Sistem nonlinier dapat memiliki lebih dari satu titik kesetimbangan atau tidak sama sekali. Untuk sistem autonomous, titik-titik kesetimbangan diperoleh dengan

$$\dot{x} = f(x) = 0 \tag{2.17}$$

Titik $x = \dot{x}^*$ dalam ruang keadaan sebagai titik kesetimbanagan pada persamaan (2.17), jika titik kesetimbangan tersebut memiliki sifat yaitu keadaan sistem bermula pada $\dot{x}^*$, maka titik kesetimbangan tersebut akan tetap berada pada x^* untuk seluruh waktu yang akan datang (Widiarto, 2009).

2.8.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Pada persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{2.18}$$

Sebuah titik $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ merupakan titik kesetimbangan dari sistem (2.18), jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan $x(t) \equiv \bar{x}_0$ dan $y(t) \equiv \bar{y}_0$ merupakan penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.18) untuk semua $t \geq 0$ (Widiarto, 2009).

Bila sistem autonomous (2.18) linier dengan koefesien konstanta, yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{2.19}$$

dengan a, b, c dan d adalah konstanta dapat diperoleh penyelesaian secara eksplisit. Misalkan bahwa $ad - bc \neq 0$, maka titik (0,0) adalah satu-satunya titik kritis dari sistem persamaan (2.19), penyelesaian dari sistem berbentuk

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

Dimana λ merupakan akar dari persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + b)\boldsymbol{\lambda} + ad - bc = 0 \tag{2.20}$$

(Finizio dan Ladas, 1998).

Teorema 2.2 Uji Kestabilan

a) Titik kritis (0,0) dari sistem (2.19) stabil, jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan (2.20) adalah rill dan negatif atau mempunyai bagian rill tak positif.

b) Titik kritis (0,0) dari sistem (2.19) stabil asimtotis, jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan (2.20) adalah rill dan negatif atau mempunyai bagian rill yang negatif.

c) Titik kritis (0,0) dari sistem (2.19) tidak stabil jika salah satu atau kedua akar dari persamaan (2.20) rill dan positif atau jika paling tidak satu akar mempunyai bagian rill yang positif (Finizio dan Ladas, 1998).

2.9 Linierisasi

Linierisasi adalah proses hampiran persamaan diferensial tak linier dengan persamaan diferensial linier. Penyelesaian dari sistem autonomus dari persamaan (2.18), dimana f dan g adalah tak linier. Jika (x_0, y_0) merupakan titik kritis dari sistem autonomus tersebut, maka

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0 \qquad (2.21)$$

Selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier (x, y) disekitar (x_0, y_0) dengan melakuakn ekspansi menurut deret Taylor disekitar titik (x_0, y_0) yaitu dengan menghilangkan suku tak liniernya sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (2.22)$$

Bila dilakukan subtitusi $x - x_0 = u$ dan $y - y_0 = v$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$, pada keadaan setimbang $f(x, y) = g(x, y) = 0$, sehingga diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v \qquad (2.23)$$

Sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ di mana } A_0 = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

pada $x = x_0 \ dan \ y = y_0$. Matriks ini disebut matriks Jacobian dan akar-akar dari matriks Jacobian yang akan menentukan kestabilan sistem persamaan diferensial linier (Finzio dan Ladas, 1998)

2.10 Model Epidemi SEIR

2.10.1 Definisi Model Epidemi SEIR

Di dalam model SEIR, populasi manusia dibagi mrenjadi empat yaitu, *susceptible* adalah individu yang rentan terinfeksi dinotasikan dengan S, *infected* adalah individu yang positif terinfeksi dinotasikan dengan I, *exposed* adalah individu yang bisa terinfeksi tapi belum positif terinfeksi (*laten*) dinotasikan dengan E dan *recorvery* adalah individu yang kebal terhadap infeksi dinotasikan denganl R, yang masing-masing diberikan dengan bentuk s,e,i dan r, maka total populasi menjadi,

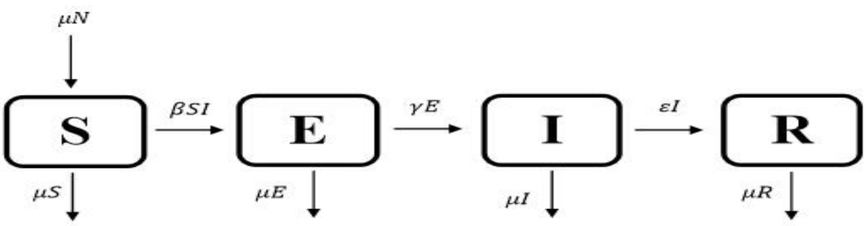
$$N = S + E + I + R \quad (2.25)$$

Tabel 1 mendefinisikan parameter yang digunakan dalam pemodelan matematika SEIR pada penyebaran penyakit yaitu sebagai berikut:

Tabel 1. Parameter Model

Parameter	Keterangan
γ	Laju infeksi dari individu *laten* menjadi terinfeksi
β	Laju infeksi dari individu rentan menjadi *laten*
ε	Laju kesembuhan kesembuhan tiap individu yang terinfeks
μ	Laju kelahiran dan kematian

Secara umum perubahan tersebut dapat dilihat pada diagram transfer berikut ini.



Gambar 1. Diagram Transfer Model Epidemi SEIR

Model persamaan diferensial utama dalam SEIR ini dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - \varepsilon I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon I - \mu R \qquad (2.26)$$

Dengan populasi model pada persamaan (2.25) (Iswanto, 2012).

2.10.2 Transformasi Model Epidemi SEIR

Sistem (2.26) dapat disederhanakan dengan penskalaan yaitu mengubah sistem (2.26) menjadi bentuk proporsi antara banyaknya individu dalam suatu subpopulasi dengan banyaknya populasi total. Penyederhanaan model ini digunakan untuk memudahkan dalam analisis yang akan dilakukan. Didefinisikan variabel baru yaitu proporsi banyaknya individu pada masing-masing kelas adalah sebagai berikut:

$$s = \frac{S}{N},\ e = \frac{E}{N},\ i = \frac{I}{N},\ r = \frac{R}{N}$$

Sehingga:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dS}{dt} - \frac{s}{N}\frac{dN}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dE}{dt} - \frac{e}{N}\frac{dN}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dI}{dt} - \frac{i}{N}\frac{dN}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{N}\frac{dR}{dt} - \frac{r}{N}\frac{dN}{dt} \tag{2.27}$$

dengan

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \tag{2.28}$$

didapat

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - \mu(S + E + I + R)$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \tag{2.29}$$

Dari persamaan (2.25) dan sistem (2.26), (2,27) dan (2.28) diperoleh transformasi model yang lebih sederhana yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta si - \mu s$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta si - \gamma e - \mu e$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma e - \varepsilon i - \mu i$$

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon i - \mu r \qquad (2.30)$$

(Iswanto, 2012).

2.11 Rasio Reproduksi Sistem dan *Next Generation Matriks*

Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0 merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar juga didefinisikan sebagai bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita suatu penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit tidak mewabah dan cenderung menghilang dari populasi namun jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan menyebar dalam populasi (Driessche dan Watmough, 2002).

Misalkan Terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya misalkan x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan atau sembuh), dan $x \in R^n\ dan\ y \in R^m$, untuk $m, n \in N$, sehingga

$\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y)$ dengan $i = 1,2,3, \dots$

$\dot{y} = \eta_j(x, y)$ dengan $j = 1,2,3, \dots$ (2.31)

Dengan φ_i adalah laju infeksi skunder yang menambah kelas infeksi dan ψ_i adalah laju perkembangan penyakit, kesembuhan dan atau kematian yang mengakibatkan berkurangnya populasi kelas terinfeksi.

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) berdasarkan linierisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik equilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinierisasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$\dot{x} = (F - V)x$ (2.32)

Dengan F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$ dan $F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(x_0, y_0)$ dan $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(x_0, y_0)$. Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai:

$K = FV^{-1}$ (2.33)

Dengan K disebut sebagai matriks *next generation*. Bilangan reproduksi dasar adalah nilai eigen terbesar dari matriks K (Driessche dan Watmough, 2002).

Teorema 2.3 Reproduksi Dasar

1) Titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equilibrium*) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

2) Jika $R_0 < 1$ maka semua solusi konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equalibrium*).

3) Titik kesetimbangan endemik (*endemic equilibrium*) stabil asimtotik lokal jika$R_0 > 1$.

4) Jika $R_0 > 1$ maka penyakit tersebut endemik (Driessche dan Watmough, 2002).

2.12 Kriteria Routh-Hurwitz

Untuk menguji sifat kestabilan diperlukan perhitungan untuk menentukan nilai-nilai eigen dari matriks jacobian di titik equilibrium. Kriteria Routh-Hurwitz merupakan salah satu alternatif untuk menentukan nilai eigen tersebut. Kriteria Routh-Hurwitz didasarkan pada pengurutan koefesien persamaan karakteristik. Diberikan suatu sistem persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial sebagai berikut:

$$|\lambda I - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.34)$$

dengan a_i, $i = 0,1,2,3,\dots,n$ dan $a_0 \neq 0$ merupakan koefesien dari persamaan karakteristik matriks A. Jika persamaan (2.34) memiliki bagian real negatif maka:

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_0} > 0, \frac{a_n}{a_0} > 0 \quad (2.35)$$

(Driessche dan Watmough, 2002).

2.13 Persamaan Logistik

Misal N adalah ukuran populasi, $a(N)$ adalah laju kelahiran per kapita, dan $b(N)$ adalah laju kematian per kapita, $a(N)$ dan $b(N)$ adalah fungsi dari N. Perubahan ukuran populasi selama interval waktu Δt adalah:

$$\Delta N = N(t + \Delta t) = a(N)\Delta tN - b(N)\Delta tN \quad (2.36)$$

Misal $\Delta t \to 0$ maka persamaan diferensialnya adalah :

$$\frac{dN}{dt} = \big(a(N) - b(N)\big)N \quad (2.37)$$

Dimana

$$\big(a(N) - b(N)\big) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.38)$$

Atau

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N \quad (2.39)$$

Persamaan (2.35) disebut model pertumbuhan logistik dari waktu kontinu (Takasu, 2009).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data skunder yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Lampung dan Badan Pusat Statistik Kota Bandar Lampung, yaitu data penyebaran penyakit malaria Kota Bandar Lampung, jumlah penduduk Kota Bandar Lampung dan angka kelahiran Kota Bandar Lampung.

3.3 Metode penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

1. Menentukan model deskripsi untuk transmisi dari *Plasmodium* malaria, dengan menggunakan model SEIRS untuk populasi manusia dan SI untuk populasi nyamuk.

2. Menentukan model penyebaran penyakit malaria dengan masa inkubasi panjang dan masa inkubasi pendek menggunakan persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation*/ ODE) dan persamaan diferensial waktu tunda (*Delay Differential Equation/* DDE).
3. Menentukan titik equilibrium masa inkubasi malaria pada persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial waktu tunda.
4. Mengkaji kestabilan titik equilibrium berdasarkan angka rasio reproduksi R_o dengan menggunakan persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation*/ ODE).
5. Mengkaji kestabilan titik equilibrium berdasarkan angka rasio reproduksi R_d dengan menggunakan persamaan diferensial waktu tunda (*Delay Differential Equation/* DDE).
6. Setelah diperoleh model dan kestabilan sistem dari penyebaran penyakit malaria dengan persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation*/ ODE) dan persamaan differensial waktu tunda (*Delay Differential Equation/* DDE), maka akan dilakukan pengujian model degan menggunakan data yang ada, sehingga dapat diketahui kestabilan dari kedua model.
7. Menginterpretasikan model persamaan differensial biasa (*Ordinary Differential Equation*/ ODE) dan model persamaan differensial waktu tunda (*Delay Differential Equation/* DDE).

V. KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah dikaji penyebran penyakit malaria dengan menggunakan persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial waktu tunda. Dari hasil uji kestabilan diperoleh dua kestabilan yaitu, pada saat keadaan bebas penyakit dan keadaan endemik penyakit. Titik equilibrium penyebaran penyakit malaria dipengaruhi oleh angka reproduksi dasar R_0 untuk persmaan diferensial biasa dan R_d untuk persamaan diferensial waktu tunda, yang dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$R_0 = \sqrt{\frac{a^2bcm}{(r+\xi)\mu}\left(\frac{pd_s}{(d_s+\xi)} + \frac{(1-p)d_l}{(d_l+\xi)}\right)}$$

$$R_d = \sqrt{\frac{a^2bcm}{(r+\xi)\mu}\left((1-p)e^{-\xi\tau} + \frac{pd_s}{(d_s+\xi)}\right)}$$

Jika nilai $R_0 < 1$ dan $R_d < 1$, maka hal ini menunjukkan suatu wilayah tersebut stabil asimtotik lokal pada keadaan bebas penyakit. Jika nilai $R_0 > 1$ dan $R_d > 1$, artinya di suatu wilayah tersebut menunjukkan kecenderungan terjadinya endemik penyakit atau adanya penyebaran penyakit pada wilayah tersebut.

Dari hasil simulasi kedua model diperoleh bahwa perubahan bebrerapa nilai parameter mempengaruhi peningkatan laju manusia terinfeksi sehingga mengakibatakan perubahan laju kestabilan. Seperti halnya, dalam simulasi numeri diberikan nilai kecepatan gigitan nyamuk, kecepatan penyebran penyakit, laju masa inkubasi pendek dan laju masa inkubasi panjang yang berbeda, berpengaruh terhadap laju proporsi manusia terinfeksi dan laju kestabilan model. Artinya adanya perubahan nilai parameter terkait akan mempengaruhi kecepatan kestabilan pada keadaan endemik penyakit. Jika nilai beberapa parameter ditekan, maka akan mengakibatakan kestabilan endemik penyakit yang cenderung menurun atau berada pada keadaan bebas penyakit.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi Kedelapan, Jilid 1. Erlangga, Jakarta.

Arizona, P.Z. dan Fuad, Y. 2014. Analisis Stabilitas Model Sel Imun-Tumor dengan Tundaan Waktu. Math Unesa.

Bronson,R. dan Costa, G. 2003. *Persamaan Diferensial*. Erlangga, Jakarta.

Cahyono, E. 2013. *Pemodelan Matematika.* Graha Ilmu, Yogyakarta.

Degeng, I.W. 2007. *Kalkulus Lanjut Persamaan Differensial dan Aplikasinya.* Graha Ilmu, Yogyakarta.

Depkes. Indikator Kesehatan Indonesia 2005-2009. Jakarta, Pusat Data dan Informasi Kesehatan, 2009.

Driessche, P.V.D. & Watmough, J. 2002. Reproduction Number and Subtreshold Endemic Equilibria for Compartmental of Disease Transmission. Mathematical Biosciences. 180: 29 – 48.

Finizio, N. dan Ladas, G.. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Jakarta, Erlangga.

Iswanto, R. J. 2012. *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

McClave, J. T. dan Sincich. 2000. *Statistics*. Eighth Edition. Prentice Hall, New Jersey.

Mondaini, R. P. 2013. Modelling Malaria Dynamics In Temperate Regions With Long Term Incubation Period. *International Symposium on Mathematical and Computational Biology*. 263-285.

Panvilof, A. 2004. *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Utrecth University, Utrecht.

Takasu, F. 2009. Lecture 9: Logistic Grwth Models, Dept. Information and Computer Sciences, Nara Womens University.

Widiarto, H.2009. Analisis Stabilitas dari Model Epidemik AIDS dengan Transmisi Vertikal. Tugas Akhir. Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.

Word Healt Organization. Malaria Fact Sheet No.94. WHO Media Centre, 2011.