III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung, dan dilakukan pada Semester Genap Tahun Ajaran 2013/2014.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka yang menggunakan buku-buku penunjang, skripsi dan jurnal yang berhubungan denganskripsi ini. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Mencari momen dari distribusi *generalized* lambda dengan parameter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dimana $\lambda_3 = 0$, dapat dilakukan dengan tiga cara yaitu Pertama, dibangun oleh fungsi persentil dan teorema-terorema yang mendukung untuk menyelesaikannya. Kedua dicari dengan meggunakan definisi dan Ketiga yaitu dengan menurunkan fungsi pembangkit momen yang dievalusi saat t = 0. Untuk lebih memahami, Karian dan Dudewicz (2000) telah menjelaskannya dalam teorema berikut :

Teorema 3.1. Fungsi Densitas GLD

Untuk GLD $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, fungsi kepekatan peluang dari GLD adalah

$$f\ (x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3\ y^{\lambda_3 - 1} +\ \lambda_4\ (1-y)^{\lambda_4 - 1}}\ ; x = Q(y)$$

Bukti :

Jika $x = Q(y)$, maka kita memiliki $y = F(x)$. Diturunkan terhadap x, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = f\ (x)$$

Atau

$$f\ (x) = \frac{dy}{d\ (Q(y))} = \frac{1}{\frac{d\ (Q(y))}{dy}}$$

Karena bentuk dari $Q(y)$ pada fungsi peluang dari GLD sudah diketahui, maka :

$$\frac{d\ (Q(y))}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}\right)$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_3\ y^{\lambda_3 - 1} +\ \lambda_4\ (1-y)^{\lambda_4 - 1}}$$

Sehingga,

$$f\ (x) = \frac{1}{\frac{d\ (Q(y))}{dy}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\lambda_3\ y^{\lambda_3 - 1} +\ \lambda_4\ (1-y)^{\lambda_4 - 1}}{\lambda_2}}$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_3\ y^{\lambda_3 - 1} +\ \lambda_4\ (1-y)^{\lambda_4 - 1}}$$

Jelas terbukti bahwa,

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3\ y^{\lambda_3 - 1} +\ \lambda_4\ (1-y)^{\lambda_4 - 1}}$$

Teorema 3.2. Peubah Acak GLD $\boldsymbol{X+\lambda_1}$

Jika variabel acak X adalah GLD $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka variabel acak

$X+\lambda_1$ merupakan GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

Bukti :

Jika X adalah GLD$(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka dari definisi GLD dapat diperoleh

$$Q(y) = \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

Sekarang

$$F_{X+\lambda_1}(x) = P[X+\lambda_1 \leq x] = P[X \leq x - \lambda_1] = F_X(x-\lambda_1\ ),$$

Oleh karena itu $F_X(x-\lambda_1) = y$ yang mengakibatkan $F_{X+\lambda_1}(x) = y$,

Menghasilkan

$$x - \lambda_1 = Q_X(y)$$

$$x = \lambda_1 + Q_X(y)$$

$$x = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2},$$

Ini membuktikan bahwa variabel acak $X+\lambda_1$ merupakan GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Teorema 3.3. Peubah Acak GLD $\boldsymbol{X-\lambda_1}$

Jika X adalah suatu variabel acak dari GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka $Z = X - \lambda_1$ merupakan GLD $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

Bukti :

Jika X adalah GLD$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka

$$Qx\ (y) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

dan

$$F_{X-\lambda_1}(x) = P[X - \lambda_1 \leq x] = P[X \leq x + \lambda_1] = F_X(x + \lambda_1\ ),$$

Jika ditentukan $F_X(x + \lambda_1) = y$, maka akan diperoleh

$$x + \lambda_1 = Q_X(y) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}\ , x = Q_{X-\lambda_1}(y),$$

Selain itu, juga dimiliki $F_{X-\lambda_1}(x) = y$ dimana

$$Q_{X-\lambda_1}(y) = x = \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2},$$

Ini membuktikan bahwa $X - \lambda_1$ merupakan GLD $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Teorema 3.4. Nilai Harapan Peubah Acak GLD

Jika Z adalah GLD $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, maka $E(Z^k)$, nilai harapan dari Z^k, diberikan oleh

$$E(Z^k) = \frac{1}{\lambda_2^k} \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} (-1)^i B(\lambda_3(k-i) + 1, \lambda_4 i + 1) \right]$$

Dimana $B(a, b)$ adalah fungsi beta yang didefinisikan sebagai berikut :

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

Bukti :

$$E(Z^k) = \int_{-\infty}^{\infty} z^k f(z) dz$$

Dari Teorema 1 diketahui $z = Q(y)$ dengan $y = F(z)$ diperoleh

$y = F(z)$ maka $dy = f(z)dz$. Dengan $0 \leq y \leq 1$ maka,

$$E(Z^k) = \int_0^1 \big(Q(y)\big)^k\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}\right)^k dy = \frac{1}{{\lambda_2}^k} \int_0^1 \left(y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}\right)^k dy$$

Dari teorema binomial,

$$\left(y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}\right)^k = \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} \left(y^{\lambda_3}\right)^{k-i} - (1-y)^{\lambda_4})^i\right]$$

Sehingga diperoleh

$$E(Z^k) = \frac{1}{{\lambda_2}^k} \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} (-1)^i \int_0^1 y^{\lambda_3(k-i)} (1-y)^{\lambda_4 i} dy\right]$$

$$= \frac{1}{{\lambda_2}^k} \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} (-1)^i B\ (\lambda_3(k-i) + 1, \lambda_{4i} + 1)\right]$$

Jadi terbukti bahwa:

$$E(Z^k) = \frac{1}{{\lambda_2}^k} \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k}{i} (-1)^i \beta(\lambda_3(k-i) + 1, \lambda_4 i + 1)\right] \qquad (3.1)$$

Dengan mengevaluasi langsung dari integral pada persamaan 3.1 dapat ditentukan untuk $\lambda_i > -1$ sebagai berikut :

$$B\ (\lambda_i + 1,1) = B\ (1, \lambda_i + 1) = \frac{1}{\lambda_{i+1}} \qquad (3.2)$$

2. Mencari kumulan pada saat $\lambda_3 = 0$ distribusi *generalized* lambda dengan parameter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dengan menggunakan definisi.

3. Mencari fungsi karakteristik pada saat $\lambda_3 = 0$ dari distribusi *generalized* lambda dengan parameter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dengan menggunakan definisi.

4. Melakukan simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *generalized* lambda dengan parameter ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) dimana parameter λ_1 dan λ_2 menunjukkan lokasi dan skala serta λ_3 dan λ_4 menunjukkan parameter bentuk.

5. Melakukan simulasi grafik skewness (kemiringan) dari distribusi *generalized* lambda dengan parameter ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) dimana parameter λ_1 dan λ_2 menunjukkan lokasi dan skala serta λ_3 dan λ_4 menunjukkan parameter bentuk.

6. Melakukan simulasi grafik kurtosis (kelandaian) dari distribusi *generalized* lambda dengan parameter ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) dimana parameter λ_1 dan λ_2 menunjukkan lokasi dan skala serta λ_3 dan λ_4 menunjukkan parameter bentuk.