II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan penelitian. Dalam menyelesaikan momen, kumulan dan fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* lambda dibutuhkan beberapa teori yang mendukung penelitian seperti definisi distribusi *generalized* lambda, , fungsi pembangkit momen, momen,, kumulan, *skewness*, kurtosis, dan fungsi karakteristik.

2.1 Distribusi *Generalized* Lambda

Generalized Lambda Distribution (GLD) awalnya diusulkan oleh Ramberg dan Schmeiser (1972-1974), yang memiliki empat parameter dari pengembangan distribusi Lambda Tukey. Keluarga distribusi Lambda Tukey didefinisikan oleh fungsi persentil $Q(u)$ yang berasal dari distribusi lambda satu parameter yang diusulkan oleh John Tukey (1960).

$$Q(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\lambda} - (1-u)^{\lambda}}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \dfrac{\log(u)}{1-u}, & \lambda = 0, u \neq 1 \end{cases} \quad dimana\ 1 \geq u \geq 0.$$

(Au-Yeung, 2003)

Distribusi lambda Tukey digeneralisasi dengan tujuan untuk membangkitkan varietas acak dalam pembelajaran simulasi Monte Carlo ke dalam empat parameter *Generalized Lambda Distribution* (GLD) oleh Ramberg dan Schmeiser (1972-1974), dan Mykytka (1979). Selain itu juga telah diaplikasikan dalam mencocokkan dan memodelkan kejadian di banyak bidang dengan fungsi densitas yang kontinu.

(Aljazar, 2005)

Definisi 2.1

Suatu peubah acak X menyebar mengikuti *Generalized Lambda Distribution* (GLD) dimana parameter λ_1 dan λ_2 menunjukkan lokasi dan skala parameter (*scale parameter*), λ_3 dan λ_4 menunjukkan kemiringan (*skewness*) dan keruncingan (*kurtosis*) dari GLD($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) jika dan hanya jika X memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut :

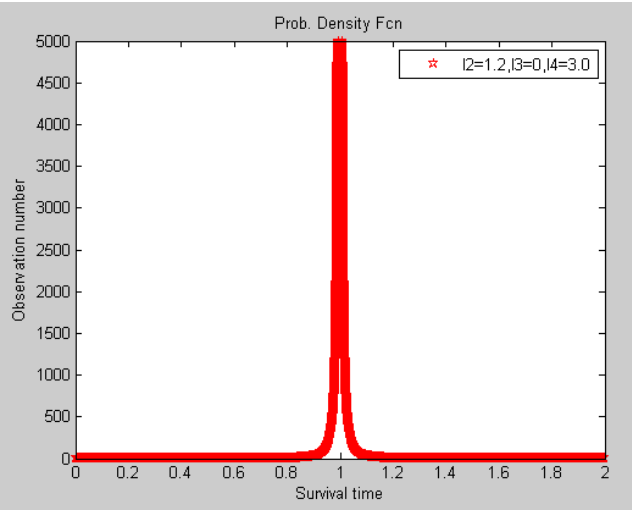
$$f\left(x\,;\lambda_1, \lambda_{2,}\lambda_3\lambda_4\right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}}$$

untuk $x = Q(y)$, dimana $\lambda_3, \lambda_4 > -\frac{1}{4}$

Dan $Q(y)$ adalah fungsi persentil yang didefinisikan sebagai berikut

$$Q(y) = Q(y; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, \qquad 0 \leq y \leq 1$$

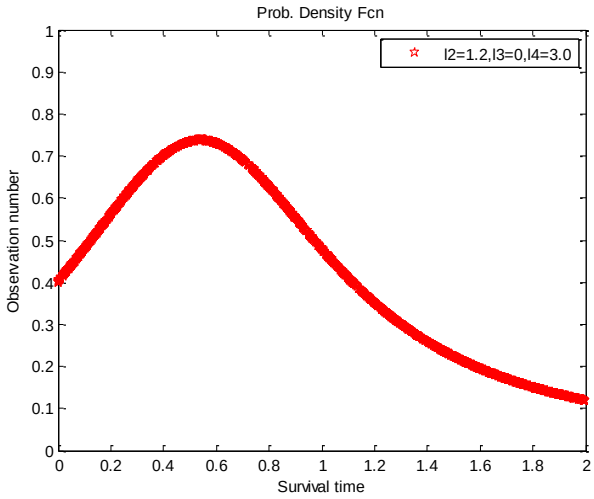
(Dudewicz & Karian, 2000)



Gambar 2.1.Grafik Fungsi Kepekatan Peluang dari Distribusi *Generalized*

Lambda dengan n = 1.000.000, $\lambda_2 = 1.2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 3.0$

Pada Gambar 2.1 Grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi generalized lambda dengan jumlah n adalah 1.000.000, $\lambda_2 = 1.2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 3.0$ terlihat sebaran datanya adalah simetris (distribusi normal) pada nilai $x = 2$.



Gambar 2.2.Grafik Fungsi Kepekatan Peluang dari Distribusi *Generalized*

Lambda dengan $\lambda_2 = 1.2, \lambda_3 = 2.5, \lambda_4 = 3.0$

Pada Gambar 2.2 Grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi generalized lambda dengan jumlah n adalah 1.000, $\lambda_2 = 1.2, \lambda_3 = 2.5, \lambda_4 = 3.0$ terlihat kemiringan (kecondongan) data ke arah kanan dimana nilai mean lebih besar daripada modusnya.

Untuk mengevaluasi integral tentu yang terbentuk, selanjutnya diperlukan ekspansi deret Maclaurin dalam menemukan momen dari distribusi *generalized* lambda yang akan dibahas pada sub-bab selanjutnya.

2.2 Ekspansi Deret Maclaurin

Deret Maclaurin digunakan untuk membantu menyelesaikan suatu persamaan dengan mengekspansikannya sehingga dapat lebih mudah menyelesaikannya.

Definisi 2.2

Misalkan f adalah fungsi di mana turunan ke (n+1).$f^{(n+1)}$(x), ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka l yang mengandung a. Jadi, untuk setiap x di dalam l berlaku : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$ (2.1)

Persamaan (2.1) disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi $f(x)$. Jika $a = 0$, maka bentuk deret pada persamaan (2.1) menjadi :

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots \quad (2.2)$$

Dan bentuk deret pada persamaan (2.2) disebut sebagai ekspansi deret Maclaurin bagi fungsi $f(x)$.

Dengan mengandung persamaan (2.2) maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:;

$f(x) = e^{tx}$ $\qquad$ $f(0) = e^{t(0)} = 1$

$f'(x) = te^{tx}$ $\qquad$ $f'(0) = te^{t(0)} = t$

$f''(x) = t^2e^{tx}$ $\qquad$ $f''(0) = t^2e^{t(0)} = t^2$

Sehingga diperoleh:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (2.3)$$

Fungsi $f(x) = sin\ (tX)$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$$sin\ (tX) = tx - \frac{t^3x^3}{3!} + \frac{t^5x^5}{5!} - \frac{t^7x^7}{7!} + \cdots\cdots\cdots \quad (2.4)$$

Fungsi $f(x) = cos\ (tX)$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret seperti berikut:

$$cos\ (tX) = 1 - \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^4x^4}{4!} - \frac{t^6x^6}{6!} + \cdots\cdots\cdots \quad (2.5)$$

(Leithold,1978)

Tahap pertama dalam menentukan karakteristik distribusi *generalized* lambda yaitu dengan menentukan fungsi pembangkit momen yang nantinya dari fungsi pembangkit momen ini dapat menentukan karakteristik lain dari distribusi *generalized* lambda.

2.3 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen digunakan untuk menghitung momen dari variabel atau peubah acak X. Fungsi pembangkit moment disimbolkan dengan $M_X\ (t)$, definisinya sebagai berikut:

Definisi 2.3

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu maka fungsi pembangkit momen dari X (X dinotasikan dengan $M_X(t)$) didefinisikan sebagai :

$$\boldsymbol{M_X(t) = E\ (e^{tX}\ )}$$

Definisi 2.4

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p\ (x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai :

$$\boldsymbol{M_X(t) = \sum_x e^{tx}\ .p(x)}$$

Definisi 2.5

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f\ (x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai :

$$\boldsymbol{M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\ f(x)\ dx}$$

(Hogg dan Craig, 1997).

Pada bagian selanjutnya akan dijabarkan mengenai momen, yang mana pada penelitian ini akan ditentukan momen dari distribusi *generalized* lambda dengan menggunakan definisi seperti yang akan dijabarkan di bawah ini.

2.4 Momen

Momen merupakan suatu karakteristik dari suatu distribusi peluang. Momen dapat dicari menggunakan cara sesuai dengan definisi atau penurunan fungsi pembangkit momen. Momen dapat ditentukan dari momen pertama sampai momen ke-r.

Rataan dan varians sebenarnya merupakan hal yang istimewa dari kelompok ukuran lainnya yang disebut momen. Dari momen ini beberapa ukuran lain dapat diturunkan. Momen didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6:

Momen ke-r dari suatu peubah acak X, dilambangkan dengan μ_r' merupakan nilai harapan dari $(X)^r$, dituliskan sebagai berikut :

$$\mu_r' = E[(X)^r] = \sum_x (x)^r . f(x)$$

Untuk $r = 0,1,2, \ldots$ ketika X diskrit, dan

$$\mu_r' = E[(X)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x)^r . f(x) dx$$

Ketika X kontinu.

(Irwin Miller, Marryless Miller, 1999).

Selain momen terdapat karakteristik lainnya dari suatu distribusi, dalam penelitian ini karakteristik lain yang akan dicari yaitu kumulan. Definisi dari kumulan akan diuraikan pada sub-bab selanjutnya.

2.5 Kumulan

Dalam teori probabilitas dan statititistika, seperangkat kuantitas yang memberikan alternatif momen distribusi dinamakan kumulan. Momen akan dapat menentukan kumulan dari distribusi *generalized* lambda dalam arti bahwa setiap dua distribusi probabilitas yang mempunyai momen identik akan memiliki kumulan identik juga.

Definisi 2.7 :

Kumulans k_r didefinisikan sebagai

$$ln\ \ \varphi_X(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{(it)^n}{n!}$$

Dengan menggunakan deret *Maclaurin* maka didapat :

$$ln\ \varphi_X(t) = (it)\mu_1' + \tfrac{1}{2}(it)^2\left(\mu_2' - {\mu_1'}^2\right) + \tfrac{1}{3!}(it)^3(2{\mu_1'}^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3')$$

$$+\frac{1}{4!}(it)^4\left(-6{\mu_1'}^4 + 12{\mu_1'}^2\mu_2' - 3{\mu_1'}^2 - 4\mu_1'\mu_3' + \mu_4'\right)$$

$$+\frac{1}{5!}(it)^5\left[24{\mu_1'}^5 - 60{\mu_1'}^3\mu_2' + 20{\mu_1'}^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3'\right]$$

$$+5\mu_1'\left(6{\mu_2'}^2 - \mu_4'\right) + \mu_5' + \cdots$$

Dimana momen ke-n, maka dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$k_1 = \mu_1'$$

$$k_2 = \mu_2' - {\mu_1'}^2$$

$$k_3 = 2{\mu_1'}^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3'$$

$$k_4 = -6{\mu_1'}^4 + 12{\mu_1'}^2\mu_2' - 3{\mu_2'}^2 - 4\mu_1'\mu_3' + \mu_4'$$

$$k_5 = 24{\mu_1'}^5 - 60{\mu_1'}^3\mu_2' + 20{\mu_1'}^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3' + 5\mu_1'\left(6{\mu_2'}^2 - \mu_4'\right) + \mu_5'$$

$$\vdots$$

$$k_r = \mu_r' - \sum_{n=1}^{r-1} \binom{r-1}{n-1} k_n \mu_{r-n}'$$

(Kendall, M.G, 1977)

Setelah kumulan diketahui, dalam sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang kemencengan atau *skewness* yang akan dicari setelah kumulan ke-2 dan kumulan ke-3 diperoleh.

2.6. *Skewness*

Kemencengan atau kecondongan *(skewness)* adalah tingkat ketidaksimetrisan atau kemelencengan simetri dari sebuah distribusi. Sebuah distribusi yang tidak simetri akan memiliki rata-rata, median, dan modus yang tidak sama besarnya.

Skewness dari suatu variabel random X yang dinotasikan dengan *Skew* [X] didefinisikan sebagai:

$$Skew[X] = \frac{E\,[(X - \mu)^3]}{E\,[(X - \mu)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{K_3}{(K_2)^{\frac{3}{2}}}$$

Skewness merupakan ukuran dari kesimetrisan atau lebih tepatnya kekurangsimetrisan. Suatu distribusi dikatakan simetris jika distribusi tersebut nampak sama antara sebelah kanan dan sebelah kiri titik pusatnya. Distribusi yang simetri misalnya distribusi normal, distribusi t, dan distribusi seragam. Distribusi yang mempunyai skewness positif misalnya distribusi eksponensial, distribusi Chi-kuadrat, distribusi Poisson dan distribusi Binomial dengan p > 0.5, sedangkan

distribusi yang mempunyai skewness negative misalnya distribusi Binomial dengan p < 0.5.

(deGunst dan van der Vaart, 1993)

Selain Skewness, pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang kurtosis atau tingkat keruncingan dari distribusi data yang dapat diperoleh setelah kumulan ke-2 dan kumulan ke-4 didapatkan.

2.7 *Kurtosis*

Kurtosis (keruncingan distribusi data) adalah derajat puncak dari suatu distribusi. Kurtosis dilambangkan dengan α_4 dan dapat diperoleh dengan rumus :

$$\alpha_4 = \frac{K_4}{{K_2}^2}$$

(Murray R Spiegel,1998)

Sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* lambda dengan menggunakan definisi seperti yang akan dijabarkan dibawah ini.

2.8 Fungsi Karakteristik

Fungsi Karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dalam statistika.

Definisi 2.8 :

Fungsi karakteristik $(\phi_X(t))$ dari peubah acak X, didefinisikan sebagai nilai ekspetasi dari e^{itx}, dimana i adalah bilangan imaginer dan $t \in R$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$(\phi_X(t)) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f(x)dx$$

Dan F_x merupakan fungsi kumulatif dari distribusi X, sedangkan f_x merupakan fungsi kepakatan peluang dari distribusi X.

(Edward J. Dudewicz & Satya N.Mishra, 1995)