KOEFISIEN GINI DARI DISTRIBUSI SINGH-MADDALA

(Skripsi)

Oleh

TIARA MELLIA DITA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

GINI COEFFICIENT OF SINGH-MADDALA DISTRIBUTION

By

Tiara Mellia Dita

In the aspect of economic inequality and economic indocators, the value of Gini coefficient is a measure of economic inequality of a distibution. Gini coefficient is defined as a surface between the line of perfect equality and Lorenz curve. To obtain the Gini coefficient with minimum bias, it's required parameters that express the characteristic of the population. Parameters can't be measured directly, but can be estimated by a sample. Singh-Maddala is one of distribution wich is defined as income distribution or expenditure distribution with three prameters (a,b,q). In this research, will be reviewed about the equation of Gini coefficient of Singh-Maddala distribution, and effect of the parameters (a,b,q) and distribution graph to the Gini coefficient value that required. The equation of Gini coefficient of Singh-Maddala distribution can be required by determining the equation of Lorenz curve of Singh-Maddala distribution, and to obtain the Gini coefficient value from Singh-Maddala distribution data can be determined by subtitute the estimator of parameters (a,b,q) wich have obtained by MLE *(Maximum Likelihood Estimation)* numerically. In this research it is obtained that, the smaller bias of the parameter estimator, the smaller bias of Gini coefficient that obtained as the measure of inequality of a distribution. By the shape of density plot, the more symmetric the shape of density plot the, smaller Gini coefficient is obtained too.

Keywords: Gini Coefficient, Lorenz Curve, Singh-Maddala Distribution

ABSTRAK

KOEFISIEN GINI DARI DISTRIBUSI SINGH-MADDALA

Oleh

Tiara Mellia Dita

Dalam aspek kesenjangan ekonomi dan indikator ekonomi, besarnya koefisien Gini merupakan ukuran kesenjangan atau ketidakmerataan ekonomi pada suatu distribusi. Koefisien Gini didefinisikan sebagai luas permukaan diantara kurva kesetaran sempurna dan kurva Lorenz. Untuk memperoleh koefisien Gini dengan bias yang minimum diperlukan parameter yang menyatakan karakteristik dari populasi tersebut. Parameter tidak dapat diukur secara langsung melainkan dengan cara menduganya berdasarkan sampel. Singh-Maddala merupakan salah satu distribusi yang dinyatakan sebagai distribusi pendapatan atau pengeluaran dengan tiga parameter (a,b,q). Pada penelitian ini akan di kaji persamaan koefisien Gini dari distribusi Singh-Maddala, dan pengaruh ketiga parameter (a,b,q) dan bentuk grafik distribusi terhadap nilai koefien Gini yang diperoleh. Persamaan koefisien Gini dari distribusi Singh-Maddala dapat diperoleh dengan menentukan persamaan kurva Lorenz dari distribusi Singh-Maddala dan untuk memperoleh nilai koefisien Gini dari data berdistribusi Singh-Maddala dapat diselesaikan dengan menyubtitusikan nilai penduga parameter (a,b,q) yang telah diperoleh menggunakan metode MLE *(Maximum Likelihood Estimation)* secara numerik. Dalam penelitian ini diperoleh bahwa, semakin kecil bias penduga parameter yang digunakan semakin kecil pula bias dari koefisien Gini yang diperoleh sebagai ukuran ketimpangan suatu distribusi. Berdasarkan bentuk grafik fungsi kepekatan peluang, semakin simetris bentuk grafik maka semakin kecil koefisien Gini yang diperoleh.

Kata Kunci: Koefisien Gini, Kurva Lorenz, Distribusi Singh-Maddala

KOEFISIEN GINI DARI DISTRIBUSI SINGH-MADDALA

Oleh

TIARA MELLIA DITA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi	: **KOEFISIEN GINI DARI DISTRIBUSI SINGH-MADDALA**
Nama Mahasiswa	: Tiara Mellia Dita
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1417031117
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.	**Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.**
NIP. 19690305 199603 2 001	NIP. 19570101 198404 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ....

Sekretaris : **Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Ir. Warsono, M.S., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **30 Mei 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertandatangan di bawah ini :

Nama	: **Tiara Mellia Dita**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031117**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Koefisien Gini dari Distribusi Singh-Maddala**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Mei 2018

Yang Menyatakan

Tiara Mellia Dita

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Tiara Mellia Dita, lahir di Bandar Lampung pada 30 Mei 1996. Penulis merupakan anak pertama dari 2 bersaudara, pasangan bapak Edyson dan ibu Deswita.

Penulis menempuh pendidikan dasar di SD Negeri 2 Palapa dari tahun 2002 – 2008. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Bandar Lampung dan lulus pada tahun 2011. Kemudian menempuh pendidikan di SMA Negeri 3 Bandar Lampung dan lulus pada tahun 2014.

Pada tahun 2014, penulis diterima sebagai mahasiswi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Pada tahun 2017, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah menyelesaikan Kerja Praktik di Kantor Perwakilan Bank Indonesia Provinsi Lampung selama kurang lebih satu bulan dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata di Desa Ciherang, Kecamatan Gunung Alip, Kabupaten Tanggamus selama satu bulan.

KATA INSPIRASI

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Dan cukuplah Allah bagiku berharap"

(QS. Al-Insyirah)

"I hated every minute of training, but don't quit. Suffer now and live the rest of our life as champion."

(Muhammad Ali)

"Boleh jadi, kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi (pula) kamu menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu. Allah yang paling mengetahui, sedangkan kamu tidak mengetahui."

(QS. Al-Baqarah : 216)

"Bersyukur, karena semua yang terjadi atas ridho-Nya"

(Tiara Mellia Dita)

PERSEMBAHAN

Karyaku yang sederhana ini kupersembahkan kepada:

Papa dan Mama

Terima kasih kepada Papa dan Mama yang selalu mendo’akan kesuksesanku, memberi semangat, nasihat, motivasi, dukungan serta kasih sayang yang tiada henti.

Adikku Ilham

Terima kasih kepada Adik yang selalu memberikan semangat dan keceriaan dalam hidupku.

Sahabat-sahabatku Metta, Uti, Andan, Yutia, Intan, dan Susan

Terima kasih kepada para sahabatku yang selalu memberikan semangat, do’a, dan motivasi, serta kenangan indah selama ini.

Almamater dan Negeriku

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Koefisien Gini dari Distribusi Singh-Maddala" dengan baik dan tepat pada waktunya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik karena dukungan, bimbingan, saran, serta do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing satu yang telah memberikan bimbingan, nasihat, saran, motivasi serta telah banyak meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing hingga skripsi ini terselesaikan.
2. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D., selaku pembimbing dua yang telah memberikan saran serta pembelajaran yang sangat bermanfaat dalam menyelesaikan skripsi.
3. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D., selaku pembahas dan penguji skripsi yang telah memberikan evaluasi, arahan, dan saran demi perbaikan skripsi.
4. Ibu Asmiati, S.Si., M.Si., Dr., selaku dosen pembimbing akademik.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A, Ph.D selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Orang tuaku tercinta dan adikku tersayang, serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan kasih sayang yang tiada terkira, selalu menjadi penyemangat disaat lemah, selalu memotivasi penulis untuk memberikan yang terbaik, serta tak henti-hentinya mendoakan untuk kesuksesan penulis.
9. Sahabat-sahabat tersayang, Metta, Uti, Andan, Yutia, Intan, dan Susan yang telah banyak membantu, mendo'akan, memberi dukungan dan kenangan indah kepada penulis.
10. Nada, Rara, dan Kadek, sebagai teman-teman satu bimbingan, terima kasih atas semangat dan saran selama penyelesaian skripsi.
11. HIMATIKA yang telah memberikan pengalaman berharga.
12. AIESEC yang telah menjadi wadah bagi penulis mengembangkan kemampuan dalam bidang kepemimpinan dan lainnya.
13. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2014.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga informasi tambahan, saran, dan kritik untuk pengembangan lebih lanjut sangat diharapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, Mei 2018

Penulis

Tiara Mellia Dita

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penekanan pertumbuhan kemiskinan dan ketidakmerataan ekonomi menjadi tujuan penting oleh beberapa negara berkembang maupun negara maju dalam hal pembangunan ekonomi. Dalam aspek kesenjangan ekonomi dan indikator ekonomi besarnya koefisien Gini merupakan ukuran kesenjangan atau ketidakmerataan ekonomi pada suatu distribusi. Koefisien Gini didefinisikan sebagai rasio dengan nilai 0 – 1, dimana angka 0 merepresentasikan kesetaraan yang sempurna (artinya seluruh populasi memiliki keadaan ekonomi yang sama) dan angka 1 merepresentasikan kesenjangan yang sempurna (artinya dalam suatu populasi ada satu orang mengusai perekonomian sedangkan yang lainnya nihil) (Mankiw, 2014)

Agar tidak terjadinya bias yang besar dalam nilai koefisien Gini dari suatu data yang diperoleh, perlu diperhatikan distibusi dari data tersebut. Pada umumnya data pendapatan maupun pengeluaran tidak simetris dan pola serta karakteristik dari setiap data relatif berbeda, maka sebelum melakukan perhitungan koefisien Gini perlu diketahui terlebih dahulu distribusi peluang dari data tersebut.

Distribusi peluang merupakan suatu daftar atau persamaan yang menunjukkan hasil-hasil yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan (Lind, 2007). Suatu distribusi memiliki beberapa parameter yang menyatakan karakteristik dari suatu populasi. Dengan parameter-parameter tersebut dapat ditentukan koefisien Gini dari suatu data berdistribusi peluang tertentu.

Dan dalam teori peluang, statistik dan ekonometrika, salah satu distribusi yang dinyatakan sebagai distribusi pendapatan atau pengeluaran adalah distribusi *Singh-Maddala*, distribusi ini diperkenalkan oleh Singh dan Maddala pada tahun 1975-1976 sebagai model distribusi pendapatan atau pengeluaran. Distribusi *Singh-Maddala* merupakan suatu distribusi peluang kontinu untuk peubah acak tidak negatif dengan parameter (a,b,q) (McDonald, 1984).

Oleh karena itu, peniliti tertarik untuk melakukan penelitian dalam memperoleh persamaan koefisien Gini pada distribusi *Singh-Maddala* melalui kurva Lorenz dan melakukan studi kasus untuk memperoleh nilai koefisien Gini dan kurva Lorenz dari data pengeluaran rumah tangga yang berdistribusi Singh-Maddala.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mendapatkan persamaan kurva Lorenz pada distribusi *Singh-Maddala*
2. Mendapatkan persamaan koefisien Gini pada distribusi *Singh-Maddala*.
3. Mendapatkan nilai koefisien Gini dan kurva Lorenz dari data pengeluaran rumah tangga yang berdistribusi *Singh-Maddala*.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah :

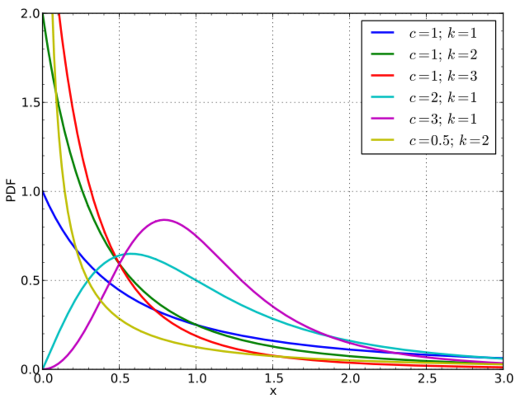
1. Memahami metode perhitungan dalam memperoleh persamaan koefisien Gini pada distribusi *Singh-Maddala*.
2. Mengetahui bentuk kurva Lorenz dari distibusi *Singh-Maddala*.
3. Memberikan pengetahuan serta referensi kepada peneliti terapan lain khususnya bidang ilmu ekonomi dan sosial.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam menentukan persamaan koefisien Gini pada distribusi *Singh-Maddala*, maka dalam hal ini penulis menggunakan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan proses tersebut, yakni sebagai berikut :

2.1 Distribusi *Singh-Maddala* (SM)

Distribusi *Singh-Maddala* diperkenalkan oleh Singh dan Maddala pada tahun 1975 dan pada tahun 1976. Menurut McDonald (1984), distribusi *Singh-Maddala* dianggap sebagai model distribusi pendapatan atau pengeluaran, yang merupakan bentuk khusus dari distibusi *Generalize Beta 2* (GB2) dengan parameter p = 1. SM(a,b,q) adalah distribusi *Singh-Maddala* dengan tiga parameter, b adalah parameter skala dan a, q adalah parameter bentuk, yang mana ketiga parameter tersebut merupakan bilangan positif.



Gambar 1. Kurva Fungsi Kepekatan Peluang Distribusi Singh-Maddala

Definisi 2.1

Menurut Kleiber dan Kotz (2003) jika X adalah sebuah peubah acak dengan distribusi *Singh-Maddala* (a,b,q) maka fungsi kepekatan peluang dari X dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{aqx^{a-1}}{b^a\left(1+\left(\frac{x}{b}\right)^a\right)^{q+1}}\ , \qquad x > 0 \tag{2.1}$$

Momen ke-k untuk $-\,a < k < aq$ dinyatakan sebagai berikut :

$$E(X^k) = \frac{b^k\ B\left(1+\frac{k}{a},\ q-\frac{k}{a}\right)}{B(1,q)} = \frac{b^k\ \Gamma\left(1+\frac{k}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{k}{a}\right)}{\Gamma(q)} \tag{2.2}$$

Nilai harapan dari X :

$$E(X) = \frac{b\ B\left(1+\frac{1}{a},\ q-\frac{1}{a}\right)}{B(1,q)} = \frac{b\ \Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(q)} \tag{2.3}$$

Dan nilai ragam dari X *:*

$$Var(X) = \frac{b^2\ \Gamma(q)\Gamma\left(1-\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{2}{a}\right) - \ \Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\Gamma^2\left(q-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma^2(q)} \tag{2.4}$$

2.2 Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Definisi 2.2

Misalkan X_1, X_2, ..., X_n adalah sampel acak berukuran n yang saling bebas stokastik identik dari suatu distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$. Fungsi kepekatan peluang bersama dari X_1, X_2, ..., X_n adalah $f(x_1;\theta)\ f(x_2;\theta)\ ...\ f(x_n;\theta)$ yang merupakan fungsi kemungkinan (*Likelihood Function*).

Untuk x_1, x_2, ..., x_n tetap, fungsi kemungkinan merupakan fungsi dari θ dan dilambangkan dengan L(θ) dan dinotasikan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}(\theta) &= f(\underline{x};\theta) \\
&= f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) \\
&= f(x_1;\theta)\ f(x_2;\theta)\ ...\ f(x_n;\theta) \qquad ;\ \theta \in \Omega \\
\mathrm{L}(\theta) &= \textstyle\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Definisi 2.3

L$(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta)$, $\theta \in \Omega$ merupakan fungsi kepekatan peluang dari x_1, x_2, ..., x_n. Untuk hasil pengamatan x_1, x_2, ..., x_n, nilai $\hat{\theta}$ berada dalam Ω, dimana L(θ) maksimum yang disebut sebagai *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dari θ. Jadi $\hat{\theta}$ merupakan penduga dari θ.

Jika $f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta)$ = max $f(x_1, x_2, \dots, x_n;\hat{\theta})$, $\theta \in \Omega$ maka fungsi tersebut memaksimumkan L(θ) terhadap parameternya. Biasanya mencari turunan dari

$\mathrm{L}(\theta)$ terhadap parameternya relative sulit, sehingga dalam penyelesaiannya dapat diatasi dengan menggunakan logaritma natural.

Untuk memaksimumkan ln $\mathrm{L}(\theta)$ adalah dengan mencari turunan dari ln $\mathrm{L}(\theta)$ terhadap parameternya kemudian hasil turunannya dibuat sama dengan nol.

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\theta)}{\partial \theta} = 0, \qquad (2.6)$$

(Hogg & Craig, 2005)

2.3 Metode Newton Raphson

Apabila proses pendugaan parameter didapat persamaan akhir yang non linear maka tidak mudah memperoleh pendugaan parameter tersebut, sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk memecahkan persamaan non linear tersebut. Salah satu metode yang digunakan untuk memecahkan sistem persamaan non linear adalah Metode Newton Raphson. Metode Newton Raphson adalah metode untuk menyelesaikan persamaan non linear secara iterative. Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan lebih dari satu parameter. Iterasinya sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\theta_{i+1}} = \boldsymbol{\theta_i} - [\boldsymbol{H^{-1}g}] \qquad (2.7)$$

Dengan $\hat{\theta}_{i+1} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{i+1} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{p+1} \end{bmatrix}$ dan $\hat{\theta}_i = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1i} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{pi} \end{bmatrix}$

Vektor gradient atau vector turunan terhadap parameternya dan dilambangkan dengan g(θ) yaitu :

$$g(\theta) = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Matriks Hessian atau matriks turunan kedua dari fungsi logaritma natural terhadap parameter a, b, dan q dilambangkan dengan $H(\theta)$.

$$H(\theta) = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta\, \partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial {\theta_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_1\, \partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_n\, \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial {\theta_n}^2} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

(Seber & Wild, 2003).

2.4 Kurva Lorenz

Kurva Lorenz adalah representasi grafis dari komulatif distribusi pendapatan *(income distribution).* Kurva Lorenz menunjukkan di dalam/di bawah p % rumah tangga (populasi), berapa persen L % dari total pendapatan yang mereka miliki. Pada kurva Lorenz persentase rumah tangga diplotkan pada sumbu-x, dan persentase pendapatan diplotkan pada sumbu-y. Kurva Lorenz dikembangkan oleh Max O. Lorenz pada tahun 1905 untuk merepresentasikan ketidaksetaraan pada distibusi pendapatan, pengeluaran atau kekayaan (Gastwirth, 1971).

Jika p = L, maka kurva Lorenz berbentuk garis lurus 45^o yang menyatakan bahwa 50% rumah tangga atau dengan kata lain 50% dari populasi memiliki 50% dari total pendapatan. Dengan demikian garis lurus tersebut merepresentasikan kesetaraan yang sempurna dan setiap perbedaan atau pergerakan dari garis lurus 45^{o} tersebut merepresentasikan ketidaksetaraan.

Definisi 2.4

Misalkan X menyatakan pendapatan atau pengeluaran dari anggota populasi. Asumsikan bahwa X adalah peubah acak dengan fungsi distribusi kumulatif F(x). F(x) menggambarkan proporsi dari populasi yang menerima pendapatan atau pengeluaran kurang dari atau sama dengan x. Dan kurva Lorenz L(p) merupakan pecahan yang pembilangnya adalah total pendapatan atau pengeluaran dibawah proporsi populasi p dan penyebutnya adalah total pendapatan atau pengeluaran dari seluruh populasi. Dengan demikian L(p) menunjukkan persentase kumulatif dari total pendapatan atau pengeluaran yang dimiliki oleh proporsi kumulatif populasi p.

Kurva Lorenz bersesuaian dengan peubah acak X dengan fungsi distribusi kumulatif F(x), dan $E(X) = \int x\, f(x)\, dx$, sehingga kurva Lorenz dapat dinotasikan sebagai :

$$L(p) = \frac{\int_0^x t\, f(t)\, dt}{\int_0^1 t\, f(t)\, dt} = \frac{1}{E(X)} \int_0^p F^{-1}(t)\, dt$$

Definisi standar dari kurva Lorenz terbagi menjadi dua persamaan. Pertama penyelesaian terhadap x,

$$p = F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

sehingga diperoleh,

$$x = F^{-1}(p)$$

Selanjutnya dapat ditulis, L(p) dengan menggunakan pergantian variabel, dimana p0 = 0 dan F(0)=0

$$L(p) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x t\, f(t) dt$$

Substitusikan $x = F^{-1}(p)$, dengan invers p = F(x) dan $dx = \frac{1}{f(F^{-1}(p))}\, dp$

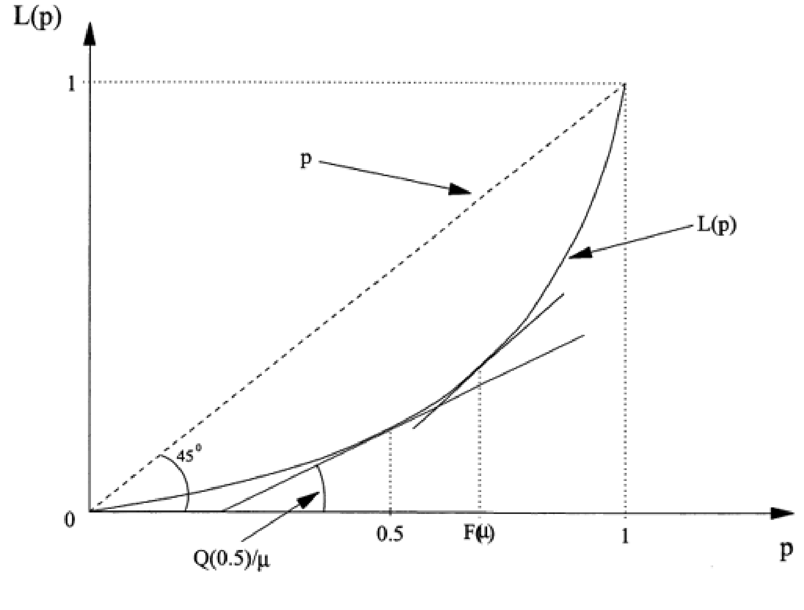
$$L(p) = \frac{1}{E(X)} \int_{F(0)}^{F(x)} [F^{-1}(p)]\, f\big(F^{-1}(p)\big)\ \frac{1}{f\big(F^{-1}(p)\big)} dp$$

$$= \frac{1}{E(X)} \int_0^p [F^{-1}(p)]\, 1\ dp$$

$$= \frac{1}{E(X)} \int_0^p F^{-1}(p)\, dp$$

Sehingga, secara umum kurva Lorenz dapat di notasikan sebagai berikut:

$$L(p) = \frac{1}{E(X)} \int_0^p F^{-1}(t)\, dt$$



Gambar 2. Kurva Lorenz

(Gastwirth, 1971).

2.5 Koefisien Gini *(Gini Coefficient)*

Koefisien Gini adalah ukuran ketimpangan atau ketidaksetaraan sebuah distribusi. Koefisien Gini sering digunakan untuk mengukur ketimpangan atau ketidaksetaraan pendapatan. Koefisien Gini didefinisikan sebagai rasio dengan nilai di antara 0 hingga 1, dimana nilai 0 merepresentasikan kesetaraan yang sempurna (artinya seluruh populasi memiliki keadaan ekonomi yang sama) dan nilai 1 merepresentasikan kesenjangan yang sempurna (artinya dalam suatu populasi ada satu orang mengusai perekonomian sedangkan yang lainnya nihil)

Jika setiap orang memiliki pendapatan atau keadaan ekonomi yang sama, persentase kumulatif total pendapatan dari setiap di bawah proporsi p populasi, juga akan sama dengan p. Atau dengan kata lain kurva Lorenz L(p) akan menjadi sama dengan garis kesetaraan sempurna (p), atau dapat dinotasikan L(p) = p. Informasi yang diperoleh dari kurva Lorenz adalah jaraknya dari garis kesetaraan pendapatan atau pengeluaran yang sempurna $[\mathrm{p} - \mathrm{L}\,(\mathrm{p})]$. Semakin besar jarak antara kurva p dan $\mathrm{L}\,(\mathrm{p})$, semakin besar ketimpangan pendapatan. Dengan demikian koefisien Gini merupakan rasio dari bidang antara dua kurva atau luas permukaan antara p diagonal dan kurva Lorenz L (p) dengan bidang atau luas permukaan dibawah garis p diagonal. Kita tahu bahwa kurva Lorenz terkandung dalam satuan persegi yang memiliki permukaan normal 1. Sehingga persamaan koefisien Gini dapat ditulis sebagai berikut :

$$G = 2\int_0^1 \big(p - L(p)\big)dp = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp$$

(Lubrano. M, 2017).

2.6 Pengeluaran Rumah Tangga

Pengeluaran konsumsi rumah tangga adalah mencakup berbagai pengeluaran konsumsi akhir rumah tangga atas barang dan jasa untuk memenuhi kebutuhan individu ataupun kelompok secara langsung. Pengeluaran rumah tangga di sini mencakup pembelian untuk makanan dan bukan makanan (barang dan jasa) di dalam negeri maupun luar negeri. Termasuk pula disini pengeluaran lembaga nirlaba yang tujuan usahanya adalah untuk melayani keperluan rumah tangga (BPS, 2017).

Dan berdasarkan teori konsumsi yang diungkapkan oleh Keynes, terdapat hubungan yang erat antara pendapatan dan pengeluaran (konsumsi). Teori konsumsi Keynes diungkapkan pada tahun 1936 dalam bukunya yang berjudul *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Teori konsumsi Keynes menjelaskan adanya hubungan antara pendapatan yang diterima saat ini (pendapatan disposable) dengan konsumsi yang dilakukan saat ini juga. Dengan kata lain pendapatan yang dimiliki dalam suatu waktu tertentu akan mempengaruhi konsumsi yang dilakukan oleh manusia dalam waktu itu juga. Apabila pendapatan meningkat maka konsumsi yang dilakukan juga akan meningkat, begitu pula sebaliknya (Pujoharso, 2013).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Dalam penelitian ini ada dua jenis data yang digunakan yaitu, data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik. Data tersebut adalah data SUSENAS Pengeluaran Rumah Tangga kabupaten Lampung Barat, provinsi Lampung, tahun 2017. Dan data simulasi yang dibangkitkan melalui software R.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

   Adapun langkah-langkah melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) adalah sebagai berikut :

a. Membentuk fungsi kemungkinan *(likelihood function)* yang berasal dari fungsi kepekatan peluang distribusi *Singh-Maddala*.

b. Mengubah fungsi kemungkinan *(likelihood function)* dalam bentuk logaritma natural (ln).

c. Pendugaan parameter dengan metode MLE, mencari turunan pertama dari logaritma natural fungsi kemungkinan *(likelihood function)* terhadap parameter-prameter yang akan diduga dan memaksimumkan fungsi maksimum likelihood dengan disama dengankan nol.

d. Menyelesaikan dugaan parameter yang tidak dapat diselesaikan secara analitik menggunakan metode Newton Raphson.

e. Menggunakan *software* R untuk mendapatkan nilai dugaan parameter dari distribusi *Singh-Maddala*.

2. Menentukan kurva lorenz dari distribusi *Singh-Maddala.*

   Adapun langkah-langkah menentukan kurva lorenz dari distribusi *Singh-Maddala* adalah sebagai berikut:

   a. Menentukan invers dari fungsi kumulatif (*Cumulative Distribution Function*) dari distribusi *Singh-Maddala*.

   b. Menentukan persamaan kurva lorenz distribusi *Singh-Maddala*, dengan menyubtitusikan fungsi invers dari fungsi kumulatif (*Cumulative Distribution Function*) yang telah diperoleh kedalam persamaan umum kurva lorenz.

3. Menentukan persamaan *Gini Coefficient* dari distribusi *Singh-Maddala* berdasarkan luas permukaan yang terbentuk antara kurva lorenz dan garis kesetaraan sempurna.

Selanjutnya akan dilakukan dua jenis penelitian dengan menggunakan data yang sebenarnya yaitu, data SUSENAS Pengeluaran Rumah Tangga kabupaten Lampung Barat, provinsi Lampung, tahun 2017 dan data simulasi yang dibangkitkan melalui software R dengan nilai parameter awal yang berbeda-beda.

4. Melakukan studi kasus terhadap data yang berdistribusi *Singh-Maddala* dalam menentukan nilai koefisien Gini dan bentuk kurva Lorenz.

   Adapun langkah-langkah menentukan nilai *koefisien Gini* dari data yang berdistribusi *Singh-Maddala* adalah sebagai berikut :

   a. Memperoleh data yang berdistribusi *Singh-Maddala* kemudian memperoleh nilai parameter dari data tersebut menggunakan *software Easyfit.*
   b. Menentukan luas daerah kurva Lorenz dari data yang telah diperoleh.
   c. Menentukan bentuk kurva Lorenz dari data yang diperoleh dengan menggunakan software R.
   d. Menentukan nilai koefisien Gini berdasarkan persamaan koefisien Gini dari distribusi Singh-Maddala.
5. Melakukan simulasi data berdistribusi Singh-Maddala

   A. a. Membangkitkan data berdistribusi *Singh-Maddala menggunakan Software R* dengan ukuran sampel 10, 25, 50, 100, 500, dan 1000

   b. Menentukan nilai pendugaan parameter dengan metode Newton Raphson, pada setiap ukuran sampel data

   c. Menghitung niali MSE dari masing-masing penduga parameter dan membandingkan nilai penduga parameter dan ukuran sampel berdasarkan MSE minimum, sehingga diperoleh penduga dan ukuran sampel terbaik

d. Menentukan luas daerah kurva Lorenz dan bentuk kurva Lorenz dari hasil simulasi terbaik dengan menggunakan *software* R

e. Menentukan nilai koefisien Gini berdasarkan persamaan Gini dari distribusi Singh-Maddala dan membandingkannya dengan koefisien Gini yang diperoleh dari studi kasus

B. a. Membangkitkan data berdistribusi *Singh-Maddala menggunakan Software R* dengan nilai parameter awal yang berbeda-beda dan ukuran sampel terbaik yang telah diperoleh

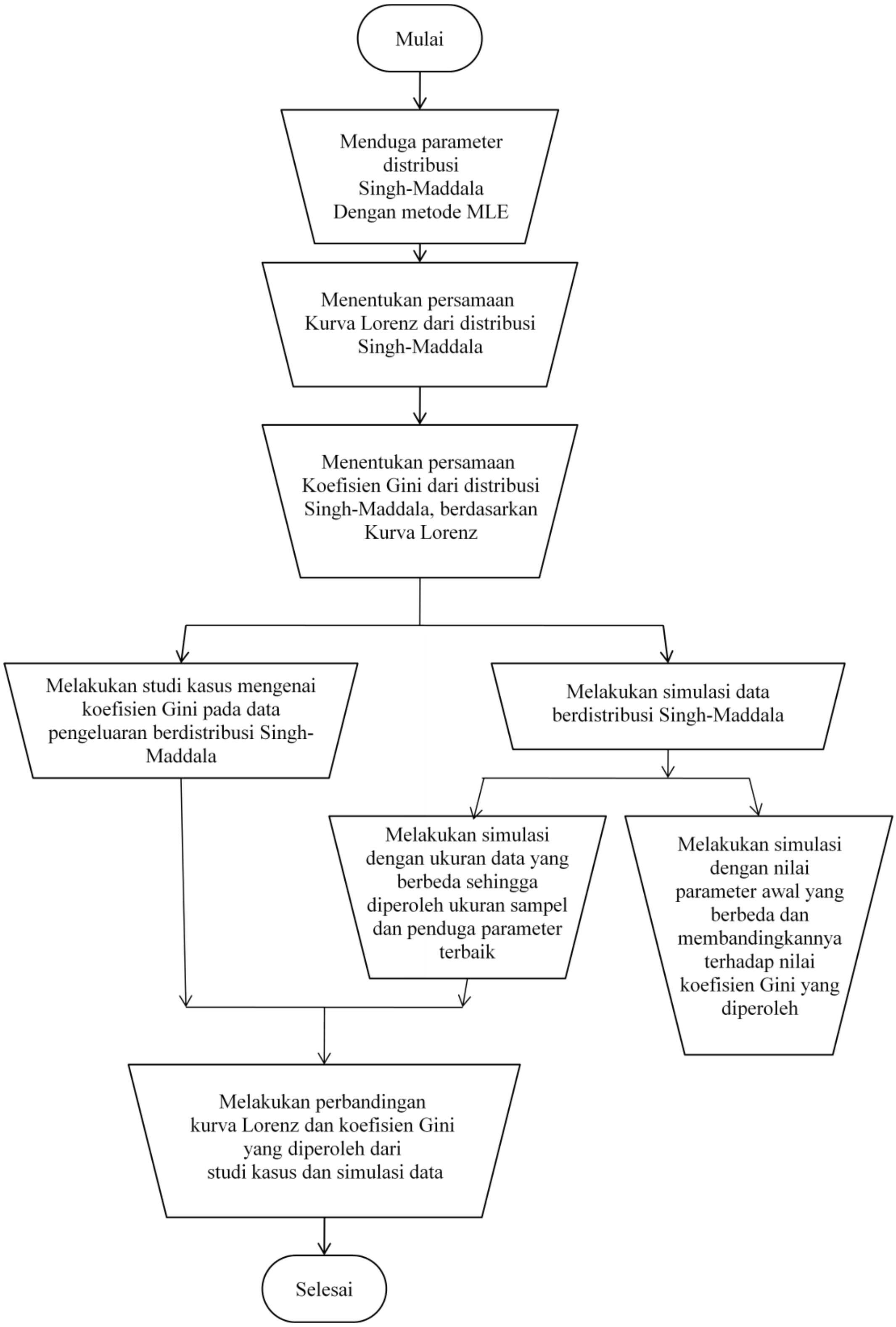
b. Menentukan nilai pendugaan parameter dengan metode Newton Raphson, pada setiap parameter awal

c. Menentukan luas kurva Lorenz dan nilai koefisien Gini dari berbagai bentuk parameter

d. Menentukan luas daerah kurva Lorenz dari setiap simulasi.

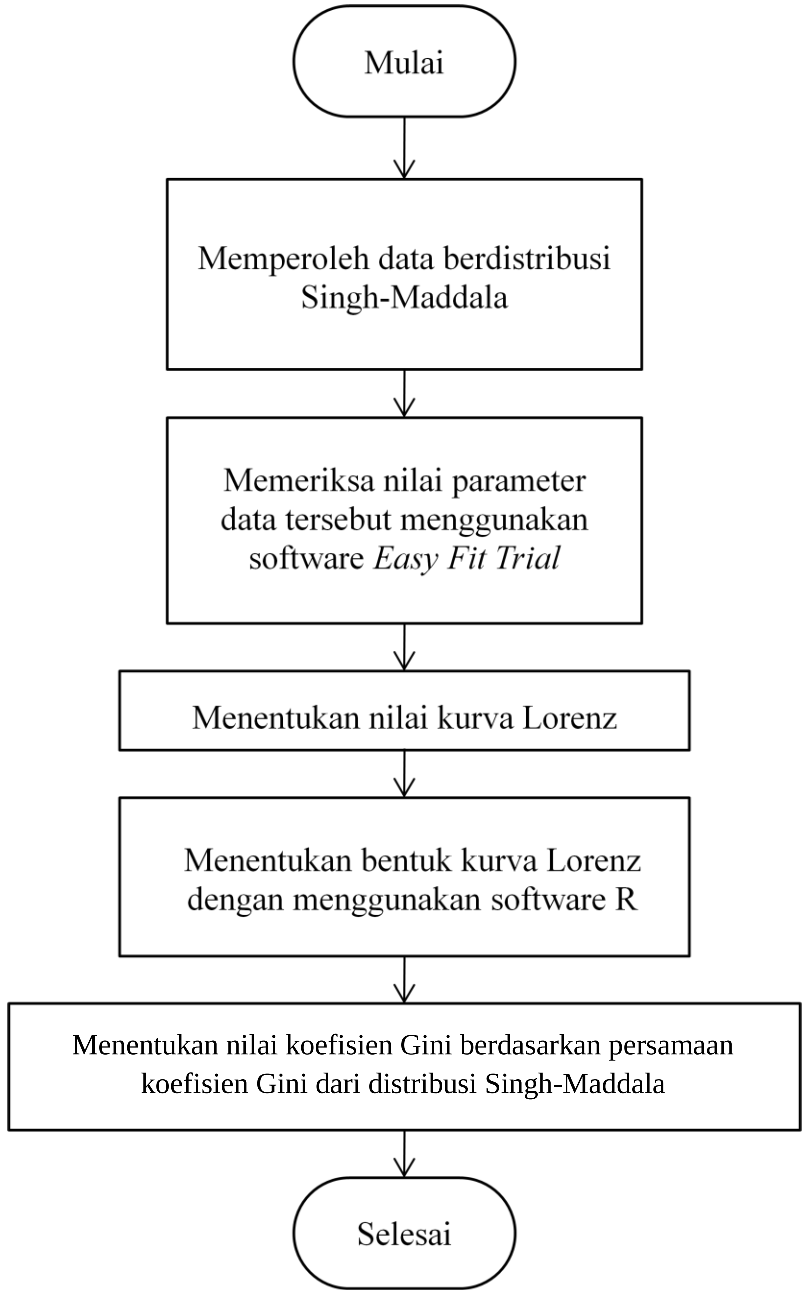
e. Membandingkan pengaruh perubahan nilai parameter degan koefisien Gini yang dihasilkan

3.3.1 Diagram Alir Metode Penelitian



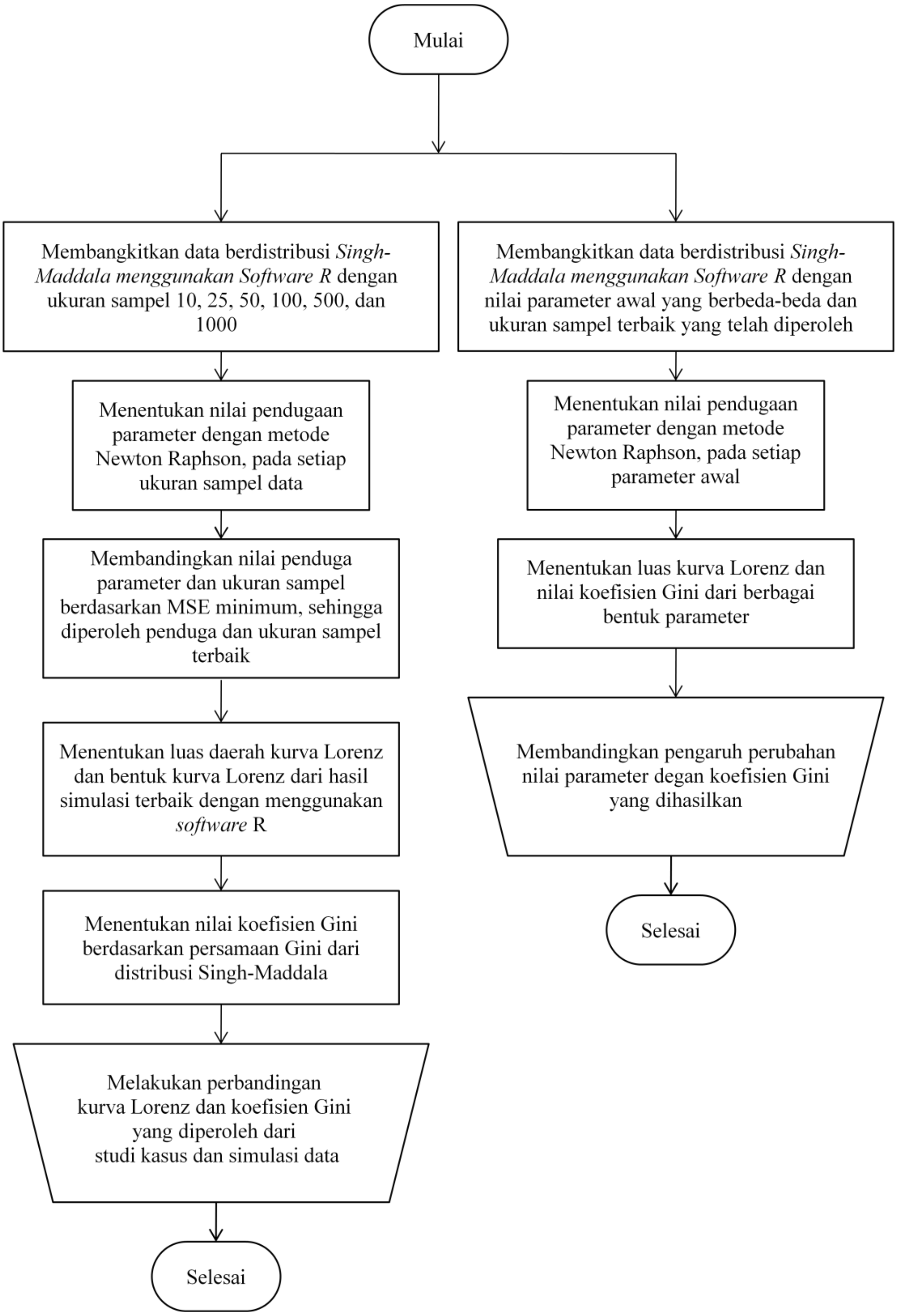
Gambar 3. Diagram Alir Metode Penelitian

3.3.2 Diagram Alir Metode Studi Kasus



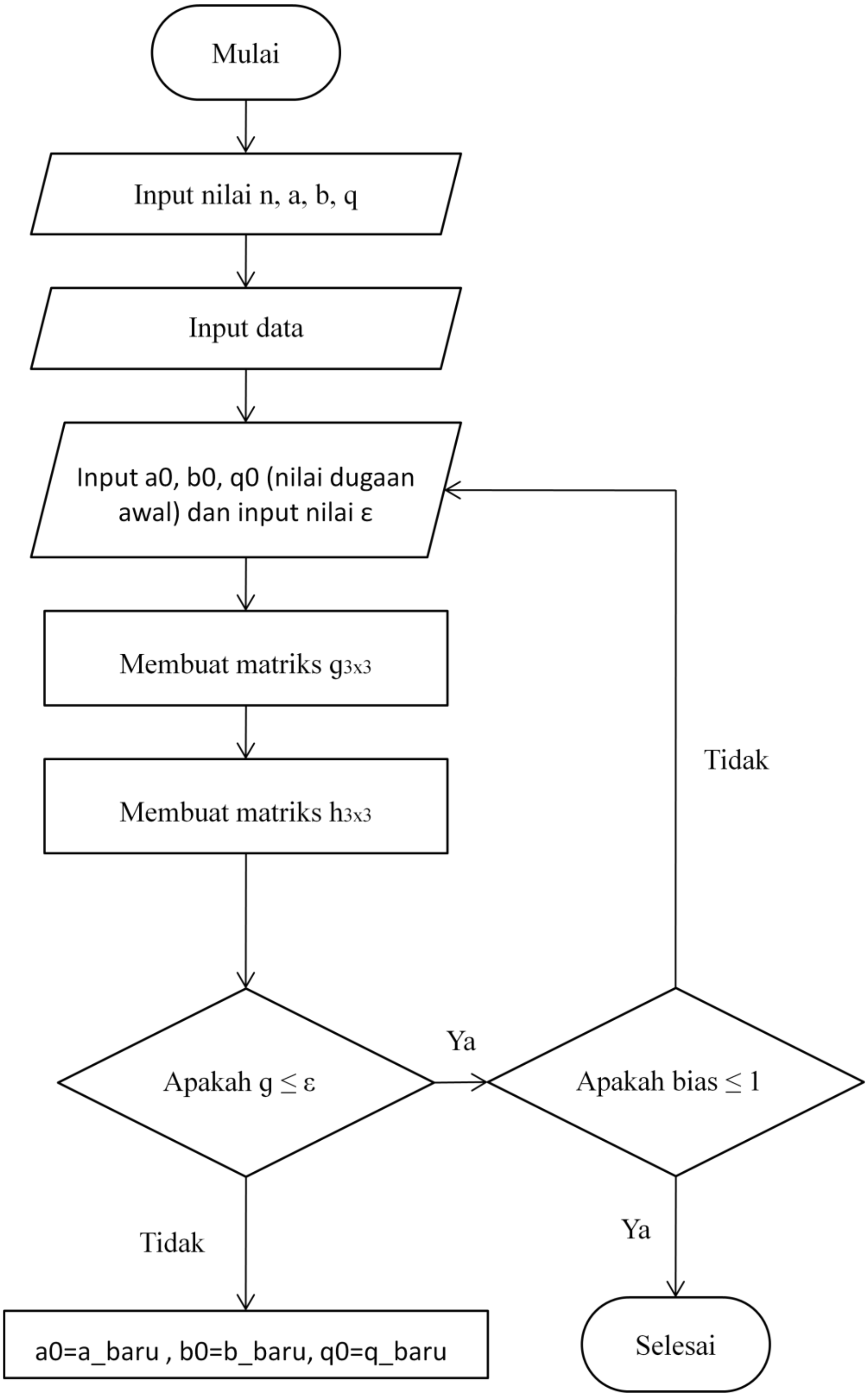
Gambar 4. Diagram Alir Metode Studi Kasus

3.3.3 Diagram Alir Simulasi Data



Gambar 5. Diagram Alir Metode Simulasi Data

3.3.4 Diagram Alir Metode Newton Raphson



Gambar 6. Diagram Alir Metode Newton Raphson

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Pendugaan paremeter distribusi *Singh-Maddala* dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* menghasilkan penduga yang tidak dapat diselesaikan secara analitik , sehingga perlu diselesaikan secara numerik. Dengan,

$$\hat{a} = \frac{n}{(\hat{q}+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right)^{\hat{a}}\ln\left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right)}{\left(1+\left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right)^{\hat{a}}\right)} - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) + n\ln\hat{b}}$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{a}n}{(\hat{q}+1)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\hat{a}\,x_i\left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right)^{\hat{a}-1}}{\hat{b}^2\left(1+\left(\frac{x_i}{\hat{b}}\right)^{\hat{a}}\right)}\right]}$$

$$\hat{q} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{x_i}{b}\right)^{a}\right)}$$

2. Persamaan kurva Lorenz dari distribusi Singh-Maddala

$$L(p) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{a}+1, q-\frac{1}{a}\right)}\int_0^z u^{\left(\frac{1}{a}+1\right)-1}\ (1-u)^{\left(q-\frac{1}{a}\right)-1}\ dt$$

$$= I_z\left(\frac{1}{a}+1, q-\frac{1}{a}\right)$$

3. Persamaan koefisien Gini dari distribusi Singh-Maddala

$$\mathrm{G} = 1 - 2\int_0^1 I_z\left(\frac{1}{a}+1, q-\frac{1}{a}\right)\ dz$$

4. Semakin kecil bias penduga parameter dan semakin tepat ukuran sampel yang digunakan semakin kecil pula bias dari koefisien Gini yang diperoleh sebagai ukuran ketimpangan suatu distribusi.
5. Berdasarkan bentuk grafik fungsi kepekatan peluang, semakin simetris bentuk grafik maka semakin kecil koefisien Gini yang diperoleh, atau dengan kata lain semakin simetris penyebaran data maka semakin kecil pula ketimpangan yang terjadi. Sedangkan semakin melenceng bentuk grafik fungsi kepekatan peluang, maka semakin besar koefisien Gini, atau dengan kata lain semakin jauh penyebaran data maka semakin besar ketimpangan yang terjadi.
6. Berdasarkan nilai parameter, semakin besar nilai parameter a atupun nilai parameter q, maka semakin kecil nilai koefisen Gini atau dengan kata lain suatu distribusi akan setara jika nilai parameter a ataupun q semakin besar.
7. Diperoleh nilai koefisien Gini dari pengeluaran rumah tangga kabupaten Lampung Barat pada tahun 2017, provinsi Lampung, adalah sebesar 0.2955367.

DAFTAR PUSTAKA

Badan Pusat Statistik (BPS), diakses dari http://www.bps.go.id/, diakses pada tanggal 10 Januari 2018 pada jam 20.20 WIB

Gastwirth, J.L. 1971. "Notes and Comments a General Definition of The Lorenz Curve". *Econometrica*, 39(6):1037-1039.

Hoog, V Robert and Craig, T Allen. 2005. *Introduction of Mathematical Statistic Sixth Edition*. New Jersey : The United States of America.

Kleiber, C. and Kotz, S. 2003. *Statistical Size Distributions in Economical and Actuarial Sciences*. Hoboken, NJ, USA : Wiley-Interscience.

Lind, Douglas A, dkk. 2007. *Teknik-teknik Statistika dalam Bisnis dan Ekonomi Menggunakan Data Global, Edisi 13*. Salemba Empat : Jakarta

Lubrano, M. 2017. *The Econometrics of Inequality and Poverty Chapter 4 : Lorenz Curves, the Gini Coefficient and Parametric distributions*.

Mankiw,N. Gregory, dkk. 2014. *Pengantar Ekonomi Mikro*. Salemba Empat : Jakarta.

McDonald, J.B. 1984. "Some Generalized Functions for The Size Distibution of Income". *Econometrica*, 52(3):647-663.

Pujoharso, C. 2013. "Aplikasi Teori Konsumsi Keynes Terhadap Pola Konsumsi Makanan Masyarakat Indonesia". *Ekonomi*.

Seber and Wild. 2003. *Nonlinear Rergression*. New Jersey. The United States of America.