PENGGUNAAN METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL HOMOGEN TAK LINIER

(Skripsi**)**

Oleh

MUHAMMAD RIZKI RAMADHAN

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

THE APPLICATION OF HOMOTOPY ANALYSIS METHOD ON THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM NONLINEAR HOMOGENEOUS

By

MUHAMMAD RIZKI RAMADHAN

Homotopy Analysis method (HAM) is an semi analytic technique that used to solve both linear differensial equation and nonliniear differential equation. Homotopyanalisis method also a free method which not observe the bigness or smallnes about one parameter. This method extremly effective to solve various type of the equation and linear equation system inspite non-linear equation system.

The purpose of this research is to solve the partial differential equation system by used a new method that is homotopy analysis method. With many superiority rather than the solution, so the h constant value that will be used is $h = -1$.

Key Word: HAM, Exact Solution, PDE system

ABSTRAK

PENGGUNAAN METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL HOMOGEN TAK LINIER

Oleh

MUHAMMAD RIZKI RAMADHAN

Metode analisis homotopi (HAM) adalah suatu teknik semi analitik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differesial linier maupun tak linier. Metode analisi homotopi juga merupakan metode yang bebas, artinya tidak memperhatikan kecil atau besarnya suatu parameter. Metode ini sangat efektif untuk menyelesaikan berbagai tipe persamaan dan sistem persamaan linier maupun tak linier.

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial dengan metode baru yaitu metode analisis homotopi (HAM) yang memiliki beberapa keunggulan dibandingkan dengan metode sebelumnya. Untuk memperlihatkan bahwa solusi dari metode homotopi mendekati solusi eksak, maka nilai konstanta h yang digunakan ialah $h = -1$.

Kata Kunci : HAM, Solusi Eksak, Sistem PDE

PENGGUNAAN METODE ANALISI HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL HOMOGEN TAK LINIER

Oleh

MUHAMMAD RIZKI RAMADHAN

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PENGGUNAAN METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL HOMOGEN TAK LINIER**

Nama Mahasiswa : *Muhammad Rizki Ramadhan*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031078

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Suharsono, S., M.S., M.Sc., Ph.D.
NIP. 19620513 198603 1 003

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP.19800821 200812 1 001

2. Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Lampung

Prof. Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D.
NIP.19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Drs. Suharsono, S., M.S., M.Sc., Ph.D** ....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI UNIVERSITAS LAMPUNG FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **18 Mei 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Muhammad Rizki Ramadhan**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031078**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Penggunaan Metode Analisis Homotopi (HAM) Pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Homogen Tak Linier**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institut lain.

Bandar lampung, 18 Mei 2018

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL
TGL. 20
98A2AAFF072497176
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Muhammad Rizki Ramadhan

NPM. 1417031078

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 16 februari 1996 di kota Bandar Lampung Terlahir dari keluarga yang sederhana dari pasangan Bapak Sukamto dan Ibu Lisna Dewi, adik dari Muhammad Nuril Hakim dan kakak dari Annisa sulistya ningrum

Penulis menyelesaikan pendidikan taman kanak kanak (TK) pada tahun 2002 di TK Aziziyyah Bandar Lampung. sekolah dasar di SD Negeri 5 Penengahan Bandar lampung pada tahun 2008. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 10 Bandar Lampung pada tahun 2011. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 7 Bandar Lampung pada tahun 2014. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung .

Pada periode 2014/2015 dan 2015/2016 penulis terdaftar sebagai anggota magang Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) HIMATIKA. Selain itu penulis menjadi pengurus sebagai sekretaris anggota Biro Dana dan Usaha tahun di UKM HIMATIKA. Pada tahun 2016 penulis mengikuti kegiatan sensus ekonomi sebagai panitia di Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama empat puluh hari di Kantor CV.SMT Logistik. Dan sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Gunung Sari, Kecamatan Way khilau.

MOTTO

“ Hari Esok Harus Lebih Baik ”

(Muhammad Rizki Ramadhan)

“ Setiap Manusia memiliki Waktu Terbaiknya “

(Muhammad Rizki Ramadhan)

“ Janganlah Kamu mengikuti sesuatu yang kamu tidak memiliki pengetahuan tentangnya, Sesungguhnya Penglihatan, Pendengaran, dan Hati akan dimintai pertanggungan jawab-Nya “

(Al Isra ayat 36)

“ Menjadi luar biasa itu perlu waktu, perlu disakiti, perlu air mata, perlu dihina dan perlu jam terbang yang teruji “

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap syukur kepada Allah SWT atas segala nikmat yang tak terhingga yang selalu dilimpahkan kepadaku sehingga aku dapat menyelesaikan karya kecilku ini.

Ibu..., Bapak...
Kupersembahkan skripsiku ini sebagai wujud rasa cinta dan terima kasihku untuk setiap do'a, kasih sayang dan perhatian, serta semangat yang tak pernah putus diberikan di setiap hariku.

Untuk kakak dan adikku tersayang, serta keluarga besarku yang selalu memberikan semangat dan dukungan serta do'a yang tak pernah henti untukku. Terimakasih sudah menjadi motivator di setiap lelahku.

Seseorang yang selalu memberi kemudahan, Dr., Heri Satria terimakasih untuk semua kebahagian dan keceriaan yang telah diberikan untukku. Moni Dwi Fenski serta Sahabat-sahabat terbaik yang selalu ada, terimakasih atas semua cerita indah yang mengisi hari-hariku

SANWACANA

Alhamdulillahi robbil ‘alamin, puji dan syukur penulis kepada Allah SWT atas izin serta ridho-Nya dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul **“ Penggunaan Metode Analisis Homotopi (HAM) Pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Homogen Tak linier”.** Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan yang baik bagi kita.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, bantuan, dan kerjasama dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Suharsono S., M.S., M.sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing utama yang senantiasa membimbing dan memberikan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan bimbingan serta saran yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku pembahas sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNILA.
4. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Untuk kedua orang tuaku yang telah banyak memberikan kasih sayang, Kakak dan adikku yang memberikan do’a dan perhatian serta semangat yang tak terhingga kepada penulis.
7. Moni Dwi Fenski yang tak pernah lelah mengingat dan memberi semangat penulis untuk segera menyelesaikan skripsi.

8. Seluruh keluarga besarku di Bandar Lampung, terimakasih atas semua do’a dan dukungannya serta kasih sayang yang telah banyak diberikan.
9. Terkhusus pamanku Dr. Heri Satria, S.Si, M.Si. yang selalu memberikan motivasi dan semangat.
10. Sahabat-sahabat satu perjuangan Raka Satria, Arisca, Ardiansyah, Aldi kurnia Tama, Rahmat riyanto, serta teman teman lainnya telah memberikan semangat dan dukungan.
11. Teman-teman Matematika 2014 atas kebersamaan serta keceriaaan yang telah diberikan kepada penulis selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung.
12. Seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 18 Mei 2018
Penulis,

Muhammad Rizki Ramadhan

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika merupakan ibu bagi ilmu pengetahuan lain, dimana perkembangan ilmu matematika memiliki peran yang sangat penting dan bermanfaat bagi kehidupan sehari-hari serta merupakan penunjang bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak ditemui permasalahan yang berhubungan dengan matematika. Permasalahan ini biasanya berhubungan dengan persamaan diferensial, khususnya persamaan diferensial parsial, baik diferensial parsial linear maupun nonlinear. Masalah nonlinear ini biasanya sulit diselesaikan baik secara analitik maupun secara numerik. Oleh sebab itu, maka dibutuhkan metode-metode yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial ini.

Beberapa penelitian difokuskan pada penemuan metode untuk memperoleh solusi dari masalah yang dimodelkan dalam persamaan nonlinear. Beberapa metode yang digunakan antara lain, metode homotopi, persamaan aljabar, persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Metode analisis homotopi adalah metode yang bebas, artinya tidak memperhatikan kecil atau besarnya suatu parameter. Hal ini diamati dari berbagai referensi teknik yang diusulkan adalah sangat efektif. Oleh karena itu, penulis menggunakan metode homotopi dalam menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial parsial nonlinear ini.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini berdasarkan atas perumusan masalah diatas adalah:

1. Mempelajari metode analisis homotopi.
2. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial Homogen Tak Linier $u_t + u_x v_x + u_y v_y + u = 0; v_t + v_x w_x - v_y w_y - v = 0; w_t + w_x u_x + w_y u_y - w = 0$

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang didapatkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menambah pengetahuan tentang metode analisis homotopi (HAM).
2. Menambah pengetahuan tentang system persamaan diferensial parsial.
3. Mempergunakan metode analisis homotopi (HAM) untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial $u_t + u_x v_x + u_y v_y + u = 0$; $v_t + v_x w_x - v_y w_y - v = 0$; $w_t + w_x u_x + w_y u_y - w = 0$
4. Memahami cara menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan diferensial parsial dengan menerapkan metode analisis homotopi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya persamaan differensial dibagi dalam dua kelas, yaitu persamaan differensial biasa (PDB) dan persamaan differensial parsial (PDP). Jika turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka disebut persamaan differensial biasa. Sedangkan, jika turunan fungsi itu tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan differensial parsial (Bronson dan Costa, 2007).

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu turunan parsial. Persamaan diferensial parsial ini merupakan persamaan yang menghubungkan fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel turunan parsialnya. Persamaan diferensial muncul secara alami dalam sains fisika, model matematika, dan dalam matematika itu sendiri. Persamaan diferensial parsial digolongkan berdasarkan unsur yang sama, yaitu orde, linearitas dan kondisi batas. Orde dari persamaan diferensial parsial ditentukan oleh orde dari turunan tertinggi dari persamaan diferensial parsial tersebut.

Persamaan diferensial orde 1

$$\frac{\partial c}{\partial x} - a\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

Persamaan diferensial orde 2

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Dc\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

Persamaan diferensial orde 3

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

Persamaan diferensial parsial berikut merupakan bentuk persamaan diferensial orde dua :

$$a(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2b(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d(\cdot) = 0 \tag{2.4}$$

Selain itu, persamaan diferensial juga digolongkan menjadi persamaan linear, kuasilinear dan nonlinear dengan penjelasan sebagai berikut :

1. Apabila koefisien pada persamaaan (2.4) adalah konstan atau fungsi hanya terdiri dari variabel bebas saja $[(\cdot) = (x, y)]$ maka persamaan itu disebut persamaan linear.
2. Apabila koefisien pada persamaaan (2.4) adalah fungsi dari variabel tak bebas dan/atau merupakan turunan dengan pangkat yang lebih rendah daripada diferensialnya $\left[(\cdot) = \left(x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$, maka persamaan itu disebut persamaan kuasilinear.
3. Apabila koefisien pada persamaaan (2.4) adalah fungsi dengan turunan sama dengan pangkatnya $\left[(\cdot) = \left(x, y; u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\right]$, maka persamaan itu disebut persamaan nonlinear (Sasongko, 2010).

2.2 Metode Analisis Homotopi (HAM)

Metode analisis homotopi (HAM) pertama kali dirancang pada tahun 1992 oleh Shijun Liao dari Shanghai Jiaotong University dalam disertasi PhD-nya dan dimodifikasi lebih lanjut pada tahun 1997 untuk memperkenalkan parameter tambahan nol-nol atau disebut sebagai parameter konvergensi-kontrol yang dilambangkan dengan $\boldsymbol{c_0}$untuk membangun homotopi pada sistem diferensial dalam bentuk umum. Metode analisis homotopi (HAM) adalah teknik semianalitis untuk memecahkan masalah taklinear biasa atau persamaan diferensial parsial.

Metode analisis homotopi (HAM) yang diusulkan oleh Shijun Liao (1992) didasarkan pada konsep dalam topologi dan diferensial geometri untuk menghasilkan kekonvergenan deret dari sistem taklinear. Konsep homotopi tersebut kemudian ditelusuri kembali ke Jules Henri Poincare, seorang matematikawan Perancis. Homotopi menjelaskan semacam variasi deformasi dalam matematika. Sebagai contoh sebuah lingkaran dapat dideformasikan secara kontinu menjadi elips, dan bentuk dari cangkir kopi dapat dideformasikan secara kontinu menjadi bentuk donat. Pada intinya, homotopi didefinisikan sebagai suatu penghubung antara benda yang berbeda dalam matematika yang memiliki karakteristik yang sama diberbagai aspek.

Definisi 1:

Suatu homotopi dua fungsi yang kontinu f(x) dan g(x) dari suatu ruang topologi X ke Y dinotasikan sebagai fungsi H : X x [0,1] → Y dari produk ruang X dengan interval [0,1] ke Y sedemikian sehingga jika $x \in X$ maka

$$H(x;0) = f(x) \text{ dan } H(x;1) = g(x) \tag{2.5}$$

Definisi 2:

Parameter *benama* $q \in [0,1]$ di dalam suatu fungsi atau persamaan homotopi disebut parameter homotopi.

Definisi 3:

Diberikan suatu persamaan ε_1, yang mempunyai paling sedikit satu solusi u. Ambil ε_0 sebagai persamaan awal yang solusinya diketahui u_0. Persamaan homotopi $\varepsilon(q): \varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$ dengan parameter homotopi $q \in [0,1]$ naik dari 0 menuju 1, $\varepsilon(q)$ dideformasikan secara kontinu dari persamaan awal ε_0 ke persamaan asli ε_1 di mana solusinya berubah secara kontinu dari solusi yang diketahui u_0 dari ε_0 ke solusi yang tidak diketahui u dari ε_1. Jenis dari persamaan homotopi ini disebut persamaan deformasi orde nol.

Definisi 4:

Diberikan sebuah persamaan taklinear dinotasikan oleh ε, yang paling tidak memiliki satu solusi $u(z,t)$, dimana z dan t merupakan variabel bebas. $q \in [0,1]$ menunjukkan homotopi parameter dan $\varepsilon(q)$ menunjukkan persamaan deformasi orde nol, yang menghubungkan persamaan asli ε, dan persamaan awal ε_0 dengan aproksimasi awal yang diketahui $u_0(z,t)$.

Asumsikan bahwa persamaan orde nol $\varepsilon(q)$ memiliki solusi dan analitik di $q = 1$, sehingga diperoleh homotopi deret Maclaurin:

$$\emptyset(z,t;q) \sim u_0(n,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z,t) q^n, \qquad q \in [0,1] \tag{2.6}$$

dan deret homotopi:

$$\emptyset(z,t;1) \sim u_0(z,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z,t) \tag{2.7}$$

Persamaan yang berhubungan dengan $u_n(z,t)$ yang nilainya tidak diketahui disebut persamaan deformasi orde ke-n.

Definisi 5:

Jika solusi $\varphi(z,t;q)$ dari persamaan deformasi orde nol $\varepsilon(q): \varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$ ada dan analitik di dalam $q \in [0,1]$, maka diperoleh solusi deret homotopi dari persamaan asli ε_1:

$$u(z,t) = u_0(z,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,(z,t) \tag{2.8}$$

dan aproksimasi homotopi orde ke-m:

$$u(z,t) \approx u_0(z,t) + \sum_{n=1}^{M} u_n\,(z,t) \tag{2.9}$$

(Liao, S, 2012)

Misalkan terdapat persamaan diferensial berikut,

$$N_i[z_i(x,t)] = 0 \quad ; i = 1,2,\dots,n$$

Dimana N_i adalah operator nonlinear yang mewakili seluruh persamaan, x dan t adalah variable bebas dan $z_i(x,t)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Dengan cara mengeneralisasi metode homotopi sederhana, Liao menyusun persamaan deformasi orde nol.

$$(1-q)L\big[\phi_i(x,t;q) - z_{i,0}(x,t)\big] = qh_iN_i\,[\phi_i(x,t;q)] \tag{2.10}$$

Dimana $q\epsilon\ [0,1]$ adalah parameter terikat, hi adalah fungsi tak nol tambahan, L adalah operator linear tambahan, $z_{i,0}(x,t)$ adalah tebakan awal dari $z_i(x,t)$ dan $\phi(x,t;q)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Penting untuk diingat bahwa, bebas untuk memilih objek tambahan seperti h_i dan L pada HAM. Terlihat jelas bahwa saat $q = 0$ dan $q = 1$, keduanya menghasilkan

$$\phi_i(x,t;0) = z_{i,0}(x,t) \text{ dan } \phi_i(x,t;1) = z_i(x,t). \qquad (2.11)$$

Maka, sejalan dengan meningkatnya q dari 0 ke 1, solusi $\phi_i(x,t;q)$berubah dari tebakan awal $z_{i,0}(x,t)$ kesolusi $z_i(x,t)$. Memperluas $\phi_i(x,t;q)$ dalam deret Taylor terhadap q, akan menghasilkan

$$\phi_i(x,t;q) = z_{i,0}(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x,t)q^m \qquad (2.12)$$

Dimana

$$z_{i,m} = \frac{1}{m!}\frac{\delta^m \phi_i(x,t;q)}{\delta q^m}\bigg|_{q=0} \qquad (2.13)$$

Jika operator linear tambahan, tebakan awal, parameter tambahan h_i, dan fungsi tambahan dipilih dengan benar, maka deret pada persamaan (2.18) konvergen ke $q = 1$ dan

$$\phi_i(x,t;1) = z_{i,0}(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x,t) \qquad (2.14)$$

Yang mana merupakan satu dari solusi – solusi persamaan – persamaan nonlinear aslinya, seperti yang telah dibuktikan oleh Liao. Jika $h_i = -1$, persamaan (2.14) menjadi

$$(1-q)L\left[\phi_i(x,t;q) - z_{i,0}(x,t)\right] + qN_i\left[\phi_i(x,t;q)\right] = 0 \qquad (2.15)$$

Berdasarkan (2.18), persamaan yang menentukan dapat di deduksi dari persamaan deformasi orde nol (2.16). Kita definisikan vektor

$$\overrightarrow{z_{i,n}} = \{ z_{i,0}(x,t), z_{i,1}(x,t), \dots, z_{i,n}(x,t) \} \qquad (2.16)$$

Mendiferensialkan (2.16) sebanyak m kali terhadap parameter terikat q dan lalu masukkan $q = 0$ dan akhirnya membaginya dengan $m!$, kita dapatkan yang disebut dengan persamaan deformasi orde ke-m.

$$L\left[z_{i,m}(x,t) - X_m z_{i,m-1}(x,t)\right] = h_i R_{i,m}(\overrightarrow{z_{\iota,m-1}}) \qquad (2.17)$$

Dimana

$$R_{i,m}\left(\overrightarrow{z_{\iota,m-1}}\right) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\delta^{m-1}N_i[\phi_i(x,t;q)]}{\delta q^{m-1}}\bigg|_{q=0} \qquad (2.18)$$

Dan

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \qquad (2.19)$$

Harus ditekankan bahwa $z_{i,m}(x,t)(m \geq 1)$ diatur oleh persamaan linear (2.19) dengan syarat batas linear yang didapat dari masalah awalnya, yang dapat dengan mudah dipecahkan oleh *software* komputer seperti *Maple*.

2.3 Deret Taylor

Deret Taylor adalah bentuk khusus dari suatu fungsi yang dapat digunakan sebagai pendekatan dari integral suatu fungsi yang tidak memiliki anti turunan elementer dan dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial.

Definisi 1

Bentuk umum Deret Taylor:

$$f(x_i+1) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots + f_n(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + Rn \qquad (2.20)$$

Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik $x_i + 1$ yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i.

Dalam praktek, sulit memperhitungkan semua suku pada deret Taylor tersebut dan biasanya hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja.

1. Memperhitungkan satu suku pertama (orde nol)

$$f(x_i + 1) \approx f(x_i) \tag{2.21}$$

artinya nilai f pada titik $x_i + 1$ sama dengan nilai pada x_i. Perkiraan tersebut benar jika fungsi yang diperkirakan konstan. Jika fungsi tidak konstan, maka harus diperhitungkan suku-suku berikutnya dari deret Taylor.

2. Memperhitungkan dua suku pertama (orde satu)

$$f(x_i + 1) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} \tag{2.22}$$

3. Memperhitungkan tiga suku pertama (orde dua)

$$f(x_i + 1) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} \tag{2.23}$$

Definisi 2

Misalkan $f(x)$ fungsi sebarang yang dapat dinyatakan sebagai suatu deret pangkat sebagai berikut:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \cdots \tag{2.24}$$

dengan b_n, n=1,2,3 menyatakan koefisien deret pangkat dan a menyatakan titik pusatnya.

Jika fungsi $f(x)$ dinyatakan dalam bentuk deret berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n \tag{2.25}$$

maka deret tersebut disebut deret Taylor dari fungsi yang berpusat di a (Kreyszig, 1998).

2.4 Deformasi

Deformasi merupakan perubahan bentuk, dimensi dan posisi dari suatu materi baik dari suatu materi baik merupakan bagian dari alam ataupun buatan manusia dalam skala waktu dan ruang (Taufiq, 2005).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan sistem permasalahan diferensial parsial homogen dengan menggunakan Metode Analisis Homotopi (HAM) adalah sebagai berikut

1. Misalkan diberikan persamaan

$$u_t + u_x v_x + u_y v_y + u = 0$$

$$v_t + v_x w_x - v_y w_y - v = 0$$

$$w_t + w_x u_x + w_y u_y - w = 0$$

(3.2.1)

Dengan syarat awal

$$u(x,y,0) = e^{x+y}, \qquad v(x,y,0) = e^{x-y} \qquad w(x,y,0) = e^{-x+y}$$

2. Menyelesaikan persamaan (3.2.1) menggunakan metode analisi homotopi (HAM) dengan menentukan nilai tebakan awal dari persamaan deformasi orde ke-m $z_{i,m}(x, y, t)$.
3. Mengonstruksikan persamaan $R_{i,m}(\overrightarrow{z_{i,m-1}})$.
4. Setelah mendapatkan persaman $R_{i,m}(\overrightarrow{z_{i,m-1}})$, kita dapat menentukan solusi persamaan deformasi pada persamaan yang diperoleh dari langkah ke (2) untuk setiap m= 1, 2, 3, 4,5.
5. Mensubtitusikan hasil ini kedalam deret homotopi, sehingga diperoleh solusi homotopi.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penguraian di atas langkah langkah yang telah dikerjakan dalam metode homotopi ini, diperoleh kesimpulan bahwa persamaan diferensial parsial $u_t + u_x v_x + u_y v_y + u = 0$

$v_t + v_x w_x - v_y w_y - v = 0$ serta $w_t + w_x u_x + w_y u_y - w = 0$. memiliki solusi analitik yaitu :$u(x,y,t) = e^{x+y-t}$, $v(x,y,t) = e^{x-y+t}$ serta $w(x,y,t) = e^{-x+y+t}$.

5.2 Saran

Saran pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Pada penelitian ini penulis hanya mencari u(*x*,*y*,*z*), v(*x*,*y*,*z*), dan w(*x*,*y*,*z*) sampai dengan m =5, diharapkan untuk penelitian selanjutnya dapat dicari m > 5.
2. Diharapkan metode analisi homotopi ini dapat dikerjakan untuk persamaan diferensial parsial lain.

DAFTAR PUSTAKA

Bronson, R. dan Costa, G. 2007. *Persamaan Differensial*. Erlangga, Jakarta.

Kreyzig, E. 1998. *Advanced Engineering Mathematics.* Eighth Edition. John Wiley, New York.

Liao, S. 2012. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equation*. Higher Education Press, Beijing.

Sasongko, S.B. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Andi, Yogyakarta.

Taufiq. 2005. *Deformasi*. http://dtaufiqnr.blogspot.co.id/2012/04/deformasi.html. Diakses pada tanggal 22 November pukul 15.00 WIB.