BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI SATU SISI PADA LINGKARAN TAK SERAGAM

(Skripsi)

Oleh

KASANDRA PRAWINASTI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

THE LOCATING-CHROMATIC NUMBER FOR AMALGAMATION ONE EDGE OF NON HOMOGENEOUS CYCLES

By

KASANDRA PRAWINASTI

Let c be a proper coloring of a connected graph G with $c(u) \neq c(v)$ for adjacent vertices u and v in G. Let C_i is a set of vertices receiving color i. The color code $c_\Pi(v)$ of a vertex v in G is the ordered k-tuple $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ with $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If all distinct vertices of G have distinct color codes, then c is called a locating-coloring of G. The minimum number of colors in a locating-coloring of G is called the locating-chromatic number of graph G, denoted by $X_L(G)$. In this study will be discussed about the locating-chromatic number for amalgation one edge of non homogeneous cycles.

Keywords: amalgamation, color code, cycle, graph, locating coloring

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI SATU SISI PADA LINGKARAN TAK SERAGAM

Oleh

KASANDRA PRAWINASTI

Misalkan c suatu pewarnaan sejati di graf terhubung G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik v di G adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari G disebut bilangan kromatik lokasi dari graf G, yang dinotasikan dengan $X_L(G)$. Pada penelitian dibahas tentang bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam.

Kata kunci: amalgamasi, graf, kode warna, lingkaran, pewarnaan lokas

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI SATU SISI PADA LINGKARAN TAK SERAGAM

Oleh

Kasandra Prawinasti

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI SATU SISI PADA LINGKARAN TAK SERAGAM**

Nama Mahasiswa : *Kasandra Prawinasti*

No. Pokok Mahasiswa : 1417031063

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP 19760411 200012 2 001	NIP 19610128 198811 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **08 Juni 2018**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "**Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amalgamasi Satu Sisi pada Lingkaran Tak Seragam**" adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Juni 2018

Yang menyatakan

Kasandra Prawinasti

RIWAYAT HIDUP

Penulis skripsi berjudul “Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amalgamasi Satu Sisi pada Lingkaran Tak Seragam” adalah Kasandra Prawinasti. Lahir di Surabaya, 04 Mei 1994. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan suami istri Bapak Ir. K. Cahyo Utomo dan Ibu Winarti.

Menyelesaikan pendidikan TKS AL-KAUTSAR, Rajabasa, kota Bandar Lampung pada tahun 2000. Lulus pendidikan SDS AL-KAUTSAR, Rajabasa, kota Bandar Lampung tahun 2006. Melanjutkan sekolah untuk SMP dan SMA di Pondok Modern Darussalam Gontor Putri 1, Mantingan-Ngawi, Jawa Timur dan lulus pada tahun 2013. Kemudian melanjutkan pengabdian sebagai tenaga kerja (guru) di Pondok Pesantren Mawaridussalam, Batang Kuis, Sumatera Utara selama setahun.

Pada pertengahan bulan tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu (S1) Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (UNILA) Bandar Lampung melalui jalur Mandiri. Selama perkuliahan penulis mengikuti organisasi Himpunan Mahasiswa/i Matematika (HIMATIKA) FMIPA UNILA pada tahun 2015-2016 sebagai anggota biro dana dan usaha dan UKMF Natural FMIPA

UNILA pada tahun 2014-2015 sebagai anggota biro usaha, tahun 2016 sebagai anggota biro kesekretariatan, tahun 2017 sebagai wakil kepala biro usaha. Pada bulan Januari 2017 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Perkebunan dan Peternakan Provinsi Lampung dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Bandar Agung Kecamatan Sragi Kabupaten Lampung Selatan pada bulan Juli-Agustus 2017.

KATA INSPIRASI

و ما اللذة الا بعد التعب

(Tak ada kenikmatan kecuali setelah bersusah payah)

اطلب العلم من المهد الى اللحد

(Tuntutlah ilmu sejak buaian hingga liang lahat)

افة العلم النسيان

(Bencana pengetahuan adalah lupa)

لا تحتقر من دونك فلكل شىء مزية

(Jangan menghina orang yang lebih rendah darimu, karena setiap sesuatu memiliki kelebihan)

اجهد ولاتكسل ولاتك غافلا # فندامة العقبى لمن يتكاسل

(Bersungguh-sungguhlah dan jangan malas dan jangan jadi lalai, karena penyesalan mendalam itu adalah milik mereka yang bermalas-malasan)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT
penulis mempersembahkan karya kecil untuk:

Ayah, mama dan adikku tercinta yang selalu memberi kasih sayang, dukungan serta motivasi dan do'a yang begitu besar untuk menjadi anak dan kakak yang bisa dibanggakan hingga saat ini.

Sahabat-sahabatku yang tak pernah lelah memberi semangat, motivasi, dukungan ketika penulis mulai lengah.

Dosen pembimbing dan penguji yang sangat berjasa dalam mengarahkan dan membimbing penulis.

Almamaterku Universitas Lampung.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah segala puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat dan karunia-Nya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amalgamasi pada Lingkaran Tak Seragam”**. Tak lupa shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW yang selalu diharapkan syafa’atnya kelak. Amin.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam memberikan bimbingan, motivasi, semangat, dan saran yang membangun selama proses penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., sebagai Dosen Pembimbing 1 yang telah meluangkan waktu dan membimbing penulis selama menyusun skripsi.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz,M.Si., sebagai Dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan saran serta arahan kepada penulis.
3. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan saran dan evaluasi kepada penulis selama penyusunan skripsi.
4. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan selama masa perkuliahan.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D., selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universita Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
8. Ayahanda, Ibunda, dan adik penulis tercinta yang selalu memberikan dukungan moril maupun material serta senantiasa berkorban dan mengupayakan segala hal yang terbaik untuk penulis tanpa mengenal lelah.
9. Sahabat-sahabat penulis tersayang Agus, Blitut, Ceyu, Cua, Darmi, Iin, Mbul, Ncep, Otin, Rere, Riya dan Vivin yang selalu memberi semangat yang sangat besar kepada penulis.
10. Segenap keluarga besar dan teman-teman Jurusan Matematika 2014 lainnya yang telah banyak memberikan semangat, ide, dan saran kepada penulis.
11. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Dengan segenap upaya penulis berusaha semaksimal mungkin untuk menyempurnakan tulisan ini. Namun, penulis menyadari bahwa kesempurnaan hanya milik Allah SWT. Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Bandar Lampung, Juni 2018
Penulis

Kasandra Prawinasti

DAFTAR ISI

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas tentang hal–hal yang mendasari penelitian ini yakni tujuan serta manfaat dari penelitian ini.

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika yang mempelajari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan sisi. Banyak permasalahan yang dapat dinyatakan dan diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Seiring kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, terdapat banyak penelitian tentang graf, diantaranya pelabelan sisi, pelabelan titik, pewarnaan graf, dimensi partisi graf dan lain-lain. Graf merupakan kumpulan titik dan sisi, dinotasikan dengan G = (V,E) dimana V menyatakan himpunan titik yang tak kosong dan E menyatakan himpunan sisi yang merupakan pasangan sisi tak terurut dari titik-titik v. Pada abad ke–18, Leonhard Euler memperkenalkan dasar pengembangan teori graf. Pada saat itu dikota *Konigsberg*, terdapat suatu sungai yang membelah kota menjadi empat daratan yang terpisah dan daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler membuktikan dengan suatu bentuk representasi graf, bahwa hal itu tidak mungkin. Bentuk representasi itu berkembang menjadi teori graf yang saat ini di kenal.

Gambar 1 Permasalahan jembatan *Konigsberg* dan representasinya.

Bilangan kromatik lokasi salah satu materi dalam teori graf yang dikaji oleh Chatrand, dkk., untuk pertama kalinya pada tahun 2002. Pada dasarnya menentukan bilangan kromatik lokasi dengan cara meminimumkan jumlah warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dengan kode warna yang berbeda di setiap titik-titik pada graf. Karena bilangan kromatik lokasi sangat bergantung dengan kode warna yang digunakan pada graf tersebut.

Pada penelitian sebelumnya, Chartrand, dkk., (2002) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa graf, diantaranya pada graf lengkap diperoleh $\chi_L\ (K_n) = n,$ pada graf siklus diperoleh $\chi_L\ (C_n) = 3$ untuk *n* ganjil dan $\chi_L\ (C_n) = 4$ untuk *n* genap. Selain itu, pada tahun yang sama Chartrand, dkk., juga menunjukkan bahwa terdapat pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi $k \in \{3, 4, \ldots.., n-2, n\}$.

Asmiati, dkk., (2011) telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang. Selanjutnya, Asmiati, dkk., (2012) memperoleh bilangan kromatik lokasi pada kembang api dan berhasil mengkarakterisasi semua graf yang memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga. Selanjutnya, Asmiati, dkk., (2014) telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang tak homogen dan graf amalgamasi pohon berbilangan kromatik lokasi empat. Sejauh penelusuran literature ini, belum terdapat suatu teorema yang dapat menentukan bilangan kromatik lokasi untuk sembarang graf. Penelitian terus dilakukan untuk mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf terhubung lainnya. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas terkait masalah penentuan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman dan wawasan mengenai bilangan kromatik lokasi graf, khususnya graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam.
2. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan mengenai bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi lainnya.

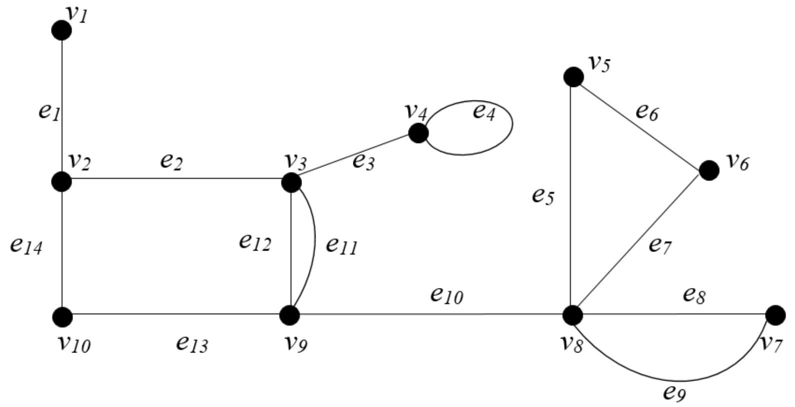
II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi, istilah–istilah yang berhubungan dengan materi yang akan dibahas pada penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Graf

Konsep dasar graf yang akan digunakan pada penelitian ini diambil dari Narsingh Deo (1989). Graf merupakan kumpulan titik dan sisi, dinotasikan dengan

$G = (V, E)$, dengan V menyatakan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, ...,v_n\}$ yang tak kosong dan E menyatakan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ yang merupakan pasangan tak terurut dari titik–titik di v.



Gambar 2 Contoh graf dengan 10 titik dan 14 sisi.

Dua titik pada graf G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung dengan suatu sisi. Suatu sisi dikatakan menempel dengan suatu titik v, jika titik v merupakan salah satu titik ujung dari sisi tersebut. Misalkan, jika titik v_1 dan titik v_2 dihubungkan dengan suatu sisi e , maka titik v_1 dan titik v_2 menempel pada sisi e begitu juga dengan sisi e menempel pada titik v_1 dan titik v_2 sehingga titik v_1 bertetangga dengan titik v_2. Pada Gambar 2.1 dapat diambil contoh, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2. Dan sisi e_1 menempel dengan titik v_1 dan titik v_2.

Pada Gambar 2.1, merupakan graf $G(V, E)$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}\}$. Derajat suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Daun adalah titik yang berderajat satu. Pada Gambar 2.1 , derajat pada setiap titiknya adalah $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3)= 4$, $d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 2$, $d(v_6) = 2$, $d(v_7) = 2$, $d(v_8) = 5$, $d(v_9) = 4$, $d(v_{10}) = 2$ dan daun ada pada sisi e_1.

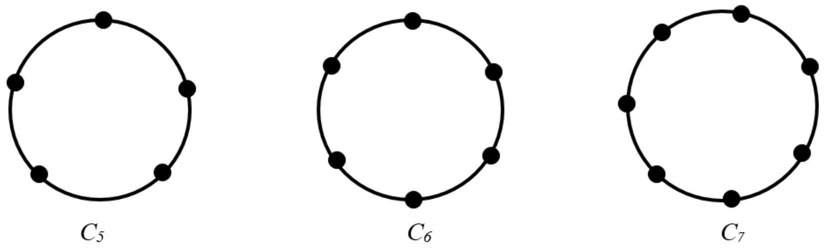
Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi parallel adalah beberapa sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi paralel dan atau *loop* disebut graf sederhana. Pada Gambar 2.1, bukan graf sederhana karena terdapat *loop* pada titik v_4 yaitu pada sisi e_4 dan terdapat sisi paralel pada titik v_3 dan titik v_9, titik v_7 dan titik v_8.

Walk adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya pada suatu graf. Lintasan adalah *walk* yang memiliki atau melewati titik yang berbeda–beda dimana titik–titik yang dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Serkuit adalah *closed path*, yaitu *path* yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit ganjil dan sirkuit genap. Sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah ganjil, sedangkan sirkuit genap adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah genap. Contoh *walk* pada Gambar 2.1 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3 - e_{12} - v_9 - e_{10} - v_8 - e_8 - v_7 - e_9 - v_8 - e_7 - v_6 - e_6 - v_5$ atau $v_4 - e_3 - v_3 - e_{12} - v_9 - e_{11} - v_3 - e_2 - v_2 - e_1 - v_1$, sedangkan contoh *path* pada Gambar 2.1 adalah $v_4 - e_3 - v_3 - e_2 - v_2 - e_{14} - v_{10} - e_{13} - v_9 - e_{10} - v_8 - e_7 - v_6$ atau $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3 - e_{11} - v_9 - e_{10} - v_8 - e_7 - v_5$. Dari Gambar 2.1 contoh sirkuit adalah $v_5 - e_6 - v_6 - e_7 - v_8 - e_5 - v_5$ yang juga merupakan sirkuit ganjil, sedangkan $v_3 - e_{11} - v_9 - e_{13} - v_{10} - e_{14} - v_2 - e_2 - v_3$ merupakan sirkuit genap.

2.2 Graf Terhubung, Graf Lingkaran dan Graf Amalgamasi

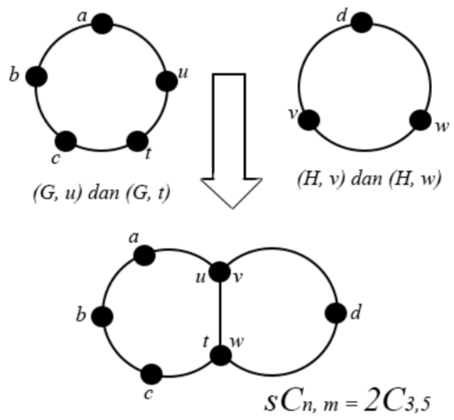
Graf G dikatakan terhubung jika terdapat *path* yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Graf G pada Gambar 2.1 merupakan gambar graf terhubung, karena terdapat sekurang-kurangnya ada satu jalan yang menghubungan sepasang titik di G (Deo, 1989).

Menurut Ardiyansah dan Darmaji, pada tahun 2013. Graf lingkaran merupakan graf teratur yang masing–masing titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dinotasikan dengan C_n dimana n menyatakan orde dari graf. Pada graf lingkaran, orde dan ukuran memiliki jumlah yang sama. Contoh graf lingkaran diunjukan pada gambar sebagai berikut.



Gambar 3 Contoh graf lingkaran dengan orde 5, 6, dan 7.

Dalam membentuk sebuah graf baru, salah satu cara yang dapat dilakukan yaitu dengan mengunakan operasi amalgamasi. Amalgamasi simpul dari pasangan titik graf (G, u) bersama (H, v) adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan titik u dan v menjadi satu titik. Demikian dengan pasangan titik graf (G, t) bersama (H, w) adalah graf yang di peroleh dengan menggabungkan titik t dan w menjadi satu titi atau dapat disebut satu sisi. Notasi yang digunakan untuk menyatakan banyaknya lingkaran adalah "s", untuk menyatakan banyaknya titik pada amalgamasi lingkaran tak seragam adalah "$C_{m,\,n}$" (apabila diambil dua titik dari masing–masing graf). Sehingga demikian, notasi yang digunakan untuk menyatakan graf amalgamasi lingkaran satu sisi tak seragam adalah "$sC_{n,\,m}$". Berikut contoh dari graf amalgamasi tersebut.



Gambar 4 Contoh graf amalgamasi dua titik atau satu sisi dinotasikan dengan $sC_{n,\, m} = 2C_{3,\, 5}$.

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi

Definisi dari bilangan kromatik lokasi menurut Chartrand, dkk., pada tahun 2002 yaitu misalkan c suatu pewarnaan sejati di graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik u dan titik v yang bertetangga di graf G. Misalkan c_i adalah himpunan titik–titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas–kelas warna dari $v(G)$. Kode warna, $c_\Pi(v)$ dari v adalah k–pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$, jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G, banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, yang dinotasikan dengan χ_L (G).

Teorema dasar berikut telah dibuktikan oleh Chartrand, dkk., pada tahun 2002 tentang bilangan kromatik lokasi.

Teorema 2.1 (Chartrand, dkk., 2002)

Misal c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika titik u dan titik v adalah dua titik yang berbeda pada graf G. Sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in v(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) = c(v)$. Dalam hal khusus, jika titik u dan titik v adalah titik–titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti: Misalkan c adalah suatu pewarnaa lokasi graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik – titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu $u, v \in v(G)$, andaikan $c(u)$ sedemikian sehingga titik u dan titik v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $d(u, w) = d(v, w)$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.

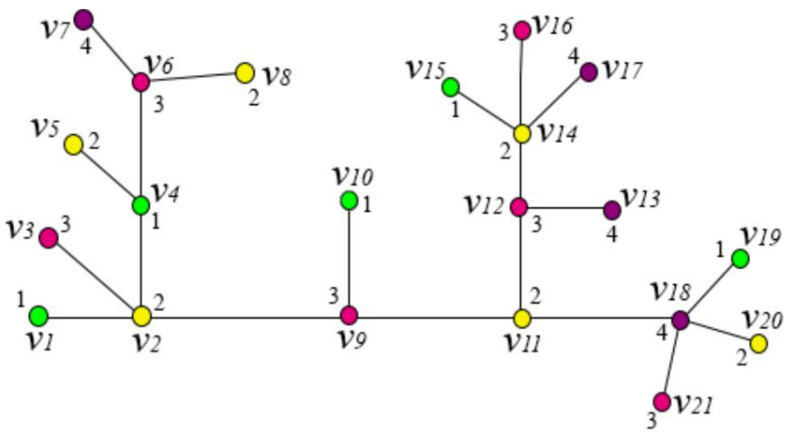
Akibat 2.1 (Chartrand, dkk., 2002)

Jika G adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun di G, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti: Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Dari Teorema 2.1. setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna berbeda untuk setiap x_i, $i = 1, 2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan nama x_i, maka v harus mempunyai warna 7 yang berbeda dengan semua daun x_i.

Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Berikut ini diberikan graf G dan akan ditentukan Bilangan kromatik lokasi dari graf G tersebut.



Gambar 5 Pewarnaan lokasi minimum dari graf G.

Diberikan graf G seperti yang terlihat pada Gambar 2.4. Kemudian akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf G. Karena terdapat titik v_{14} yang mempunyai tiga daun dan berdasarkan Akibat 2.1, maka $\chi_L(G) \geq 4$. (a)

Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna. Pada graf G diberikan kelas warna sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_4, v_{10}, v_{15}, v_{19}\}$, $C_2 = \{v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{14}, v_{20}\}$, $C_3 = \{v_3, v_6, v_9, v_{12}, v_{16},$

v_{21}} dan C_4 = {v_7, v_{13}, v_{17}, v_{18}}. Oleh karena itu, didapatkan kode warna sebagai berikut:

c_Π (v_1) = (0, 1, 2, 4); c_Π(v_8) = (2, 0, 1, 2); c_Π (v_{15}) = (0, 1, 2, 1);

c_Π (v_2) = (1, 0, 1, 3); c_Π (v_9) = (1, 1, 0, 2); c_Π (v_{16}) = (2, 1, 0, 2);

c_Π (v_3) = (2, 1, 0, 4); c_Π (v_{10}) = (0, 2, 1, 3); c_Π (v_{17}) = (2, 1, 2, 0);

c_Π (v_4) = (0, 1, 1, 2); c_Π (v_{11}) = (2, 0, 1, 1); c_Π (v_{18}) = (1, 1, 1, 0);

c_Π (v_5) = (1, 0, 2, 3); c_Π (v_{12}) = (2, 1, 0, 1); c_Π (v_{19}) = (0, 2, 2,1);

c_Π (v_6) = (1, 1, 0, 1); c_Π (v_{13}) = (3, 2, 1, 0); c_Π (v_{20}) = (2, 0, 2, 1);

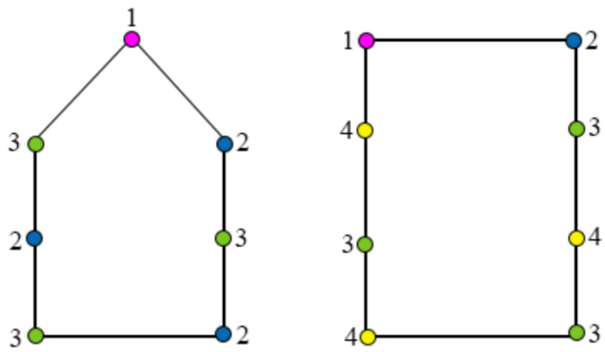
c_Π (v_7) = (2, 2, 1, 0); c_Π (v_{14}) = (1, 0, 1, 1); c_Π (v_{21}) = (2, 2, 0, 1).

Karena kode warna dari semua titik di *G* berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi . Jadi, $\chi_L(G) \leq 4$. (b)

Berdasarkan (a) dan (b), maka Π adalah pewarnaan lokasi dari *G* sehingga $\chi_L(G)$ = 4 (Chartrand, dkk., 2002).

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Lingkaran

Pada bagian ini akan didiskusikan Bilangan kromatik lokasi lingkaran setelah pembuktian Teorema dan contohnya. Pewarnaan lokasi minimum untuk lingkaran C_7 dan C_8 dapat ditunjukan pada Gambar 2.5. Contoh hasil dari ilustrasi sebagai berikut:



Gambar 6 Pewarnaan lokasi minimum dari C_7 dan C_8.

Teorema 2.2 (Chartrand, dkk., 2002)

Untuk lingkaran C_n dari orde $n \geq 3$

$$\chi_L\ (C_n) = \begin{cases} 3\ ;\text{jika n adalah ganjil} \\ 4\ ;\text{Jika n adalah genap} \end{cases}$$

Bukti: Pertimbangkan dua kasus

Kasus 1. $n \geq 3$ adalah ganjil. Misal $C_n : v_1, v_2, v_3, ..., v_n$. Diberi warna 1 untuk titik v_1, warna 2 untuk titik v_2 jika i adalah genap, dan warna 3 untuk v_3 jika $i \geq 3$ dan i adalah ganjil. Berdasarkan proposisi 2.1, hanya perlu menunjukkan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi pada $\chi_L\ (C_n) = 3$. Mempertimbangkan dua subkasus.

Subkasus 1.1. $n = 4k + 1$, dimana $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi\ (v_{2i}) = (2i - 1, 0, 1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq k$, $c_\Pi\ (v_{2i}) = (2k + 2 - 2i, 0, 1)$. Demikian, untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi\ (v_{2i+1}) = (2i, 1, 0)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi\ (v_{2i+1}) = (2k - 2i + 1, 1, 0)$. Karena vektor–vector $c_\Pi\ (v_i)$ berbeda. Pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi jadi, $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$.

Subkasus 1.2. $n = 4 + 3$, dimana $k \geq 0$. Membuktikan bahwa $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$ caranya sama seperti pada Subkasus 1.1.

Kasus 2. $n \geq 4$ adalah genap. Misalkan kembali $C_n : v_1, v_2, v_3, ..., v_n . v_1$. Diberi warna 1 untuk titik v_1, warna 2 untuk titik v_2, warna 3 untuk titik v_3 jika $(i \geq 3)$ adalah ganjil, dan warna 4 untuk v_i jika $(i \geq 4)$ dan i adalah genap. Di tunjukkan bahwa pewarnaan lokasi dari C_n adalah $\chi_L(Cn) \leq 4$.

Subkasus 2.1. $n = 4k$, dimana $k \geq 1$, untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi\ (v_{2i+1}) = (2i, 2i - 1, 0, 1)$. Dimana $k + 1 \leq i \leq 2k - 1$, $c_\Pi\ (v_{2i+1}) = (4k - 2i, 4k - 2i + 1, 0, 1)$. Untuk $2 \leq i \leq k$, $c_\Pi\ (v_{2i}) = (2i - 1, 2i - 2, 1, 0)$; dimana $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi\ (v_{2i}) = (4k + 1 - 2i, 4k + 2 - 2i, 1, 0)$. Karena vector – vector $c_\Pi\ (v_i)$ berbeda. Pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi.

Subkasus 2.2. $n = 4k + 2$, dimana $k \geq 1$. Pembuktian bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi sama seperti Subkasus 2.1. Selanjutnya ini hanya perlu membuktikan bahwa $\chi_L\ (C_n) = 4$, jika n adalah genap. Asumsikan sebaliknya, bahwa terdapat pewarnaan lokasi c dari C_n memerlukan 3 warna, misalkan 1, 2, 3, untuk $n \geq 4$. Setidaknya terdapat satu warna, misalkan 2 adalah warna bilangan genap t dari titik pada C_n, dimana $2 \leq t \leq n/2$. Seperti proses lingkaran pada C_n. Dimulai v_1, misalkan $v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{it}$, titik–titik dari C_n bahwa berwarna 2. Karena tidak ada 2 titik yang bertetangga. Termasuk untuk setiap bilangan bulat dengan $1 \leq j \leq t$. Interval $I_j = \{\ v_{ij.+1} . v_{ij.+2}, ..., v_{ij.+1} - 1\}$.

Pertama, ditunjukkan bahwa tidak ada interval yang memiliki kardinalitas ganjil untuk 3 atau lebih; untuk asumsikan sebaliknya, beberapa selang I_j memuat bilangan ganjil pada titik 3 atau lebih. Tanpa menghilangkan umum, asumsikan bahwa $v_{ij} + 1$ dan $v_{ij+1} - 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian, c_Π $(v_{ij} + 1) = c_\Pi$ $(v_{ij+1} - 1) = (0, 1, 1)$ tetapi tidak mungkin.

Kedua, ditunjukkan bahwa tidak ada selang yang memuat bilangan genap pada titik–titiknya; untuk asumsikan sebaliknya, bahwa terdapat selang–selang yang memuat bilangan genap di titik–titiknya. Karena C_{2k} memiliki orde genap, pasti terdapat bilangan genap dari selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Misal I_j dan I_k menjadi 2 selang berbeda memuat bilangan genap di titik–titiknya. Asumsikan, tanpa kehilangan keumuman, bahwa $v_{ij} + 1$ diberi pewarnaan 1. Tepat hanya 1 dari $v_{ik} + 1$ dan $v_{ik+1} - 1$ diberi warna 1, maka c_Π $(v_{ij} + 1) = c_\Pi$ $(v_{ik} + 1) = (0, 1, 1)$ kontradiksi. Akibatnya, semua selang $t = n/2$ memuat tepat satu titik. Sehingga, terdapat bilangan bulat terkecil i_j $(1 \leq j \leq n/2)$, maka $v_{ij} - 1$ dan $v_{ij} + 1$ diberi warna secara berbeda, misalkan 1 dan 3, secara berturut–turut. Pentingnya, terdapat bilangan bulat $i_k > i_j$ bahwa $v_{ik} - 1$ diberi warna 3 dan $v_{ik} + 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian, c_Π $(v_{ij}) = c_\Pi$ $(v_{ik}) = (1, 0, 1)$. Hasil akhir kontradiksi. Oleh karena itu, $\chi_L(C_n) = 4$ jika n adalah genap.

III. METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini akan diberikan tempat dan waktu penelitian dan metode yang akan digunakan dalam penelitian ini.

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini akan dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2017/2018 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam (sC_{n_p,m_q}) dengan $s, p, q \geq 2$ dan $n, m \geq 3$. Batas bawah trivial dapat diperoleh dari Teorema 2.2, yaitu untuk (sC_{n_p,m_q}) dengan n, m ganjil $\chi_L(sC_{n_p,m_q}) \geq 3$, sedangkan untuk n, m genap $\chi_L(sC_{n_p,m_q}) \geq 4$. Jika batas atas trivial ini belum

memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

2. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam (sC_{n_p,m_q}) dengan s, p, $q \geq 2$ dan n, $m \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur dari grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.
3. Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasinya (sC_{n_p,m_q}) sama, misal y maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L(sC_{n_p,m_q}) = y$.
4. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.
5. Membuktikan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam $(sC_{3_p,m})$ dengan $p \geq 2$, $m \geq 5$ ganjil adalah 4 untuk $s = 2$ dan $s + 1$ untuk $s \geq 3$.
2. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam (sC_{3,m_q}) dengan $q \geq 2$, $m \geq 5$ ganjil adalah $k + 4$ untuk $k \geq 0$, dengan $(k + 1)^2 + 1 \leq s \leq (k + 2)^2$
3. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam (sC_{3_p,m_q}) $p, q \geq 2$, $m \geq 5$ ganjil adalah 4 untuk $s = 2$ dan $k + 3$ untuk $k \geq 1$, dengan $2k + 1 \leq s \leq 2k + 2$, $s \geq 3$.
4. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam (sC_{n_p,m_q}) $n, m \geq 5$ ganjil, $n < m$, $p, q \geq 2$ adalah $k + 2$ untuk $k \geq 2$ dengan $(k – 1)^2 + 1 \leq s \leq k^2$.
5. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran tak seragam (sC_{n_p,m_q}) $n, m \geq 4$ genap, $n < m$, $p, q \geq 2$ adalah 4 untuk $k = 1$, $s \leq 7$ dan $k + 2$ untuk $k \geq 2$ dengan $(k – 1)^2 + (k + 1) \leq s \leq (k)^2 + (k + 1)$.

DAFTAR PUSTAKA

Ardiyansah, R., dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*. **2**(1):2337-3520.

Asmiati. 2014. The Locating-Chromatic Number of Non-Homogeneous Amalgamation of Stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences.* **93**(1):89-96.

Asmiati dan Fitriani. 2014. Graf Amalgamasi Pohon Berbilangan Kromatik Lokasi Empat. *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII.*

Asmiati, Assiyatun, H., dan Baskoro, E. T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci*. **43**(1):1-8.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., dan Zhang, P. 2002. The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bulletin of The Institute of Combinatorics and its Applications.* **36**:89-101.

Deo, N. 1989. *Grapgh Theory with Applications to Enggineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.