STUDI PERBANDINGAN PERPINDAHAN PANAS PADA LOGAM SILINDER BERJENIS ALUMINIUM MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DAN CRANK - NICHOLSON

(Skripsi)

Oleh

Apredi Setiawan

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

STUDI PERBANDINGAN PERPINDAHAN PANAS PADA LOGAM SILINDER BERJENIS ALUMINIUM MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DAN CRANK – NICHOLSON

Oleh

APREDI SETIAWAN

Pada penelitian ini dikaji mengenai dinamika perpindahan panas pada logam silinder berjenis aluminium. Yang digambarkan dalam bentuk persamaan difusi yang dilengkapi dengan syarat awal dan syarat batas. Profil perilaku perpindahan panas dihampiri dengan pendekatan simulasi numerik menggunakan metode beda hingga yaitu skema implisit dan skema Crank – Nicholson. Hasil Menunjukkan skema Crank - Nicholson lebih mendekati solusi analitik dibandingkan skema implisit (metode beda hingga).

Kata Kunci : Perpindahan Panas, Persamaan Diferensial Parsial, Metode Beda Hingga, Metode Crank Nicholson.

ABSTRACT

COMPARATIVE STUDY OF HEAT TRANSFER IN CYLINDER ALUMINUM TYPE USING FINITE DIFFERENCE METHOD AND CRANK – NICHOLSON'S METHOD

By

APREDI SETIAWAN

In this research studied about dinamics of heat transfer in cylinder aluminum type. Illustrated in terms of the diffusion equation, equipped with initial terms and boundary terms. Behavior profiles heat transfer approached with numerical simulation approach using finite differential method that is implicit scheme and Crank – Nicholson's scheme. Results show Crank – Nicholson's scheme is closer to analytical solutions than implicit scheme (finite difference method).

Keywords : Heat Transfer, Partial Differential Equations, Finite Difference Method, Crank – Nicholson's Method.

STUDI PERBANDINGAN PERPINDAHAN PANAS PADA LOGAM SILINDER BERJENIS ALUMINIUM MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DAN CRANK – NICHOLSON

Oleh

APREDI SETIAWAN

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **STUDI PERBANDINGAN PERPINDAHAN PANAS PADA LOGAM SILINDER BERJENIS ALUMINIUM MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DAN CRANK - NICHOLSON**

Nama Mahasiswa : *Apredi Setiawan*

Nomor Pokok Mahasiswa: 1317031008

Program Studi : Matematika

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing,

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.	**Amanto, S.Si., M.Si.**
NIP. 19610128 198811 2 001	NIP. 19730314 200012 1 002

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika,

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

Sekretaris : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing: **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **16 Juli 2018**

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Studi Perbandingan Perpindahan Panas Pada Logam Silinder Berjenis Aluminium Menggunakan Metode Beda Hingga Dan Crank - Nicholson"** merupakan hasil karya sendiri dan bukan merupakan karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 Juli 2018

Penulis

METERAI TEMPEL

15DCAFF071520163

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Apredi Setiawan

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Seputih Mataram, pada tanggal 29 April 1995, anak ketiga dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak M. Rosid dan Ibu Sukasih.

Penulis mengawali pendidikan formal pada tahun 1999 di TK Gula Putih Mataram. Pada tahun 2001 penulis melanjutkan pendidikannya di SD Swasta 2 Gula Putih Mataram, diselesaikan tahun 2007. Selanjutnya penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 2 Seputih Mataram hingga tahun 2010, kemudian penulis melanjutkan pendidikannya di SMA Negeri 1 Seputih Mataram, diselesaikan pada tahun 2013. Pada tahun yang sama, penulis diterima dan terdaftar sebagai mahasiswa reguler Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Universitas Lampung.

Pada tahun 2016, penulis melakukan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Pengairan dan Pemukiman Provinsi Lampung dan pada tahun 2017 Kuliah Kerja Nyata di Desa Cimarias Kecamatan Bangun Rejo Lampung Tengah.

MOTTO

“Hargailah orang lain jika kamu ingin di hargai oleh orang lain”

(Anonim)

“Usaha tidak akan membohongi hasil”

(Anonim)

“Hidup bagaikan air yang mengalir”

(Apredi Setiawan)

PERSEMBAHAN

Dengan segala rasa syukur kehadirat Allah SWT atas segala nikmat dalam hidupku dan dengan segala kerendahan hati, kupesembahkan karya kecilku untuk orang - orang yang telah memberi makna dalam hidupku.

Teruntuk Bapak dan Ibu tercinta. Hanya rasa kasih sayang, tetes keringatmu, serta doa-doamu selalu menyertai setiap langkahku.

Kakakku Sriyati dan seluruh keluarga yang selalu menjadi penyemangat.

Keluarga besar jurusan matematika, teman-teman kontrakan yang telah memberikan dukungan dan doa untukku.

Seluruh Dosen yang tanpa pamrih memberikan ilmu pengetahuan kepadaku.

Almamater tercinta. Universitas Lampung.

SANWACANA

Bismillahirrohmanirrohim...

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang selalu melimpahkan rahmat dan kasih sayang-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi yang berjudul " **Studi Perbandingan Perpindahan Panas Pada Logam Silinder Berjenis Aluminium Menggunakan Metode Beda Hingga Dan Crank – Nicholson "**. Penulis menyadari bahwa dengan bantuan berbagai pihak, skripsi ini dapat diselesaikan. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik
4. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. Pembimbing I yang telah memotivasi dan membimbing penulis selama penulisan skripsi.
5. Bapak Amanto,S.Si. ,M.Si. selaku Pembimbing II, atas kesabarannya dalam memberikan bimbingan dan motivasi kepada penulis.
6. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Pembahas yang banyak memberikan masukan dan kritik yang bersifat positif dan membangun.

7. Bapak dan Ibu Dosen serta Staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Teman-teman ku Wahid, Young, Noval, Musa, Besti, terima kasih atas segala motivasi yang kalian berikan.
9. Teman - teman Kontrakan (Ayub, Chandro, Novian, Julian, Artha, Nando, Rio, Pandu, Ajiz) dan yang lain.
10. Teman-temanku Jurusan Matematika angkatan 2013 yang banyak memberikan semangat dan motivasi.
11. Rahmad dan Adik - adik Jurusan Matematika yang banyak memberikan motivasi dan bantuan dalam Perkuliahan.
12. Teman - teman seperjuangan KKN Desa Cimarias Kecamatan Bangun Rejo Kabupaten Lampung Tengah : Iqbal, Amel, Deni, Icha, Nabila, dan Trias terimakasih atas semangat, canda, tawa dan doa yang tidak akan terlupakan selama menjalani Kuliah Kerja Nyata.
13. Kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berdoa, semoga semua amal dan bantuan, mendapat pahala serta balasan dari Allah SWT dan semoga skripsi ini bermanfaat bagi dunia pendidikan Amin.

Bandar Lampung, 29 Juli 2018

Apredi Setiawan

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Ilmu matematika merupakan salah satu ilmu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan matematika atau persoalan lain yang bukan merupakan masalah persoalan matematika. Dimana matematika (berasal dari bahasa Yunani: *μαθηματικά - mathēmatiká*) adalah studi besaran, struktur, ruang, dan perubahan. Berbagai pola ilmu matematika mempelajari dan membangun kebenaran melalui metode deduksi yang kaku dari aksioma-aksioma dan definisi-definisi yang bersesuaian. Matematika digunakan di seluruh dunia sebagai media penting diberbagai bidang keilmuan lainnya. Cabang dalam matematika di dunia ini sangatlah banyak, diantaranya adalah matematika murni, matematika terapan, matematika industri.

Matematika terapan merupakan cabang ilmu matematika yang melingkupi penerapan pengetahuan matematika ke bidang-bidang lain, mengilhami dan membuat penggunaan temuan-temuan matematika baru, dan terkadang pada perkembangannya dapat mengarah pada pengembangan disiplin ilmu lainnya.

Matematika terapan yang dalam hal ini persamaan diferensial baik biasa maupun parsial. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memiliki variabel terikat dan variabel bebas beserta turunannya. Yang membedakan persamaan diferensial biasa dengan persamaan diferensial parsial terletak pada peubah bebasnya. Banyak sekali pengaplikasian persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial diantaranya menghitung laju air, kecepataan angin, laju perpindahan panas, dan masih banyak contoh lainnya.

Pada skripsi ini akan dikaji proses perpindahan panas yang melewati benda padat berbentuk logam silinder berjenis aluminium pada batas – batas dan titik – titik tertentu yang diketahui temperaturnya. Pendekatan yang dipakai adalah membandingkan metode beda hingga dan Crank – Nicholson.

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah lebih ditekankan pada membandingkan skema Implisit pada metode beda hingga dan skema Crank – Nicholson untuk menentukan perpindahan panas pada logam berbentuk silinder berjenis aluminium yang batas – batas dan titik – titik tertentu yang diketahui temperaturnya.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengaplikasian teori diferensial parsial dikehidupan nyata dalam menghitung laju perpindahan panas pada logam silinder berjenis aluminium.
2. Mengetahui proses perpindahan panas dengan metode beda hingga.
3. Mengetahui proses perpindahan panas dengan metode Crank – Nicholson.
4. Membandingkan metode beda hingga dan Crank – Nicholson untuk menentukan laju perpindahan panas pada logam silinder berjenis aluminium.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Memberikan sumbangan pemikiran dalam memperluas wawasan ilmu matematis.
2. Memberikan masukan bagi para peneliti yang ingin mengkaji tentang perhitungan matematika pada laju perpindahan panas menggunakan metode beda hingga dan Crank - Nicholson.

II. TINJAUAN PUSTAKA.

2.1 Perpindahan Panas

Perpindahan panas adalah proses perpindahan energi yang terjadi karena adanya perbedaan suhu diantara benda atau material. Panas akan mengalir dari tempat yang bersuhu tinggi ke tempat yang bersuhu rendah. Perpindahan panas terjadi menurut tiga mekanisme, yaitu :

a. Konduksi

b. Radiasi

c. Konveksi

2.1.1 Konduksi

Konduksi adalah proses perpindahan panas jika panas mengalir dari tempat yang bersuhu tinggi menuju tempat yang bersuhu rendah, dengan media penghantar panas tetap. Laju perpindahan panas dapat dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut :

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

Dengan $\frac{\partial T}{\partial x}$ ialah gradien suhu (*temperature gradient*) dalam arah normal (tegak lurus) terhadap luas daerah A. Konduksivitas termal *k* ialah suatu nilai yang ditentuka dari eksperimen dengan medium yang dapat bergantung dari berbagai sifat lain seperti suhu dan tekanan.

2.1.2 Radiasi

Radiasi adalah perpindahan panas yang terjadi karena pancaran atau radiasi gelombang elektro-magnetik, tanpa memerlukann media perantara. Hukum *Stefan-Bolzmant* yang fundamental menyatakan :

$$q = \sigma A T^4$$

dengan *T* adalah suhu . Nilai σ tidak bergantung pada permukaan, medium atau suhu.

2.1.3 Konveksi

Konveksi adalah proses transport energi dengan kerja gabungan dari konduksi panas, penyimpanan energi dan gerakan mencampur. Konveksi sangat penting sebagai mekanisme perpindahan energi antara permukaan benda padat dan cairan atau gas. Jika suhu dibagian hulu adalah T_s dan suhu permukaan benda T_∞, maka perpindahan panas per satuan waktu adalah :

$$q = hA(T_S - T_\infty)$$

Hubungan ini dinamakan dengan *hukum Newton*. Persamaan ini mendefinisikan koefisien perpindahan kalor konveksi (*convective heat-transfer coefficient*) *h* yang merupakan konstanta proporsionalitas (tetapan kesebandingan) yang menghubungkan perpindahan panas per satuan waktu dan satuan luar dengan beda suhu menyeluruh. ***(***Pitts dan Sissom, 1987***).***

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang meliputi satu atau lebih turunan-turunan. Persamaan - persamaan diferensial diklasifikasikan menurut macam, orde dan derajat. Orde dari sebuah persamaan diferensial adalah orde dari turunan orde tertinggi yang terdapat dalam persamaan. Sedangkan derajat dari persamaan diferensial dirasionalkan untuk menghilangkan pangkat pecahan dari turunan-turunan (Weber, 1999).

Menurut peubah bebas, persamaan differensial dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu persamaan differensial biasa dan parsial sedangkan persamaan differensial dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya juga dibedakan menjadi dua yaitu persamaan differensial linear dan persamaan differensial non linear.

(Marwan dan Said, 2009).

2.3 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan parsial. Sebagai contoh sederhana dari persamaan differensial parsial dapat dilihat pada persamaan (2.1).

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = CU \tag{2.1}$$

Berdasarkan sifat kelinieran, persamaan diferensial parsial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu linier dan nonlinier. Suatu persamaan diferensial parsial dalam *U* disebut linier jika semua suku-suku dari *U* dan turunan-turunannya dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier dengan koefisien-koefisian yang bebas dari *U*. Dalam suatu persamaan diferensial parsial linier, koefisien-koefisiennya bisa tergantung kepada peubah-peubah bebas. Misalnya suatu persamaan diferensial parsial linier tingkat dua dengan dua peubah bebas seperti yang diberikan oleh persamaan berikut :

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{x}^2} + B\frac{\partial^2 T}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} + C\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + FT = G \tag{2.2}$$

Pada Persamaan (2.2) *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, dan *G* adalah konstanta-konstanta atau fungsi-fungsi dari variabel *x* dan *y* yang diberikan.

Berdasarkan persamaan (2.2), persamaan diferensial parsial dapat dibedakan menjadi tiga tipe yaitu:

1. Persamaan Ellips jika : $B^2 - 4AC < 0$
2. Persamaan Parabola jika : $B^2 - 4AC = 0$
3. Persamaan Hiperbola jika : $B^2 - 4AC > 0$

Persamaan elips biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas

di sekeliling daerah tinjauan. Persamaan parabola biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan hiperbola biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi ketidakkontinyuan (*discontinue*) dalam waktu (Waluya, 2006).

2.4 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan penyelesaian dengan meninjau suatu luasan yang merupakan hasil dari persamaan diferensial parsial yang mempunyai satu variabel tak bebas *C* dan dua variabel bebas X dan T. Setiap persamaan persamaan diferensial yang berlaku pada luasan tersebut menyatakan keadaan suatu titik atau pias yang cukup kecil di luasan tersebut. (Wignoyosukarto, 1986)

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan persamaan diferensial parsial. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, metode beda hingga memanfaatkan deret Taylor dengan cara mengaproksimasi atau melalui pendekatan turunan-turunan persamaan diferensial parsial menjadi sistem persamaan linier. Untuk dapat menggunakan metode beda hingga dibutuhkan deret Taylor. Deret Taylor fungsi satu variabel disekitar x diberikan sebagai berikut :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}\, h^2 + \ \dots$$

atau

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}\, h^2 + \ \dots \tag{2.3}$$

Deret Taylor inilah yang merupakan dasar pemikiran metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik. Dari deret Taylor ini dikenal tiga pendekatan beda hingga, yaitu :

1. Pendekatan beda maju

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Pendekatan beda mundur

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

3. Pendekatan beda pusat

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\mathrm{h}}$$

2.5 Skema Beda Hingga

Untuk mempelajari skema beda hingga, misal diberikan persamaaan parabola yaitu persamaan perambatan panas satu dimensi, sebagai berikut :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad (2.4)$$

Dengan syarat awal :

$$T(x,0) = a_0(x), \qquad 0 < x < L,$$

dan syarat batas:

$$T(0,t) = b_0(t), \qquad t < 0$$

$$T(L,t) = b_L(t), \qquad t < 0$$

(Yang, 2005).

Untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas dengan skema beda hingga akan dihitung nilai pendekatan *T* (temperatur) pada jaringan titik (x_i, t_l) dengan domain komputasi didiskritkan menggunakan grid yang seragam baik pada arah x maupun arah t sebagai berikut:

$$t_l = l\Delta t \qquad , l \geq 0$$

$$x_i = i\Delta x \qquad , i = 0,1,2,3, \dots, n$$

dimana n adalah banyaknya *grid*.

2.5.1 Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $l+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu l yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema diferesial maju untuk turunan pertama terhadap t, serta diferensial terpusat untuk turunan kedua terhadap x, fungsu variabel (temperatur) $T(x,t)$ didekati oleh bentuk berikut :

$$T(x_i, t_l) \approx T_i^l \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial T(x_i,t_l)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \tag{2.6}$$

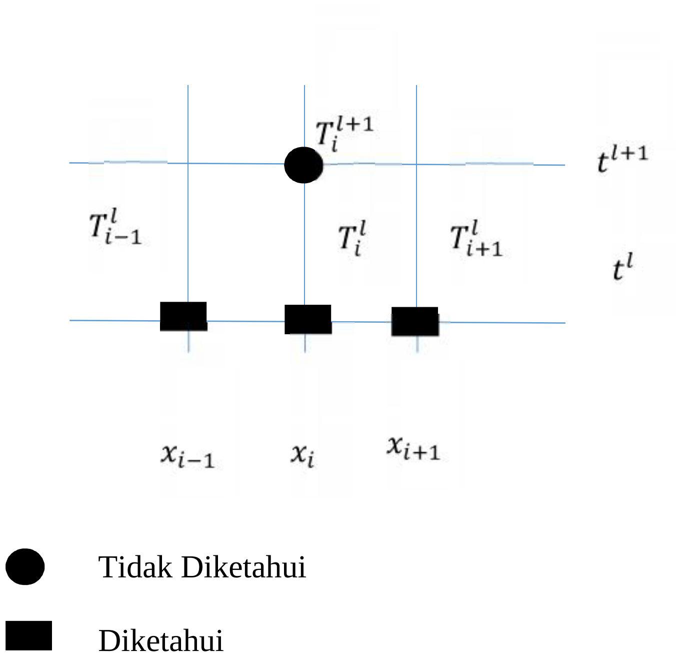
$$\frac{\partial^2 T(x_i,t_l)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2} \tag{2.7}$$

Dengan menggunakan skema diatas dan mengganggap bahwa K konstan maka persamaan (2.4) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \approx K\left(\frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{\Delta x^2}\right) \tag{2.8}$$

Atau

$$T_i^{l+1} \approx T_i^l + K\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l)$$

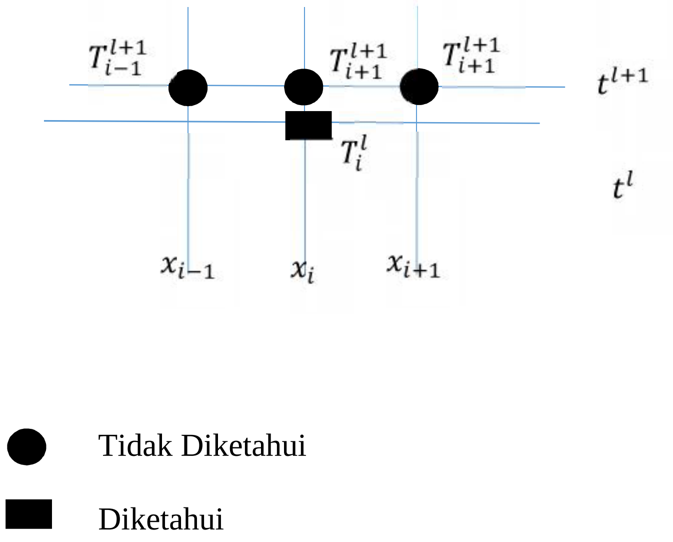


Gambar 2.1 Skema eksplisit pada Persamaan Perambatan Panas

Dari Gambar (2.1) jarak antara titik hitungan (*grid point*) adalah $\Delta x = L/n$, dengan n adalah jumlah *grid*, sedangkan interval waktu hitungan adalah Δt. Nilai T_i^{l+1} dapat diperoleh secara eksplisit dari nilai sebelumnya, yaitu $T_{i-1}^{lo}, T_i^l, T_{i+1}^l$. Dengan nilai l yang sudah diketahui, memungkinkan untuk menghitung $T_i^{l+1}(i = 1,2,\ldots,n-1)$.

2.5.2 Skema Implisit

Pada skema eksplisit, ruas kanan ditulis pada waktu l yang sudah diketahui nilainya, akan tetapi pada skema implisit ruas kanan ditulis pada waktu $l + 1$ yang tidak diketahui nilainya. Gambar (2.2) merupakan jaringan titik hitung pada skema implisit dimana turunannya didekati sebuah waktu pada saat $l + 1$.



Gambar 2.2 Skema implisit pada Persamaan Perambatan Panas

Dari Gambar (2.2), fungsi $T(x,t)$ dan turunannya didekati oleh bentuk berikut :

$$T(x_i, t_l) \approx T_i^l$$

$$\frac{\partial T(x_i,t_l)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 T(x_i,t_l)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} \tag{2.10}$$

Sehingga persamaan (2.8) dapat ditulis dalam bentuk beda hingga menjadi :

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \approx K\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{1}{\Delta t} T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i-1}^{l+1} + \frac{2K}{\Delta x^2} T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i+1}^{l+1}$$

$$\approx \frac{1}{\Delta t} T_i^l - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i-1}^{l+1} + (\frac{1}{\Delta t} + \frac{2K}{\Delta x^2}) T_i^{l+1} - \frac{K}{\Delta x^2} T_{i+1}^{l+1} \approx \frac{1}{\Delta t} T_i^l$$

Dengan memberikan nilai $i = 1,2, \dots, n-1$, diperoleh persamaan linier $n-1$ yang dapat diselesaikan dengan metode matrik. Penyelesaian dengan menggunakan skema implisit adalah stabil tanpa syarat, langkah waktu Δt dapat diambil sembarang (besar) tanpa menimbulkan ketidakstabilan. Pembatasan Δt hanya untuk menjaga kesalahan pemotongan (*truncation error*) dalam batas-batas yang dapat diterima.

2.6 Skema Crank-Nicholson

Skema Crank-Nicholson merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan skema implisit. Pada skema eksplisit, pendekatan solusi $c(x_i, t_{l+1})$ dihitung menggunakan jaringan titik (x_i, t_l). Sedangkan pada skema implisit pendekatan solusi $c(x_i, t_l)$ dihitung menggunakan jaringan titik (x_i, t_{l+1}), pada skema Crank-Nicholson pendekatan solusi $c(x_i, t_{l+1})$ akan dihitung menggunakan jaringan titik (x_i, t_l) dan jaringan titik (x_i, t_{l+1}) yang artinya, diferensial terhadap waktu ditulis pada *l* + ½. Sehingga skema diferensial persamaan (2.4) terhadap waktu adalah :

$$\frac{\partial T(x_i, t_l)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$

Skema Crank-Nicholson menulis ruas kanan dari persamaan (2.4) pada waktu *l* + ½, yang artinya merupakan nilai rata-rata dari skema eksplisit dan implisit. Berdasarkan pada skema eksplisit pada perambatan panaas di atas, skema diferensial kedua terhadap x yang digunakan adalah persamaan (2.7), sedangkan untuk skema implisit yang digunakan adalah persamaan (2.8). Sehingga skema Crank-Nicholson untuk diferensial kedua terhadap x adalah :

$$\frac{\partial^2 T(x_i,t_l)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{l} - 2T_i^{l} + T_{i-1}^{l}}{\Delta x^2}\right) \tag{2.11}$$

Dengan menggunakan skema Crank-Nicholson, Persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \approx \frac{1}{2}K\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{l} - 2T_i^{l} + T_{i-1}^{l}}{\Delta x^2}\right) \tag{2.12}$$

(Yang, 2005).

2.7 Solusi persamaan

Dari persamaan skema eksplisit, skema implisit, dan skema Crank-Nicholson maka dapat diambil kesimpulan bahwa untuk persamaan :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\Delta x^2}, \qquad 0 < x < L,$$

Dalam skema beda hingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{\Delta x^2}\right) + (1-\alpha) + \left(\frac{T_{i+1}^{l} - 2T_i^{l} + T_{i-1}^{l}}{\Delta x^2}\right) \tag{4.13}$$

Dengan α adalah koefisien pembobot dengan nilai :

$\alpha = 0$, jika skema adalah Eksplisit

$\alpha = 1$, jika skema adalah Implisit

$\alpha = \frac{1}{2}$, jika skema adalah Crank-Nicholson

Bentuk persamaan (4.13) adalah stabil tanpa syarat untuk $\alpha \geq 1/2$, dan stabil dengan syarat untuk $\alpha < 1/2$. (Triatmodjo, 2002).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2017/ 2018 dengan melakukan penelitian secara studi pustaka.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara studi pustaka yaitu mempelajari buku-buku teks yang terdapat di perpustakaan jurusan matematika atau perpustakaan Universitas Lampung dan juga jurnal yang menunjang proses penelitian.

Langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Menentukan persamaan yang akan digunakan besrta kondisi awal dan batasnya.
2. Menentukan Δx dan Δt yang digunakan.
3. Merubah persamaan ke dalam skema beda hingga (skema implisit, dan skema Crank-Nicholson).
4. Mensubtitusikan nilai-nilai yang ditentukan ke dalam (skema implisit dan skema Crank-Nicholson).
5. Menentukan kesimpulan.

V. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan yang diperoleh adalah sebagai berikut :

1. Skema Crank-Nicholson lebih akurat atau lebih mendekati solusi analitik dibandingkan skema Implisit (metode beda hingga).
2. Skema Implisit lebih mudah dari pada skema Crank-Nicholson, karena matriks **S** pada skema implisit (metode beda hingga) dapat diperoleh secara langsung .

DAFTAR PUSTAKA

Donald R. Pitts and Leighton E. Sissom. 1987. *Teori dan Soal-Soal Perpindahan Kalor*. Erlangga, Jakarta.

Marwan dan Munzir, Said. 2009. *Persamaan diferensial*. Edisi Ke-1. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.

Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Differensial*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Weber, J.E. 1999. *Analisis Matematika Penerapan Bisnis dan Ekonomi.* Edisi ke-4 Jilid 2. Diterjemahkan oleh Drs. Stephen Kakicina, MBA. Erlangga, Jakarta.

Wignyosukarto, Budi. 1986. *Hidraulika Numerik*. Yogyakarta : PAU – UGM.

Yang, W. Y. 2005. *Aplied Numerical Methode Using Matlab.* USA : Wiley Interscience.