PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK SEPULUH VARIABEL MENGGUNAKAN APLIKASI MATLAB

(Skripsi)

Oleh

NUR WAHID

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK SEPULUH VARIABEL MENGGUNAKAN APLIKASI MATLAB

Oleh

NUR WAHID

Penelitian tentang penyelesaian persamaan diferensial eksak dengan 2 sampai 5 variabel telah dilakukan sebelumnya secara manual dan memakan waktu lama dalam pengerjaannya.

Penelitian ini akan membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial eksak 10 variabel, bentuk umum :

$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_1 + f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_2 +$
$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_3 + f_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_4 +$
$f_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_5 + f_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_6 +$
$f_7(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_7 + f_8(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_8 +$
$f_9(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_9 + f_{10}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_{10} = 0$

Faktor integrasi akan ditentukan untuk persamaan diferensial tidak eksak. Metode penyelesaian secara otomatis akan dibuat dengan menggunakan aplikasi matlab.

Penyelesaian persamaan diferensial eksak 10 variabel secara otomatis dengan aplikasi matlab tidak memakan banyak waktu daripada dikerjakan secara manual.

Kata Kunci : Persamaan diferensial eksak, faktor integrasi, aplikasi matlab

ABSTRACT

SOLUTION OF EXACT DIFFERENTIAL EQUATION WITH TEN VARIABLES USING MATLAB APPLICATION

By

NUR WAHID

Research on solution of exact differential equations with 2 to 5 variables has been done manually before and take a long time to do it.

This research will discuss about solution of exact differential equation with 10 variables, general form :

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_1 + f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_2 +$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_3 + f_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_4 +$$
$$f_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_5 + f_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_6 +$$
$$f_7(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_7 + f_8(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_8 +$$
$$f_9(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_9 + f_{10}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_{10} = 0$$

The integration factor will be determined for non-exact differential equation. Automatic solution method will be created using matlab application.

Solving automatically an exact differential equation of 10 variables with matlab application does not take much time than it does manually.

Keywords **:** exact differential equation, integration factor, matlab application

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK SEPULUH VARIABEL MENGGUNAKAN APLIKASI MATLAB

Oleh
NUR WAHID

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK SEPULUH VARIABEL MENGGUNAKAN APLIKASI MATLAB**

Nama Mahasiswa : *Nur Wahid*

NPM : 1317031059

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dorra Z	
Dra. Dorrah Aziz, M.Si.	**Subian Saidi, S.Si., M.Si.**
NIP. 19610128 198811 2 001	NIP. 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 1995121 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **18 Juli 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Nur Wahid**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1317031059**
Judul	: **PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK SEPULUH VARIABEL MENGGUNAKAN APLIKASI MATLAB**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 28 Juli 2018

Penulis,

NUR WAHID

NPM. 1317031059

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Nur Wahid, anak pertama dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Rumbia pada tanggal 23 April 1995 oleh pasangan Bapak Sutikno dan Ibu Suparti.

Penulis menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Abadi Perkasa Lampung Tengah pada tahun 1999 - 2001, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Abadi Perkasa Lampung Tengah pada tahun 2001-2007, kemudian bersekolah di SMP Abadi Perkasa Lampung Tengah pada tahun 2007-2010, dan bersekolah di SMA Sugar Group Lampung Tengah pada tahun 2010-2013.

Pada tahun 2013, penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN.

Pada tahun 2016 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Dinas Pengairan dan Pemukiman Bandar Lampung. Lalu, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Bina Karya Jaya Kecamatan Putra Rumbia, Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung pada tahun 2017.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT kupersembahkan karya kecil dan sederhana ini untuk :

Ayah dan Ibu tercinta yang selalu mendoakan, memberi semangat, dan telah menjadi motivasi terbesar selama ini.

Adik - adik tercinta Wildan Bagus Prasetyo dan Doni Iswanto yang selalu berbagi canda, tawa serta menjadi penyemangat penulis agar bisa menjadi seseorang yang bisa dibanggakan.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi kepada penulis.

Sahabat-sahabat tersayang. Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan.

Almamater Universitas Lampung

KATA INSPIRASI

"Pergunakan hidupmu sebelum tiba matimu."

"Tidak ada jaminan kesuksesan, namun tidak mencobanya adalah jaminan kegagalan."

SANWACANA

Dengan mengucapkan *Alhamdulillah* penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK SEPULUH VARIABEL MENGGUNAKAN APLIKASI MATLAB”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih banyak kepada :

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan dan kesedian waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II dan Pembimbing Akademik, terima kasih untuk masukannya selama penyusunan skripsi serta bimbingannya dalam menjalani perkuliahan.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
8. Adik – adik tercinta, Wildan Bagus Prasetyo dan Doni Iswanto yang selalu berbagi canda dan tawa serta selalu menyemangati hingga terselesaikannya skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat seperjuangan Apredi, Artha, Hadi, Musa, Nando, Naufal, Novian, Onal, Rio, Young, Matematika 2013 yang banyak membantu dan sabar menghadapi penulis, serta Ayub, Fadjar, Julian, Zulfi yang selalu memberikan dukungan dan juga semangat hingga terselesaikannya skripsi ini.
10. Almamater tercinta Universitas Lampung.
11. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 28 Juli 2018
Penulis,

Nur Wahid

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang terus berkembang hingga saat ini. Matematika adalah pola berpikir untuk mengorganisasikan suatu pembuktian yang logis. Oleh karena itu, matematika memiliki peran penting dalam memecahkan masalah pada kehidupan sehari-hari. Matematika juga berkaitan dengan disiplin ilmu lainnya seperti biologi, ekonomi, pertanian dan lain-lain. Lalu, matematika juga memiliki banyak cabang pembagian ilmu matematika salah satunya adalah persamaan diferensial.

Suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari turunannya. Jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu peubah independen disebut persamaan diferensial biasa. Jika fungsi yang dicari dari dua atau lebih peubah independen disebut persamaan diferensial parsial (Bronson dan Costa, 2007).

Berdasarkan orde (tingkat)-nya, terdapat persamaan diferensial orde satu, persamaan diferensial orde dua, persamaan diferensial orde tiga, sampai dengan persamaan diferensial orde-n (orde tinggi). Persamaan diferensial orde satu sendiri terbagi dalam beberapa bentuk persamaan, salah satunya yaitu persamaan diferensial eksak. Penyelesaian persamaan diferensial eksak dua variabel dan tiga variabel telah dibahas dalam buku dan jurnal-jurnal matematika. Lalu, penelitian sebelumnya juga telah membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial eksak empat variabel dan lima variabel. Penelitian-penelitian tentang penyelesaian persamaan diferensial eksak sebelumnya masih dilakukan secara manual dan cukup memakan waktu dalam pengerjaannya. Maka, penulis ingin membuat sebuah metode penyelesaian yang otomatis nantinya menggunakan aplikasi berbasis matematika seperti matlab.

Dalam penelitian ini, penulis akan membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial eksak orde satu pada sepuluh variabel serta penentuan faktor integrasi suatu persamaan diferensial yang tidak eksak menjadi eksak secara otomatis.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dibuat rumusan masalah yaitu bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial eksak orde satu dengan sepuluh variabel secara otomatis.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu :

1. Menyelesaikan persamaan diferensial eksak sepuluh variabel
2. Menentukan faktor integrasi dari suatu bentuk persamaan diferensial sepuluh variabel yang tidak eksak menjadi eksak.
3. Membuat metode penyelesaian persamaan diferensial eksak sepuluh variabel secara otomatis dengan aplikasi matlab.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu :

1. Memahami langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial eksak dengan sepuluh variabel.
2. Menyajikan teknik mencari faktor integrasi dari suatu bentuk persamaan diferensial yang tidak eksak menjadi eksak.
3. Mempercepat penyelesaian persamaan diferensial eksak dengan metode penyelesaian secara otomatis.
4. Memahami penggunaan aplikasi matlab.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi dan Limit

2.1.1 Fungsi

Sebuah fungsi *f* adalah suatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan setiap obyek *x* dalam suatu himpunan (daerah asal), dengan sebuah nilai tunggal *f(x)* dari suatu himpunan kedua (daerah hasil fungsi).

Untuk memberi nama fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti *f* (atau *g* atau F). Maka *f(x)*, yang dibaca "*f* dari *x*" atau "*f* pada *x*", menunjukkan nilai yang diberikan oleh *f* terhadap *x*.

Bilamana aturan untuk suatu fungsi diberikan oleh sebuah persamaan dengan bentuk *y = f(x)*, *x* disebut variabel bebas dan *y* variabel tak bebas. Sebarang nilai dari daerah asal boleh dipilih sebagai nilai dari variabel bebas *x*, tetapi pilihan itu secara tuntas menentukan nilai padanan dari variabel tak bebas *y*. Jadi, nilai *y* bergantung pada pilihan *x* (Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

2.1.2 Limit

Dikatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana *x* dekat tetapi berlainan dari *c*, maka *f(x)* dekat ke *L* (Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

2.2 Turunan

2.2.1 Definisi Turunan

Turunan sebuah fungsi *f* adalah fungsi lain *f'* (dibaca " *f* aksen ") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau –∞. Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa *f* terdiferensiasikan di *c*. Pencarian turunan disebut diferensiasi (Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

2.2.2 Aturan Pencarian Turunan

$\boldsymbol{D_x}$ adalah operator linier. Operator D_x berfungsi sangat baik bilamana diterapkan pada kelipatan konstanta fungsi atau pada jumlah fungsi.

Teorema A Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta, maka untuk sebarang x, $f'(x) = 0$; yakni

$$D_x(k) = 0$$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Teorema B Aturan Fungsi Identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$; yakni

$$D_x(x) = 1$$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Teorema C Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$; yakni

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(nx^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}]}{h}$$

Di dalam kurung, semua suku kecuali yang pertama mempunyai h sebagai faktor, sehingga masing-masing suku ini mempunyai llimit nol bila h mendekati nol. Jadi $f'(x) = \mathrm{nx}^{\mathrm{n-1}}$.

Teorema D Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(kf)'(x) = k.f'(x)$; yakni

$$D_x[k.f(x)] = k.D_xf(x)$$

Jika dinyatakan dalam kata-kata, suatu pengali konstanta k dapat dikeluarkan dari operator D_x.

Bukti Andaikan $F(x) = k.f(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k.f(x+h) - k.f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} k \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k. \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k.f'(x)$$

Teorema E Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; yakni

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

Jika dinyatakan dalam kata-kata, turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan.

Bukti Andaikan $F(x) = f(x) + g(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Teorema F Aturan Selisih

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; yakni

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

Notasi Leibniz = dx atau ∂x**.** Simbol d adalah turunan dari fungsi secara total terhadap semua variabel yang ada. Simbol ∂ digunakan apabila fungsinya mengandung lebih dari 1 variabel (untuk menandai variabel yang akan diturunkan & menjadikan variabel lainnya sebagai konstanta biasa).

Notasi Lagrange = $f'(x)$ dan **Notasi Euler** = D_x .

Andaikan $y = f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensiasi dari variabel bebas x. ∂x disebut diferensial variabel bebas x dan ∂y disebut diferensial variabel tak bebas y (Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

2.3 Integral

2.3.1 Definisi Integral

F suatu antiturunan *f* pada selang *l* jika $D_xF(x) = f(x)$ pada *l* – yakni, Jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua *x* dalam *l*.(Jika *x* suatu titik ujung *l*, $F'(x)$ hanya perlu turunan sepihak).

Definisi Integral Tentu

Anggaplah *f* suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup [*a*,*b*]. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\, \Delta x_i$$

ada, *f* adalah terintegrasikan pada [*a*,*b*]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tentu (atau integral Riemann) *f* dari *a* ke *b*, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\, \Delta x_i$$

Teorema A Teorema Dasar Kalkulus Pertama

Anggaplah *f* kontinu pada selang [*a*, *b*] dan anggaplah *x* sebagai sebuah titik (peubah) pada (a,b). Maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(t)dt = F(x)$$

Teorema D Kelinieran Integral Tentu

Andaikan bahwa *f* dan *g* terintegrasikan pada [*a,b*] dan bahwa *k* konstanta. Maka

$(i)\ \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

$(ii)\ \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$(iii)\ \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

Teorema Dasar Kalkulus Kedua

Anggaplah f kontinu (dan terintegrasikan) pada selang $[a, b]$ dan anggaplah F sebarang antiturunan f pada $[a, b]$. Jadi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

2.3.2 Perhitungan Integral Tentu

Teorema B Aturan Substitusi untuk Integral Tentu

Andaikan g mempunyai turunan kontinu pada $[a, b]$, dan andaikan f kontinu pada daerah hasil dari g. Maka : $\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$ (Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

2.4 Fungsi Transenden

2.4.1 Definisi Fungsi Logaritma Asli

Fungsi Logaritma Asli, dinyatakan oleh ln, didefinisikan sebagai

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}, x > 0$$

Daerah asalnya adalah himpunan bilangan real positif.

Turunan Fungsi Logaritma Asli : $D_x \int_1^x \frac{1}{t} dt = D_x \ln x = \frac{1}{x}; x > 0$

Teorema A

Jika a dan b bilangan-bilangan positif dan r sebarang bilangan rasional, maka

(i) $\ln 1 = 0$ (ii) $\ln ab = \ln a + \ln b$

(iii) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ (iv) $\ln a^r = r \ln a$

(Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

2.4.2 Definisi Fungsi Eksponen Asli

Balikan ln disebut fungsi eksponen asli dan dinyatakan oleh exp. Jadi

$$x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x$$

Menyusul segera dari definisi ini bahwa :

(i) $\exp(\ln x) = x,$ $x > 0$

(ii) $\ln(\exp y) = y,$ untuk semua y

Teorema A Sifat-Sifat Eksponen

Jika $a > 0$, $b > 0$ serta x dan y adalah bilangan-bilangan real, maka :

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$ (ii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ (iv) $(ab)^x = a^x b^x$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

(Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

2.5 Persamaan Diferensial

2.5.1 Definisi Persamaan Diferensial

Sebarang persamaan dengan yang tidak diketahui berupa suatu fungsi dan yang melibatkan turunan (atau diferensial) dari fungsi yang tidak diketahui (Purcell, Varberg dan Rigdon, 2003).

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tak diketahui (Finizio dan Ladas, 1988).

Suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari turunannya. Jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu variabel independen disebut persamaan diferensial biasa. Jika fungsi yang dicari dari dua atau lebih variabel independen disebut persamaan diferensial parsial (Bronson dan Costa, 2007).

2.5.2 Orde dan Derajat Pada Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial orde n adalah persamaan bentuk $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ yang menyatakan hubungan antara variabel bebas x, variabel tak bebas $y(x)$ dan turunannya yaitu $y, y', \dots, y^{(n)}$.

Jadi, suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde (tingkat) n jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke n. Dan suatu persamaan diferensial disebut mempunyai *degree* (derajat) k jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajat k (Kartono, 1994).

2.5.3 Persamaan Diferensial Orde Pertama

Bentuk standar dari persamaan diferensial orde pertama dalam fungsi $y(x)$ yang dicari adalah $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (2.1)

Dimana turunan y' muncul hanya di sisi kiri dari (2.1). Walaupun tidak semua persamaan diferensial orde pertama dapat dituliskan dalam bentuk standar melalui penyelesaian $\frac{dy}{dx}$ secara aljabar dan menetapkan $f(x, y)$ sama dengan sisi kanan dari persamaan yang dihasilkan.

Sisi kanan dari (2.1) dapat selalu dituliskan sebagai pembagian dua fungsi lainnya $M(x, y)$ dan $-N(x, y)$. Dengan demikian (2.1) menjadi $dy/dx = M(x,y)/-N(x,y)$ yang ekuivalen dengan bentuk diferensial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (Bronson dan Costa, 2007).

2.5.4 Persamaan Diferensial Eksak

- **Persamaan Diferensial Eksak Orde Satu dengan Dua Variabel**

Suatu persamaan diferensial orde pertama yang berbentuk

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.2}$$

dikatakan eksak jika ruas kiri dari persamaan (2.2) merupakan diferensial total atau diferensial eksak

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{2.3}$$

dari suatu fungsi *u(x,y)*. Syarat perlu dan cukup agar $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ merupakan suatu diferensial total adalah

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.4}$$

Oleh karena itu, persamaan diferensial (2.2) dapat dituliskan $du = 0$.

Dengan pengintegralan langsung maka akan diperoleh solusi umum persamaan diferensial dalam bentuk

$$U(x,y) = C \tag{2.5}$$

Solusi persamaan diferensial (2.2) sama dengan menemukan fungsi $u(x,y) = C$ tersebut. Dari persamaan (2.2), (2.3) dan (2.4) maka diperoleh,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \tag{2.6}$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \tag{2.7}$$

Kemudian $M(x, y)$ diintegralkan terhadap x dengan memandang y tetap,

$$u(x, y) = \int_x M(x, y)\, dx + \phi(y) \tag{2.8}$$

dimana $\phi(y)$ adalah fungsi sembarang dari y saja.

Fungsi *u(x,y)* dalam persamaan (2.8) kemudian diturunkan parsial terhadap y,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_x M(x,y)\,dx\right] + \frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y) \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_x M(x,y)\,dx\right] \qquad (2.10)$$

Dengan pengintegralan persamaan (2.10) maka $\phi(y)$ akhirnya diperoleh, dan substitusikan ke $u(x,y)$. Jadi, $u(x,y) = C$ telah ditemukan (Ayres, 1999).

- **Faktor Integrasi Persamaan Diferensial Tidak Eksak Dua Variabel**

Jika persamaan diferensial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ bukan eksak pada domain D, tetapi persamaan diferensial :

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \qquad (2.11)$$

Adalah eksak domain D, maka $\mu(x, y)$ merupakan faktor integrasi dari persamaan diferensial (2.11) (Ross, 1984).

- **Persamaan Diferensial Eksak Orde Satu dengan Tiga Variabel**

Persamaan diferensial orde satu dengan tiga variabel yang berbentuk :

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

Disebut eksak apabila terdapat fungsi $f(x, y, z)$, sehingga

$$df(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

Dengan berlaku hubungan :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

(Sugiarto dan Mario, 2002).

Teorema

Persamaan diferensial $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$ merupakan persamaan diferensial eksak tiga variabel.

Misalkan terdapat fungsi-fungsi : Q_1, Q_2, R_1, R_2 sebagai berikut :

• $Q = Q_1 + Q_2$ dengan $\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$

• $R = R_1 + R_2$ dengan $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial R_2}{\partial y} = 0$

• $Q_1(x_0, y, z) = 0$

$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_2}{\partial z} dy = R_1(x_0, y, z)$

Maka penyelesaian umum persamaan diferensial :

$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$ adalah

$F(x, y, z) = C$ dengan $F = \int_{x_0}^{x} Pdx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz$ (2.6)

Bukti :

Untuk menunjukkan $F(x, y, z) = C$ dengan $F = \int_{x_0}^{x} Pdx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz$

merupakan solusi PD di atas, cukup ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \frac{\partial F}{\partial z} = R$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial x} = P$

  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} Pdx + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{z} R_2 dz$

Karena $\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$, maka $\frac{\partial F}{\partial x} = P + 0 + 0 = P$

$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = P$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$

  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} Pdx + \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{z} R_2 dz$

  $= \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} Qdx + Q_2 + 0 = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial x}\right)dx + Q_2$

  $= \int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q_1}{\partial x}dx + Q_2 = Q_1(x, y, z) - Q_1(x_0, y, z) + Q_2$

  $= Q_1 + Q_2 = Q \qquad \rightarrow \qquad \therefore \frac{\partial F}{\partial y} = Q$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial z} = R$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_{x_0}^{x} P dx + \frac{\partial}{\partial z}\int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_{z_0}^{z} R_2 dz$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R}{\partial x} dx + R_1(x_0, y, z) + R_2$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial x}\right) dx + R_1(x_0, y, z) + R_2$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R_1}{\partial x} dx + R_1(x_0, y, z) + R_2$$

$$= R_1(x, y, z) - R_1(x_0, y, z) + R_1(x_0, y, z) + R_2$$

$$= R_1(x, y, z) + R_2 = R$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial z} = R$$

Jadi, $F = \int_{x_0}^{x} P dx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz = C$ merupakan solusi umum dari persamaan diferensial eksak $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$

Catatan :

1. Dalam pemilihan x_0 dan y_0 harus diperhatikan kondisi :

   $Q_1(x_0, y, z) = 0$ dan $\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_2}{\partial z} dy = R_1(x_0, y, z)$

   Untuk mempermudah perhitungan, pilih Q_1 dan Q_2 sehingga dapat diambil x_0 dan $y_0 = 0$

2. Persamaan diferensial eksak yang diberikan dapat dipisahkan menjadi dua atau lebih, dan dikerjakan masing-masing. Penjumlahan dari solusi ini adalah solusi umum dari persamaan diferensial eksak awal.

(Sugiarto dan Mario, 2002).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2016/2017 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka seperti buku - buku penunjang matematika, internet dan jurnal-jurnal matematika yang berhubungan dengan persamaan diferensial eksak. Adapun langkah - langkah penelitian yang dilakukan yaitu :

1. Mempelajari definisi dan teorema yang menjadi landasan pada penelitian ini.
2. Mencari bentuk persamaan diferensial eksak sepuluh variabel dengan menggunakan definisi dan teorema yang ada.
3. Menentukan faktor integrasi persamaan diferensial dengan sepuluh variabel yang tidak eksak menjadi eksak.
4. Membuat skrip berdasarkan definisi dan teorema tentang persamaan diferensial eksak pada aplikasi Matlab R2013b.

5. Menyelesaikan persamaan diferensial eksak sepuluh variabel menggunakan aplikasi Matlab R2013b.
6. Menentukan faktor integrasi persamaan diferensial dengan sepuluh variabel yang tidak eksak menjadi eksak menggunakan aplikasi Matlab R2013b.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Penyelesaian umum persamaan diferensial eksak sepuluh variabel :

$$F = \int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1 + \int_{x_{2_0}}^{x_2^*}\left(f_2 - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_2}\right)dx_2 + \int_{x_{3_0}}^{x_3^*}\left(f_3 - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_3}\right)dx_3 + \int_{x_{4_0}}^{x_4^*}\left(f_4 - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_4}\right)dx_4 + \int_{x_{5_0}}^{x_5^*}\left(f_5 - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_5}\right)dx_5 + \int_{x_{6_0}}^{x_6^*}\left(f_6 - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_6}\right)dx_6 + \int_{x_{7_0}}^{x_7^*}\left(f_7 - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_7}\right)dx_7 + \int_{x_{8_0}}^{x_8^*}\left(f_8 - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_8}\right)dx_8 + \int_{x_{9_0}}^{x_9^*}\left(f_9 - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_9}\right)dx_9 + \int_{x_{10_0}}^{x_{10}^*}\left(f_{10} - \frac{\partial\left(\int_{x_{1_0}}^{x_1^*} f_1 dx_1\right)}{\partial x_{10}}\right)dx_{10}$$

2. Jika persamaan diferensial sepuluh variabel tidak eksak, maka fungsi $\mu(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})$ disebut faktor integrasinya. Sehingga : $\mu(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})$ $[\, f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_1 +$ $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_2 + f_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_3 +$

$f_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_4 + f_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_5 +$

$f_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_6 + f_7(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_7 +$

$f_8(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_8 + f_9(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_9 +$

$f_{10}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10})dx_{10}] = 0$

maka persamaan diferensial tersebut menjadi eksak.

3. Metode penyelesaian persamaan diferensial eksak sepuluh variabel secara otomatis menggunakan aplikasi matlab berhasil dibuat dengan menyesuaikan teorema yang ada.

5.2 Saran

Persamaan diferensial eksak yang sudah dibahas dapat dilanjutkan oleh pembaca yang ingin melanjutkan penelitian ini pada variabel ataupun orde yang lebih tinggi. Pembaca dapat menggunakan metode lain dalam menyelesaikan persamaan diferensial yang tidak eksak, karena penulis hanya menggunakan metode faktor integrasi dalam penelitian ini. Program penyelesaian persamaan diferensial eksak pada penelitian ini masih dapat dikembangkan sesuai variabel ataupun orde yang diinginkan. Selain itu, pembaca juga dapat mencoba aplikasi selain matlab untuk membuat program penyelesaiannya.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, F. 1999. *Teori dan soal-soal persamaan diferensial dalam satuan SI metric*. Erlangga, Jakarta.

Bronson, R. dan Costa, G. 2007. *Persamaan Diferensial.* Erlangga, Jakarta.

Finizio, N. dan Ladas, G. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Penerjemah Widiarti. ITB, Bandung.

Kartono. 2002. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Andi Offset, Yogyakarta.

Purcell, E.J., Varberg, D. dan Rigdon, S. 2003. *Kalkulus Edisi Kedelapan Jilid 1*. Erlangga, Jakarta.

Ross, S. 1966. *Introduction To Ordinary Differential Equations, Third Edition*. Blaisdell, New York.

Sugiato, I. dan Mario, M. *Solusi Persamaan Diferensial Eksak Tiga Variabel.* Jurnal Integral, Vol. 7, No. 2, Oktober 2002.

Widiarsono, T. *Tutorial Praktis Belajar Matlab*. E-book, Oktober 2005.