PEMODELAN MATEMATIKA PERTUMBUHAN PENDUDUK KOTA BANDAR LAMPUNG

(Skripsi)

Oleh

MUSA AL AS'ARI FADJAR PAMUNGKAS

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

PEMODELAN MATEMATIKA PERTUMBUHAN PENDUDUK KOTA BANDAR LAMPUNG

Oleh

MUSA AL AS'ARI FADJAR PAMUNGKAS

Penelitian ini bertujuan untuk melakukan proyeksi jumlah penduduk Kota Bandar Lampung tahun 2017 – 2030 melalui pendekatan pemodelan matematika. Model matematika yang digunakan yaitu model regresi linear sederhana, model eksponensial, model logistik dan model transisi demografis. Aproksimasi terbaik dipilih berdasarkan nilai *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) terendah dari keempat model dibandingkan dengan data sebenarnya. Dengan menggunakan data jumlah penduduk dari tahun 1995 – 2011, hasil penelitian menunjukkan bahwa model yang memiliki MAPE terkecil adalah model eksponensial. Sedangkan MAPE yang terbesar adalah model transisi demografis. Proses validasi dilakukan menggunakan data jumlah penduduk dari tahun 2012 – 2016. Hasil validasi menunjukkan bahwa model yang terbaik yang dapat digunakan untuk proyeksi jumlah penduduk adalah model eksponensial. Prediksi jumlah penduduk Kota Bandar Lampung pada sensus penduduk 2030 berdasarkan hasil model eksponensial yaitu sebesar 1.216.816 jiwa.

Kata Kunci: Proyeksi Penduduk, Model Regresi Linear Sederhana, Model Eksponensial, Model Logistik, Model Transisi Demografis, MAPE

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELING ON BANDAR LAMPUNG CITY'S POPULATION GROWTH

By

MUSA AL AS'ARI FADJAR PAMUNGKAS

This research aims to do projection on the population of Bandar Lampung City in 2017 – 2030 through a mathematical modeling approach. The mathematical model that will be used is simple linear regression model, exponential model, logistic model and demographic transition model. The best approximation is chosen based on the lowest Mean Absolute Percentage Error (MAPE) value of the four models compared to the actual data. By using population data from 1995 – 2011, the research result shows the models that have the smallest MAPE are exponential models. Than, the largest MAPE is demographic transition model. The validation process was done using population data from 2012 – 2016. The validation result showed that the best model that could be used for projecting the population was on exponential model. The Bandar Lampung City's population prediction on 2030 census based on the exponential model is 1.216.816 people.

Keywords: Population Projection, Simple Linear Regression Model, Exponential Model, Logistic Model, Demographic Transition Model, MAPE

PEMODELAN MATEMATIKA PERTUMBUHAN PENDUDUK KOTA BANDAR LAMPUNG

Oleh

MUSA AL AS'ARI FADJAR PAMUNGKAS

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA PERTUMBUHAN PENDUDUK KOTA BANDAR LAMPUNG**

Nama Mahasiswa : ***Musa Al As'ari Fadjar Pamungkas***

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031054

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.	**Subian Saidi, S.Si., M.Si.**
NIP. 197403162005011001	NIP. 198008212008121001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 196311081989022001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Sekertaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing: **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 197102121995121001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 16 Juli 2018

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Musa Al As'ari Fadjar Pamungkas**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1317031054**

Judul : **PEMODELAN MATEMATIKA PERTUMBUHAN PENDUDUK KOTA BANDAR LAMPUNG**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 26 Juli 2018
Penulis,

Musa Al As'ari Fadjar Pamungkas
NPM. 1317031054

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung, Kecamatan Labuhan Ratu, Kampung Baru, Lampung pada tanggal 21 Mei 1994, sebagai anak pertama dari dua bersaudara dari Bapak Muhamad Taufiq dan Ibu Khalimah.

Pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) Muhamadiah Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2000, Sekolah Dasar (SD) Al-Kautsar Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2006, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 8 Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2009, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri 5 Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2012.

Tahun 2013 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis Aktif dalam Organisasi kemahasiswaan tingkat jurusan yaitu Anggota Gematika 2013/2014. Kemudian penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Universitas Lampung periode 2014/2015 sebagai Anggota Bidang Eksternal dan aktif dalam organisasi Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Universitas Lampung periode 2014/2015 sebagai Anggota Deputi Lingkungan Hidup. Setelah itu penulis menjabat sebagai Ketua Bidang Eksternal HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung periode 2015/2016.

Pada tahun 2014 penulis ikut serta dalam kegiatan Karya Wisata Ilmiah (KWI) oleh BEM FMIPA Universitas Lampung di Desa Mulyo Sari, Kecamatan Tanjung Sari. Tahun 2016 penulis melakukan Kerja Praktek (KP) di Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana (BKKBN) Perwakilan Provinsi Lampung. Tahun 2017 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sidokerto, Kecamatan Bumi Ratu Nuban, Provinsi Lampung Tengah.

MOTTO

"Dengan semangat maka tidak ada kata terlambat"
(Musa Al As'ari F. P.)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, dengan rasa syukur yang tiada hentinya kepada Allah ta'ala. Penulis persembahkan karya kecil dan sederhana ini sebagai suatu tanda cinta kepada semua orang yang senantiasa mendukung, mendampingi, dan mendoakan kelancaran terciptanya karya ini.

Papah, Mamah, dan Adik yang telah memberikan banyak masukan dan pengarahan serta menjadi motivasi terbesar selama ini.

Dosen pembimbing dan penguji yang senantiasa membimbing penulis.

Dosen jurusan matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan banyak ilmu.

Rekan kerja dalam organisasi selama masa perkuliahan, yang selalu meberikan pelajaran terbaik

Dan teman-teman kontrakan. Terima kasih atas keceriaan, semangat, serta canda tawanya.

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah ta'ala yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya sehinnga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pemodelan Matematika Pertumbuhan Penduduk Kota Bandar Lampung" dengan lancar. Shalawat serta salam penulis haturkan kepada junjungan Nabi Muhammad shallallahu 'alaihi wasallam yang telah menjadi suri tauladan yang baik bagi umat manusia.

Selesainya penulisan skripsi ini adalah juga berkat motivasi dan pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Oleh Karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman., S.Si., M.Si. selaku pembimbing pertama, terimakasih atas setiap bimbingan, kesabaran dalam memberikan arahan, serta dukungan dalam proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi., S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua, terimakasih atas setiap bimbingan, kesabaran dalam memberikan arahan, serta dukungan dalam proses penyusunan skripsi ini.

3. Drs. Suharsono S., M.Sc., Ph.D. selaku penguji yang telah memberikan kritik, saran dan masukan kepada penulis.
4. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si. selaku pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen, Staff dan Karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
8. Pihak Badan Pusat Statistik kota Bandar Lampung yang telah memberikan data untuk penelitian skripsi.
9. Papah, Mamah dan Adik yang telah memberikan banyak masukan dan pengarahan serta menjadi motivator terbesar selama ini.
10. Teman-teman kontrakan: Apredi Setiawan, Artha Kurnia Alam, Candro, Erick, Hadi Ismanto, Jordian Gevara, Julian Pradana, Muhammad Fadjar, Naufal Hilmizen, Novian Saputra, Nur Wahid, Paulus, Reonaldi Febrian, Rio Rinaldo, Rizki Fathurrahman, Sanfernando Napitu, dan Young Enjang.
11. Teman-teman Matematika angkatan 2013 yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
12. Keluarga Besar HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung khususnya Bidang Eksternal dan Pimpinan periode 2015/2016.
13. Efrizal dan seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Akhir kata, Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi sedikit harapan semoga skripsi yang sederhana ini dapat berguna dan bermanfaat bagi kita semua. Amiin.

Bandar Lampung, 26 Juli 2018
Penulis

Musa Al As’ari Fadjar Pamungkas

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Permasalahan penduduk merupakan masalah yang cukup serius yang harus dihadapi oleh setiap negara, terutama bagi negara berkembang maupun negara yang dikategorikan sebagai negara tertinggal. Indonesia merupakan sebuah negara yang termasuk dalam kategori negara berkembang dan memiliki jumlah penduduk yang cukup besar. Bandar Lampung adalah sebuah kota di Indonesia sekaligus ibukota dan kota terbesar di Provinsi Lampung. Bandar Lampung juga merupakan kota terbesar dan terpadat ketiga di Pulau Sumatera setelah Medan dan Palembang menurut jumlah penduduk, serta termasuk salah satu kota besar di Indonesia dan kota terpadat di luar Pulau Jawa. Kota Bandar Lampung memiliki luas wilayah sekitar $169{,}21\ km^2$ yang terbagi kedalam 20 kecamatan dan 126 kelurahan dengan jumlah penduduk 997728 jiwa berdasarkan data tahun 2016 yang diperoleh dari BPS (Badan Pusat Statistik), sehingga kepadatan penduduk sekitar $5.896\ jiwa/km^2$. Dengan angka kepadatan penduduk Kota Bandar Lampung tersebut bukan tidak mungkin akan menyebabkan banyak sekali permasalahan seperti perekonomian, ketersediaan sumber daya alam, dan ketersediaan sarana penunjang kehiduapan.

Dengan masalah-masalah yang diungkapkan diatas, maka pemerintah, khususnya pemerintah Kota Bandar Lampung perlu bersiap-siaga, memenuhi kebutuhan warga negaranya sebagai bentuk pemerintah yang bertanggung jawab. Tentu saja besarnya usaha yang dilakukan pemerintah berdasarkan data dan informasi, salah satunya yaitu mengenai tingkat pertumbuhan beberapa tahun terakhir. Dengan mengetahui tingkat pertumbuhan penduduk Kota Bandar Lampung pada tahun-tahun ke belakang, pemerintah kota dapat melakukan antisipasi. Akan tetapi antisipasi tersebut hanya berlaku untuk beberapa tahun kedepan atau dalam jangka pendek. Akan lebih baik lagi apabila usaha maupun antisipasi dilakukan dalam jangka panjang dengan melakukan proyeksi jumlah penduduk hingga beberapa tahun kedepan, karena masalah ini bukan masalah kecil, melainkan berkaitan dengan kesejahteraan seluruh penduduk Kota Bandar Lampung.

Proyeksi penduduk Kota Bandar Lampung dapat dilakukan melalui pendekatan pemodelan matematika. Model matematika yang terbentuk digunakan untuk memperkirakan jumlah penduduk pada tahun yang akan dating berdasarkan data-data waktu sebelumnya. Diawali dengan membuat pemodelan matematika pada pertumbuhan penduduk Kota Bandar Lampung dengan mengasumsikan laju kelahiran per kapita dan laju kematian per kapita. Sedangkan dalam hal ini pengaruh perpindahan penduduk baik imigrasi maupun emigrasi diabaikan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan diatas, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah:

Berapa perkiraan jumlah penduduk kota bandar lampung beberapa tahun yang akan datang dengan menggunakan beberapa model pertumbuhan penduduk yaitu model regresi linear sederhana, eksponensial, logistik dan transisi demografis berdasarkan data jumlah penduduk tahun 1995 – 2016?

1.3 Batasan Masalah

Model pertumbuhan penduduk yang dibahas adalah model regresi linear sederhana, eksponensial, logistik dan transisi demografis.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Melakukan kajian analitik pada model regresi linear sederhana, eksponensial, logistik dan transisi demografis dengan asumsi yang berbeda-beda dari tiap-tiap model.
2. Membuat model pertumbuhan penduduk Kota Bandar Lampung tahun 1995 – 2011.
3. Menentukan keakuratan dari masing-masing model dengan perhitungan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE).

4. Melakukan validasi terhadap model-model tersebut pada tahun 2012 – 2016.
5. Memproyeksikan jumlah penduduk Kota Bandar Lampung pada tahun mendatang, yakni tahun 2017 - 2030 dengan menggunakan model yang mendekati akurat.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui proses terbentuknya pemodelan matemtika pada pertumbuhan penduduk.
2. Dapat memperkirakan jumlah penduduk pada tahun mendatang.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika

Model matematika suatu fenomena adalah suatu ekspresi matematika yang diturunkan dari fenomena tersebut. Ekspresi dapat berupa persamaan, sistem persamaan atau ekspresi-ekspresi matematika yang lain seperti fungsi maupun relasi. Model matematika digunakan untuk menjelaskan karakteristik fenomena yang dimodelkannya, dapat secara kualitatif atau kuantitatif. Dalam memperoleh, membuat, mengembangkan atau menurunkan model matematika kita melibatkan asumsi-asumsi, pendekatan-pendekatan maupun pembatasan-pembatasan yang didasarkan atas eksperimen maupun observasi terhadap fenomena sebenarnya. Asumsi, pendekatan maupun pembatasan ini digunakan untuk mempelajari fenomena tersebut secara sederhana (penyederhanaan fenomena sesungguhnya), dan juga seringkali digunakan untuk mempelajari kontribusi faktor-faktor tertentu dengan tiadanya faktor yang lain pada fenomena yang dipelajari. Keberadaan kontribusi faktor tertentu dalam model matematika seringkali dalam bentuk variabel, parameter maupun koefisien (Cahyono, 2013).

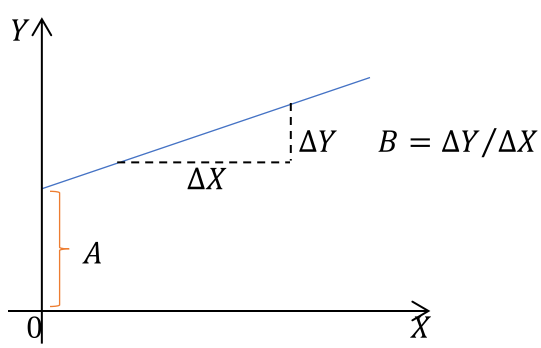
2.2 Model Regresi Linear Sederhana

Adalah tidak mungkin untuk memperkirakan hubungan antara dua variabel tanpa membuat asumsi terlebih dahulu mengenai bentuk hubungan yang dinyatakan dalam fungsi tertentu. Dalam beberapa hal, kita bisa mengecek asumsi tersebut setelah hubungan diperkirakan. Fungsi linear, selain mudah interpretasinya, juga dapat digunakan sebagai pendekatan (*approximation*) atas hubungan yang bukan linear (Supranto, 2001).

Fungsi linear, mempunyai bentuk persamaan sebagai berikut:

$$Y = A + BX$$

Dimana A dan B adalah konstanta atau parameter, yang nilainya harus diestimasi.



$A =$ jarak titik asal 0 dengan perpotongan antara sumbu tegak Y dan garis fungsi linear atau besarnya nilai Y kalau $X = 0$. Sering disebut *"intercept coefficient."*

$B =$ koefisien arah = koefisien regresi = besarnya pengaruh X terhadap Y, apabila X naik 1 unit. Sering disebut *"slope coefficient."*

Hubungan di atas merupakan hubungan matematis. Tetapi dalam prakteknya tidak demikian, sebab yang mempengaruhi Y bukan hanya X saja melainkan masih ada faktor lain yang tidak dimasukkan dalam persamaan. Faktor-faktor tersebut secara keseluruhan disebut *kesalahan pengganggu* atau *"disturbance's error."* Kesalahan pengganggu tersebutlah yang menyebabkan suatu ramalan sering tidak tepat (Supranto, 2001).

Kesalahan ramalan menyebabkan perencanaan menjadi tidak akurat, sehingga kesalahan tersebut mengakibatkan risiko, dan karenanya harus diusahakan sekecil mungkin. Dalam membuat keputusan, selalu ada risiko yang disebabkan oleh adanya kesalahan (*error*). Karena kesalahan itu tak dapat dihilangkan sama sekali, maka risiko itu betapapun kecilnya selalu ada. Risiko hanya bisa diperkecil dengan memperkecil kesalahan. Dengan memperhitungkan kesalahan pengganggu, ε, maka bentuk persamaan fungsi linear di atas menjadi sebagai berikut:

$$Y = A + BX + \varepsilon$$

Dimana: A dan B adalah konstanta yang harus di estimasi.

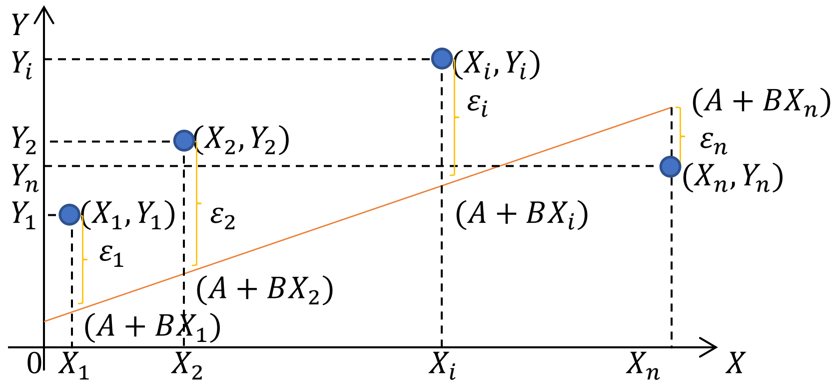
ε adalah kesalahan pengganggu (*disturbance's error*).

(Supranto, 2001).

Berdasarkan persamaan tersebut, maka nilai Y bisa lebih besar atau lebih kecil daripada $A + BX$ tergantung apakah ε positif atau negatif. Kita selalu mengharapkan agar nilai ε kecil dan tidak berkorelasi dengan X, sehingga dengan demikian kita dapat mengubah nilai X tanpa mengubah nilai ε, kemudian dapat memperhitungkan pengaruh X terhadap Y, secara rata-rata. Dalam praktek, untuk melihat hubungan antara X dan Y, kita mengumpulkan pasangan data (X, Y) sebagai suatu observasi, misalnya sebagai berikut:

$$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_n$$



$(X_i, Y_i) =$ observasi variabel X dan Y. Kesalahan pengganggu ε_i, yang bersosiasi dengan pasangan (X_i, Y_i) apabila digambarkan pada sumbu X dan Y akan kelihatan sebagai suatu *diagram pancar* (*scatter diagram*), yaitu kumpulan titik-titik koordinat (Supranto, 2001).

Apabila parameter A dan B diketahui, kita bisa menggambarkan suatu garis regresi $A + BX$. Kesalahan pengganggu ε_i akan sama dengan jarak vertikal antara nilai observasi (X_i, Y_i) dengan titik pada garis regresi $A + BX_i$. Garis regresi dimaksudkan sebagai pendekatan (*approximation*) terhadap bentuk diagram pancar (Supranto, 2001).

Jika Nilai dari parameter A dan B diketahui, kita dapat langsung menggunakan persamaan untuk memperkirakan nilai Y untuk suatu nilai X tertentu. Akan tetapi dalam prakteknya nilai A dan B tidak pernah diketahui dan harus diperkirakan dengan data sampel. Nilai perkiraan untuk A dan B masing-masing adalah a dan b. Dengan persamaan regresi perkiraan adalah

$$\hat{Y} = a + bX$$

dimana a dan b adalah nilai perkiraan untuk A dan B (Supranto, 2001).

Metode kuadrat terkecil ialah suatu metode untuk menghitung a dan b sebagai perkiraan A dan B, sedemikian rupa sehingga jumlah kesalahan kuadrat memiliki nilai terkecil. Dengan bahasa matematik, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$e_i = Y_i - \widehat{Y_i} = Y_i - a - bX_i = \text{kesalahan (error) } i, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - a - bX_i]^2 = \text{jumlah kesalahan kuadrat.}$$

Jadi, metode kuadrat terkecil adalah metode untuk menghitung a dan b sedemikian rupa sehingga $\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \text{terkecil (minimum)}$. Caranya ialah dengan membuat turunan parsial (*partial differential*) dari $\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$ mula-mula terhadap a kemudian terhadap b dan menyamakannya dengan nol.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

(Supranto, 2001).

2.3 Model Eksponensial

Pada tahun 1798, seorang professor, politikus dan ekonom bernama Thomas R. Malthus mempublikasikan pamflet anonim yang berjudul "An Essay on the Principle of Populations as It Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculation of Mr. Godwin, M. Condorect and other Writers". Pamflet ini memberikan sejumlah opini dan gagasan mengenai hubungan sosial antar manusia. Disamping itu juga terdapat beberapa pendapat Malthus mengenai pertumbuhan populasi yang umumnya akan menghasilkan keburukan atau peningkatan dalam jumlah kemiskinan (Iswanto, 2012).

"Harus diakui atau tidak dalam sejarah umat manusia, bahwa dalam setiap masa dan setiap keadaan dimana manusia berada, atau bahkan kemudian menjadi tidak ada, bahwa peningkatan populasi akan terbatas pada ketersediaan sarana dan prasarana, bahwa penurunan populasi tidak selalu diiringi oleh peningkatan sarana, dan bahwa kekuatan besar populasi yang tampak umumnya akan menjaga keseimbangannya dengan ketersediaan sarana, baik dengan kematian maupun kelahiran".

Pembentukan model kita merujuk pada ide yang telah dikemukakan oleh Malthus. Kita memberikan notasi waktu independen populasi sebagai $P(t)$. Dengan menggunakan asumsi model yaitu konstanta laju kelahiran per kapita b, dan konstanta laju kematian per kapita dengan d. Sedangkan dalam hal ini pengaruh perpindahan penduduk baik imigrasi maupun emigrasi diabaikan. Maka model persamaan diferensial yang dapat dibentuk oleh populasi P adalah

$$\frac{dP}{dt} = bP - dP$$

yang jika kita integralkan kita akan mendapatkan hasil penyelesaian

$$P(t) = P_0 e^{(b-d)(t)}$$

Dimana P_0 adalah populasi awal pada waktu awal t_0 (Iswanto, 2012).

2.4 Model Logistik

Pertumbuhan secara eksponensial sangat membutuhkan nilai $b > d$, tetapi pada beberapa prinsip populasi biologi yang lain memberikan beberapa persyaratan lain. Pierre Francois Verhulst pada 1838 merupakan orang pertama yang mengemukakan mengenai beberapa Batasan dalam model pertumbuhan sebelumnya, dari pada harus mengabaikannya. Persamaan yang diusulkan oleh Verhulst, dinamakan persamaan logistik, yang sampai dengan saat ini persamaan tersebut masih dianggap lebih mendekati realita lapangan. Persamaan ini berdasarkan bahwa kehadiran spesies pada lingkungan akan memiliki populasi maksimum. Hal ini senada yang dikemukakan oleh Malthus, tetapi Verhulst menghubungkan konsep ini pada persamaan populasi. Jika pertumbuhan maksimum populasi K, maka Verhulst berpendapat bahwa laju pertumbuhan per kapita bersih (laju kelahiran dikurangi laju kematian) harus menurun sepanjang P mendekati K. Fungsi yang paling mudah untuk menggambarkan persamaan tersebut adalah $r\left(1 - \frac{P}{K}\right)$, dimana r merupakan konstanta positif. Dengan menggunakan asumsi ini maka untuk laju pertumbuhan bersih per kapita, kita akan mendapatkan persamaan logistik sebagai berikut

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Persamaan ini dapat diverifikasi dari penyelesaian yang mudah diperoleh dari pemisahan variabel.

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

(Iswanto, 2012).

2.5 Model Transisi Demografis

Secara historis, Botero pada tahun 1588 adalah salah satu pelopor terdahulu untuk menunjukkan daya dukung sebagai penahan laju pertumbuhan populasi. Malthus menguraikan ide-ide ini dan mengedepankan analisis matematis yang Malthus ungkapkan pada prinsip-prinsip populasi. Prinsip Populasi Malthus memberikan konteks alami untuk memperkenalkan analisis dinamis. Selain itu, konteksnya berguna untuk meninjau banyak alat matematika dan konstruksi teoretis yang sering digunakan di bidang ekonomi. Sumber daya alam yang berperan sebagai daya dukung dan penghambat perkembangan. Sementara populasi jauh di bawah daya dukungnya, dikatakan tumbuh secara eksponensial. Kemudian, karena efek dari tekanan populasi menumpuk, sehingga pertumbuhan populasi turun secara logistik. Pertumbuhan penduduk pada kenyataannya adalah sesuatu yang tidak jelas karena ada kecenderungan yang kuat untuk terlalu banyak yang menguasai kemampuan sumber daya alam atau produktivitas, ini pertama kali dikenali oleh Malthus ketika ia melanjutkan "Kekuatan penduduk secara tak terbatas lebih besar daripada kekuatan di bumi untuk menghasilkan kebutuhan hidup bagi manusia." Dalam model dinamis saat ini, beberapa variabel dan kekuatan vital dan asumsi di atas telah diteliti tentang bagaimana mereka saling mempengaruhi satu sama lain (Adeng dan Marroquin, 2008).

Mulai membangun model dari dasar dan secara bertahap meningkatkan kompleksitas karena semakin banyak variabel yang ditambahkan. Faktor utama yang mempengaruhi pertumbuhan populasi:

1. Tingkat kelahiran (α) yang menambah populasi.
2. Tingkat kematian (β) yang menguras populasi.
3. *Carrying capacity* (K), ditentukan oleh jumlah sumber daya alam.

$$\frac{dP(t)}{dt} = (\alpha - \beta)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

Kombinasi penurunan tingkat kematian karena banyak kemajuan dalam sanitasi dan obat-obatan, ditambah dengan penurunan tingkat kelahiran karena perubahan dalam ekonomi, telah menyebabkan perubahan kurva pertumbuhan penduduk di negara maju. Angka ini memperkuat persamaan di atas menunjukkan pengumpulan populasi yang terdiri dari tingkat kelahiran dan tingkat kematian. Model Transisi Demografis ini adalah versi sederhana dari kenyataan yang menunjukkan perubahan populasi (kelahiran, kematian dan perubahan alam) dari waktu ke waktu (Adeng dan Marroquin, 2008).

Diagram Proses Pemodelan

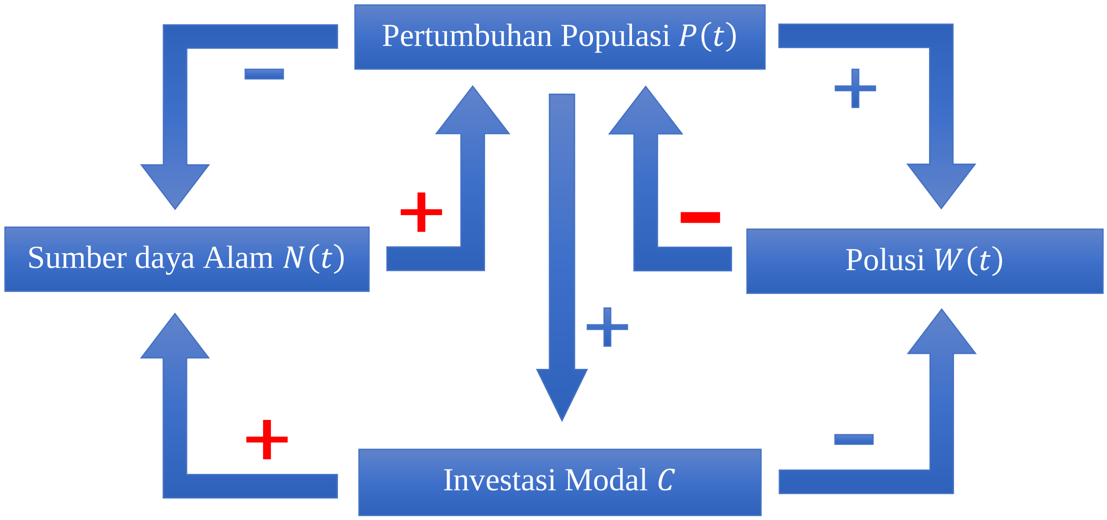


Diagram proses pemodelan (Adeng dan Marroquin, 2008).

2.6 Aturan Cramer

Jika $Ax = b$ adalah suatu sistem dari n persamaan linear dengan n faktor yang tidak diketahui sedemikian rupa sehingga $\det(A) \neq 0$, maka sistem ini memiliki solusi yang unik. Solusinya adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Di mana A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke-j dari A dengan entri-entri pada matriks

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(Anton dan Rorres, 2005).

2.7 Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Misalkan vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ di $\mathbb{R}^n$, maka:

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq \|\bar{u}\|\|\bar{v}\|$$

Operator '·' mempresentasikan *dot product* pada ruang vektor. Sedangkan notasi $|\cdot|$ dan $\|\cdot\|$ secara berurutan menyatakan nilai mutlak dan panjang atau norm dari vector.

Jika $\bar{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ dan $\bar{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, maka bentuk diatas dapat ditulis ulang sebagai

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2} \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + \cdots + b_n{}^2}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas, lalu ditulis dalam notasi sigma, maka ketaksamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2\right)$$

(Bachman dkk, 2000).

2.8 Koefisien Korelasi

Ahli ekonomi atau ahli-ahli bidang lainnya sering menggunakan analisis korelasi untuk mengetahui erat-tidaknya hubungan antarvariabel. Apabila ternyata hasil analisis menunjukkan hubungan yang cukup erat, maka analisis dilanjutkan ke analisis regresi sebagai alat meramalkan (*forecasting*) yang sangat berguna untuk perencanaan. Analisis korelasi yang mencakup dua variabel X dan Y disebut analisis korelasi linear sederhana (*simple linear correlation*), sedangkan yang mencakup lebih dari dua variabel disebut analisis korelasi linear berganda (*multiple linear correlation*) (Supranto, 2001).

Koefisien korelasi,

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} {Y_i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}}$$

Jika $r = 1$, berarti bahwa hubungan antara X dan Y adalah sempurna dan positif. Jika $r = -1$, hubungan X dan Y adalah sempurna dan negatif. Jika $r = 0$, hubungan X dan Y lemah sekali (dianggap tidak ada hubungan) (Supranto, 2001).

r^2 disebut koefisien determinasi (*coefficient of determination*), yaitu nilai untuk mengukur besarnya kontribusi X terhadap variasi (naik turunnya) Y. Variasi Y lainnya (sisanya) disebabkan oleh faktor lain yang juga mempengaruhi Y dan sudah termasuk dalam kesalahan pengganggu (*disturbance error*). Apabila dinyatakan dalam persentase, maka seluruh variasi, sebanyak $r^2 \times 100\%$, disebabkan oleh regresi Y terhadap X, sedangkan sisanya $\frac{\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} {Y_i}^2} \times 100\%$, disebabkan oleh faktor lain (kesalahan penggangu) (Supranto, 2001).

2.9 Metode Runge-Kutta

Sebuah metode yang relative sederhana dan jua cukup akurat yang sering digunakan dinamakan metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta ini mempunyai galat pemotongan lokal yang sebanding dengan Δx^5. Metode yang sangat terkenal untuk mengaproksimasi solusi masalah nilai awal orde pertama adalah metode Runge-Kutta orde ke empat. Prosedur metode Runge-Kutta orde ke empat untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut sebagai berikut:

Tahap 1. Bagilah interval $x_0 \leq x \leq b$ menjadi p subinterval dengan menggunakan titik-titik yang berspasi sama:

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 + \Delta x, \\ x_2 = x_1 + \Delta x, \\ \vdots \\ x_p = x_{p-1} + \Delta x - b. \end{gathered}$$

Tahap 2. Untuk $n = 1, 2, 3, \dots, p$, dapatkan barisan aproksimasi berikut:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

Dimana

$K_1 = g(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x,$

$K_2 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2}\right)\Delta x,$

$K_3 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2}\right)\Delta x,$

$K_4 = g(x_{n-1} + \Delta x, y_{n-1} + K_3)\Delta x.$

(Kartono, 2012).

2.10 *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE)

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) dihitung dengan menggunakan kesalahan absolut pada tiap periode dibagi dengan nilai observasi yang nyata untuk periode itu. Kemudian, merata-rata kesalahan persentase penyimpangan antara data aktual dengan data peramalan. Nilai MAPE dapat dihitung dengan persamaan berikut.

$$\mathrm{MAPE} = \left(\frac{100\%}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}\frac{|X_t - F_t|}{X_t}$$

Dimana

X_t = Data aktual pada periode t

F_t = Nilai Peramalan pada periode t

n = Jumlah data

(Makridakis dkk, 1983).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2016/2017 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data jumlah penduduk, luas lahan pertanian dan volume sampah Kota Bandar Lampung tahun 1995 – 2016 yang diperoleh dari BPS (Badan Pusat Statistik).

Tabel 1. Data Jumlah Penduduk Kota Bandar Lampung Tahun 1995 – 2016.

Tahun	**Jumlah Penduduk (*Jiwa*)**
1995	685862
1996	696949
1997	708212
1998	719659
1999	731290
2000	743109
2001	754892
2002	767036
2003	790895

Tahun	Jumlah Penduduk (*Jiwa*)
2004	800490
2005	809860
2006	844608
2007	812133
2008	822880
2009	833517
2010	881801
2011	891374
2012	902885
2013	942039
2014	960695
2015	979287
2016	997728

Tabel 2. Data Luas Lahan Pertanian Kota Bandar Lampung Tahun 1995 – 2014.

Tahun	Luas Lahan Pertanian (*Ha*)
1995	13470
1996	12841
1997	12799
1998	11759,36
1999	11727,21
2000	12564,00
2001	10547,11
2002	10527,01
2003	10477,01
2004	10467,28
2005	10909,47
2006	10858,55
2007	10909,47
2008	10810,55
2009	10522,44
2010	10448,44
2011	10435,44
2012	9963,58
2013	6552,03
2014	6244,62

Tabel 3. Data Volume Sampah Kota Bandar Lampung Tahun 1995 – 2016

Tahun	**Volume Sampah (*m^3/tahun*)**
1995	688433,98
1996	699562,56
1997	710867,80
1998	722357,72
1999	734032,34
2000	745895,66
2001	757722,85
2002	769912,39
2003	793860,86
2004	803491,84
2005	812896,98
2006	847775,28
2007	815178,50
2008	825965,80
2009	836642,69
2010	885107,75
2011	894716,65
2012	906270,82
2013	945571,65
2014	964297,61
2015	982959,33
2016	1001469,48

3.3 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka seperti buku-buku penunjang matematika, internet dan jurnal-jurnal matematika yang berhubungan dengan model pertumbuhan populasi. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan yaitu:

1. Mempelajari definisi dan teorema yang menjadi landasan pada penelitian ini.

2. Melakukan kajian solusi analitik untuk tiap-tiap kasus model regresi linear sederhana, eksponensial, logistik dan transisi demografis serta melakukan pemodelan pertumbuhan penduduk Kota Bandar Lampung dengan model-model tersebut.
3. Membandingkan galat dari tiap-tiap model dengan perhitungan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE).
4. Melakukan validasi terhadap tiap-tiap model.
5. Memproyeksikan jumlah penduduk Kota Bandar Lampung pada tahun yang akan datang dengan menggunakan model yang paling mendekati akurat.

V. KESIMPULAN

Model regresi linear sederhana, eksponensial, logistik dan transisi demografis telah menunjukkan penggunaannya dalam melakukan pendekatan (*approximation*) jumlah penduduk Kota Bandar Lampung dari tahun 1995 – 2011. Hasil dari masing-masing model berbeda-beda, ini dipengaruhi oleh asumsi-asumsi yang digunakan dari tiap-tiap model. Beda asumsi yang digunakan maka beda pula hasilnya. Pada model regresi linear sederahana menggunakan asumsi variabel waku t dan variabel jumlah penduduk Y, sehinnga didapatkan model pertumbuhan penduduk yaitu $\hat{Y} = 684440{,}14 + 12199{,}15t$. Koefisien korelasi yang diperoleh adalah $R = 0{,}980766798$, ini menunjukkan bahwa hubungan antara waktu t dan jumlah penduduk Y mendekati sempurna. Kontribusi waktu t terhadap variasi (naik turunnya) jumlah penduduk Y adalah sebesar $R^2 = 96{,}19\%$, sedangkan sisanya sebesar 3,81% disebabkan oleh faktor lain (*error*). Pada model eksponensial menggunakan asumsi variabel tingkat kelahiran b dan variabel tingkat kematian d. Laju pertumbuhan bersih per kapita (laju kelahiran dikurangi laju kematian) r dapat dihitung dengan pemilihan dua sampel data yang berbeda. Penghitungan dilakukan dengan interval waktu 1 tahun sampai dengan 16 tahun dengan menggunakan software MATLAB. Berdasarkan data pada Tabel 4 terlihat bahwa sampel data ke-1 dan ke-17 dengan rentang waktu 16 tahun memiliki MAPE terkecil yaitu sebesar 0,00933224336557254 dengan laju pertumbuhan r sebesar 0,01638047819856560. Sehingga diperoleh model eksponensial pada pertumbuhan penduduk Kota Bandar Lampung yaitu $P(t) = 685862\ e^{0{,}01638047819856560(t)}$. Pada model logistik menggunakan asumsi variabel tingkat kelahiran b, variabel tingkat kematian d dan daya tampung (*carrying capacity*) K. Daya tampung (*carrying capacity*) K dan laju pertumbuhan bersih per kapita (laju kelahiran dikurangi laju kematian) r dapat diperoleh dari jumlah populasi $P(t)$ untuk tiga waktu yang berbeda akan tetapi dalam rentang waktu pengambilan data sama. Penghitungan dilakukan dengan interval waktu 1 tahun sampai dengan 8 tahun dengan menggunakan software MATLAB. Berdasarkan data pada Tabel 5 terlihat bahwa sampel data ke-1, ke-3 dan ke-5 dengan rentang waktu 2 tahun memiliki MAPE terkecil yaitu sebesar 0,00933559613058334 dengan daya tampung (*carrying capacity*) K sebesar 1700020676 dan laju pertumbuhan penduduk r sebesar 0,01604009744166730. Sehingga diperoleh model logistik pada pertumbuhan penduduk Kota Bandar Lampung yaitu $P(t) = \frac{1700020676}{1+\left(\frac{1700020676}{685862}-1\right)e^{-(0{,}01604009744166730)t}}$.

Pada model transisi demografis menggunakan asumsi variabel tingkat kelahiran α, variabel tingkat kematian β dan variabel perubahan alam (sumberdaya alam $N(t)$ dan polusi $W(t)$) sehingga pertumbuhan penduduk ditentukan dan didukung oleh kekurangan sumberdaya alam dan polusi. Sumber daya alam diasumsikan sebagai luas lahan pertanian, sedangkan polusi diasumsikan sebagai volume timbulan sampah. Dikarenakan model transisi demografis sangat rumit dengan banyak variabel dan komponen yang saling berinteraksi, maka dilakukan simulasi pada tiap-tiap parameter dan dibantu dengan program MATLAB, sehingga diperoleh model transisi demografis pada pertumbuhan penduduk Kota Bandar Lampung yaitu

$$\frac{dP(t)}{dt} = \big(0{,}02 - 0{,}0036195218014344 - 0{,}000000001W(t)\big)P\left(1 - \frac{P(t)}{1000N(t)}\right)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = 13470 - 0{,}000212772640889234P(t)$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = 1{,}00375P(t) - 0{,}001W(t)0{,}1P(t)$$

Berdasarkan data pada Tabel 7 yang menyajikan perbandingan MAPE dari masing-masing model didapatkan bahwa model transisi demografis memiliki MAPE yang paling besar yaitu 1,22234%. Tentu saja pada model transisi demografis tidak dapat dijadikan rujukan untuk melakukan proyeksi terhadap jumlah penduduk Kota Bandar Lampung. Hal ini dikarenakan pada model transisi demografis pertumbuhan penduduk ditentukan dan didukung oleh kekurangan sumber daya alam dan polusi. Sumberdaya alam hanya diasumsikan sebagai luas lahan pertanian, sedangkan masih banyak sumberdaya alam lain yang tidak diasumsikan ke dalam model. Polusi hanya diasumsikan sebagai volume timbulan sampah, sedangkan masih banyak polusi lain yang tidak diasumsikan ke dalam model. Sedangkan model eksponensial memiliki MAPE yang peling kecil yaitu 0,93322%, sehingga model eksponensial paling akurat dibandingangkan dengan model pertumbuhan penduduk lainnya. Kemudian hasil validasi dari masing-masing model pada tahun 2012 – 2016 berdasarkan data pada Tabel 9 terlihat bahwa model eksponensial memiliki MAPE terkecil yaitu 2,194% sedangkan model regresi linear sederhana memiliki MAPE terbesar yaitu 4,161%. Hasil validasi menunjukkan bahwa model eksponensial telah teruji kevalidannya untuk melakukan proyeksi jumlah penduduk Kota Bandar Lampung. Prediksi jumlah penduduk Kota Bandar Lampung pada sensus penduduk 2030 berdasarkan hasil model eksponensial adalah 1.216.816 jiwa.

DAFTAR PUSTAKA

Cahyono, E. 2013. *Pemodelan Matematika Edisi Pertama*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Supranto, J. 2001. *Statistik Teori dan Aplikasi Edisi Keenam Jilid 2*. Erlangga, Jakarta.

Iswanto, R. J., 2012. *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Adeng, J. M. dan Marroquin, F. A. 2008. *The Population Growth Model*.

Anton, H. dan Rorres, C. 2005. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Julid 1*. Erlangga, Jakarta.

Bachman, G., Narici, L. dan Beckenstein, E. 2000. *Fourier and Wavelet Analysis*. Springer Science dan Business Media, New York.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan Edisi Pertama*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Makridakis, S., Wheelwright, S. C. dan McGee, V. E. 1983. *Forecasting: Methods and Applications Second Edition*. John Wiley dan Sons, New York.