STUDI TENTANG KELENGKAPAN DAN KEKOMPAKAN RUANG METRIK YANG DIINDUKSI METRIK HAUSDORFF

(Skripsi)

Oleh

Nur Ahmad Abrori

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

STUDY ABOUT COMPLETENESS AND COMPACTNESS OF HAUSDORFF INDUCED METRIC SPACE

By

Nur Ahmad Abrori

In mathematical analysis studies, there is the special topic such as metric space. The one space whose unique characteristics to be studied is Hausdorff induced metric space. This research elaborates four parts which related with Hausdorff metric, that are: i) three equivalent alternative definitions of Hausdorff metric; ii) relation between Hausdorff, 2 dimensional minimum Hausdorff, and Yau-Hausdorff metric in Euclidean space R^2; iii) relation between convergence in Hausdorff metric and convergence of Kuratowski in set sequences; and iv) characteristics Hausdorrf induced metric space about completeness and compactness.

Key Words: Metric Space, Hausdorff Metric, Hausdorff induced Metric Space

ABSTRAK

STUDI TENTANG KELNGKAPAN DAN KEKOMPAKAN RUANG METRIK YANG DIINDUKSI METRIK HAUSDORFF

Oleh

Nur Ahmad Abrori

Dalam kajian matematika analisis, terdapat topik khusus yaitu ruang metrik. Salah satu ruang yang memiliki karakteristik yang unik untuk dikaji adalah ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff. Penelitian ini membahas empat bagian materi yang berkaitan dengan metrik Hausdorff yaitu i) tiga definisi alternatif yang ekuivalen dari metrik Hausdorff; ii) hubungan antara metrik Hausdorff, minimum Hausdorff 2 dimensi, dan Yau-Hausdorff dalam ruang Euclidean R^2; iii) hubungan antara konvergensi dalam metrik Hausdorff dan konvergensi Kuratowski pada barisan himpunan; dan iv) karakteristik ruang metrik yang dinduksi metrik Hausdorff dari segi kelengkapan dan kekompakkannya.

Kata Kunci : Ruang Metrik, Metrik Hausdorff, Ruang Metrik yang Dinduksi Metrik Hausdorff

STUDI TENTANG KELENGKAPAN DAN KEKOMPAKAN RUANG METRIK YANG DIINDUKSI METRIK HAUSDORFF

Oleh

Nur Ahmad Abrori

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **STUDI TENTANG KELENGKAPAN DAN KEKOMPAKAN RUANG METRIK YANG DIINDUKSI METRIK HAUSDORFF**

Nama Mahasiswa : **Nur Ahmad Abrori**

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031089

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**
NIP. 19720227 199802 1 001	NIP. 19760411 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si** ....

   Sekretaris : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

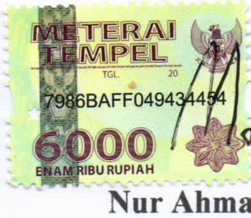
Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **31 Juli 2018**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Studi tentang Kelengkapan dan Kekompakan Ruang Metrik yang Diinduksi Metrik Hausdorff"** merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan hasil karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 31 Juli 2018

Penulis,



Nur Ahmad Abrori
NPM. 1417031089

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Nur Ahmad Abrori, lahir di Rukti Harjo, Seputih Raman, Lampung Tengah pada tanggal 16 Maret 1997. Penulis merupakan anak pertama dari 4 bersaudara, pasangan bapak Mas'ud dan ibu Suprihatin.

Penulis menempuh pendidikan dasar di SD Negeri 4 Rukti Harjo dari tahun 2003-2009. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 2 Kotagajah dan lulus pada tahun 2012. Kemudian menempuh pendidikan di SMA Negeri 1 Kotagajah dan lulus pada tahun 2014.

Pada tahun 2014, penulis diterima sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung, penulis merupakan salah satu mahasiswa penerima beasiswa Bidikmisi. Pada tahun 2017 penulis melakukan Kerja Praktik di PT. Asuransi Jiwasraya(Persero) Kantor Cabang Bandar Lampung. Kemudian penulis melaksanakan pengabdian masyarakat dengan mengikuti kegiatan Kuliah Kerja Nyata Bersama BKS PTN Wilayah Barat di desa Rukam, kecamatan Mendo Barat, kabupaten Bangka, provinsi Kepulauan Bangka Belitung.

PERSEMBAHAN

Karya ilmiahku yang sederhana ini kupersembahkan kepada:

Bapakku Pak Mas’ud dan Ibuku Bu Suprihatin

Untuk bapakku, aku belajar banyak kepada engkau tentang keteguhan dan qona’ah serta tahan banting dalam menjalani kehidupan. Untuk ibuku, aku belajar banyak kepada engkau tentang kesabaran dan kasih sayang dalam keluarga walaupun kadang disertai emosi dan dihadapkan dalam keadaan yang sangat sulit. Karena engkau berdua tetap kuat bertahan hingga sekarang, selalu mendukung anak-anakmu merantau dan menuntut ilmu. Terima kasih engkau berdua masih berada di belakangku untuk selalu mendorongku menjadi lebih baik walaupun aku masih sering mengecewakan dan menyulitkan kalian. Maafkan kesalahanku selama ini. Semoga hal ini dapat menjadi awal yang baik bagi kehidupanku di masa depan.

Adikku Luqman Hadi, Taufiq Musytofa Kamal, dan Muhammad Syaikhuddin

Terima kasih kepada adik - adikku yang selalu memberikan semangat dan keceriaan dalam hidupku. Untuk luqman, seriuslah dalam belajar dan menuntut ilmu, semoga kau semakin memiliki adab dan akhlak serta pengetahuanmu semakin luas dan hatimu semakin mudah lapang. Untuk Taufiq, semoga kau semakin paham dan mengerti kehidupan secara perlahan, belajarlah yang tekun, temukan minat dan bakatmu, jadilah pribadi yang lebih baik lagi. Untuk Syaikhuddin, kakak berharap kau sebagai anak bungsu dapat menjadi lebih baik dari kakak-kakakmu, belajar dari kesalahan yang telah diperbuat, belajarlah dengan gigih.

Kakekku Abdul Khamid

Terima kasih kepada kakekku yang telah menemaniku dan mendidikku dari SD hingga SMA dan menjadi teman diskusi, ngobrol selama saya hidup dan tinggal bersama kakek. Aku belajar banyak kepadamu tentang kedisiplinan dan teguh dalam menjaga prinsip.

Sahabat Frosster-ku

Teruntuk Nizham, April, Artha, Bella, Budi, Dea, Diska, Dita, Ibnu, Icha, Mega, Mufiah, Muna, Rahma, Azizah, Rara, Siska, Pian, Teguh, dan Windi, terima kasih kepada para sahabatku sekelas SMA dulu yang telah mewarnai salah satu bagian perjalanan hidupku. Aku belajar banyak kepada kalian tentang persahabatan, mimpi-mimpi, keseriusan, canda tawa, suka dan duka bersama.

Sahabat Rukam Squadku

Teruntuk Jojo, Jeje, Mia, Bang Taufiq, Ade, Agil, Keteng, Ari, Ma'ruf, Ayu, Dedi, Della, Devina, Een, Idris, Mahdi, Mona, Ningsih, Rizki, Nosa, Ina, Koes, Marwan, Efin, Tiara, Lia, dan Indah, terima kasih kepada sahabatku KKN desa rukam, hari-hari bersama kala itu takkan kulupakan. Aku belajar banyak kepada kalian tentang persahabatan, mimpi-mimpi, idealisme, kedewasaan, manajemen konflik, petualangan, perjuangan, keseriusan, canda tawa, suka dan duka bersama.

Sahabat Mengajiku

Teruntuk Mas Dian, Mas Sholeh, Samsul, Ahmad, terima kasih telah menemaniku dalam beberapa tahun, bermain bola, bulutangkis bersama. Terima kasih, kalian telah menjadi teman dalam mengaji Al-Qur'an dan kitab-kitab kuning. Aku mendapat banyak ilmu dan pemikiranku berkembang bersama kalian. Teringat masa-masa yang cukup berat ketika menimba ilmu dari guru kita, Ustadz Saifuddin.

Sahabat-sahabatku

Teruntuk Amar, Pian, dan Nana, walaupun kita jarang bertemu dan kita hanya bersama dalam kepanitiaan KWI di Batutegi. Teringat dulu, kita saling diskusi dan bertukar pikiran untuk menyelesaikan masalah. Aku belajar dari kalian tentang keberanian, antimainstream, kreativitas dan inovasi, serta totalitas dan loyalitas.

Almamater dan Negeriku

MOTTO

"Jadikan asa sebagai motivasi"

KATA INSPIRASI

"Orang bodoh adalah orang yang belum mengenali diri sendiri hingga akhir hayatnya, selalu mengoreksi orang lain, tetapi buta terhadap kekurangan diri sendiri."

Nur Ahmad Abrori

"Katakanlah:"Hai hamba-hamba-Ku yang melampaui batas terhadap diri mereka sendiri, janganlah kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya Allah mengampuni dosa-dosa semuanya. Sesungguhnya Dialah Yang Maha Pengampun lagi Maha Penyayang."

(QS. Az-Zumar: 53)

"Dan carilah pada apa yang telah dianugerahkan Allah kepadamu (kebahagiaan) negeri akhirat, dan janganlah kamu melupakan bahagianmu dari (kenikmatan) duniawi dan berbuat baiklah (kepada orang lain), kepadamu, dan janganlah kamu berbuat kerusakan di (muka) bumi. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan."

(QS. Al-Qashash:77)

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Studi tentang Kelengkapan dan Kekompakan Ruang Metrik yang Diinduksi dari Metrik Hausdorff " dengan baik dan tepat pada waktunya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik karena dukungan, bimbingan, saran, serta do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis dalam mengerjakan skripsi.
2. Bapak Dr. Asmiati, S.Si., M.Si, selaku pembimbing II yang telah memberikan saran serta pembelajaran yang bermanfaat dalam menyelesaikan skripsi.
3. Ibu Prof. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku pembahas dan penguji skripsi yang telah memberikan evaluasi, arahan, dan saran demi perbaikan skripsi.
4. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si, selaku dosen pembimbing akademik dari awal semester 1 hingga akhir semester 8.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak dan Ibuku tercinta yang selalu mendo'akan kesuksesanku dunia dan akhirat.
9. Adik – adikku yaitu Luqman Hadi, Taufiq Musytofa Kamal, dan Muhammad Syaikhuddin yang telah mendo'akan dan memberi saran serta canda tawa.
10. Sahabat-sahabatku di kampus, Budi, Rois, Redi, Nandra, Darma, Dracjat, Rahmad, Wahyu, Ketut, Agus, Alvin, Fajar, Raka, dan Bang Young Enjang serta sahabat-sahabat seperjuangan yang telah mendo'akan, memberi dukungan dan selalu menjalani kehidupan kampus bersama penulis.
11. Teman-teman mahasiswa angkatan 2014 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
12. Alumni pengurus HIMATIKA periode 2015-2016 dan BEM FMIPA UNILA periode 2016 yang telah memberikan pengalaman berharga.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga informasi tambahan, saran, dan kritik untuk pengembangan dan perbaikan lebih lanjut sangat diharapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, 31 Juli 2018

Penulis

Nur Ahmad Abrori

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika dapat diklasifikasikan menjadi dua bagian yaitu matematika murni dan terapan. Matematika murni inilah yang dijuluki sebagai *the queen of science* karena lebih terfokus terhadap bentuk-bentuk abstrak pada dirinya sendiri yang tidak secara langsung menyentuh realitas kehidupan dan tidak berdialektika secara intens dengan bidang ilmu lain. Matematika murni lebih mengutamakan landasan-landasan teoretis dan aksiomatis serta pengembangan definisi, pola, dan struktur ruang yang baru dalam kerangka kontinuitas ilmu matematika. Sedangkan matematika terapan dijuluki sebagai *the servant of science*, sebab lebih menekankan pada aspek-aspek terapan yang dapat menginterpretasikan fenomena dan realitas kehidupan serta dapat berdialektika secara mendalam dengan bidang ilmu lain. Matematika terapan merupakan pengembangan dari matematika murni itu sendiri yang umumnya berperan penting dalam membantu menyelesaikan masalah-masalah realitas kehidupan yang dibahas dalam bidang ilmu lain.

Matematika murni adalah bagian dari ilmu matematika yang lebih menekankan pada aspek keindahan dan imajinatif dari pola, struktur, dan ruang yang lebih abstrak. Cabang matematika murni antara lain analisis, geometri, struktur aljabar,

aljabar linear, kombinatorika dan masih banyak cabang yang lainnya. Dalam matematika analisis khususnya, terdapat dua bagian topik yaitu topologi dan analisis fungsional. Kedua topik ini di dalamnya terdapat pembahasan tentang salah satu ruang yang memiliki karakteristik tersendiri yaitu ruang metrik.

Menurut Deza dan Deza (2009), istilah ruang metrik diperkenalkan oleh Maurice Frechet dalam karya ilmiahnya yang berjudul "Kajian Sistematik tentang Operasi-operasi Fungsional" pada tahun 1906. Delapan tahun kemudian, Felix Hausdorff mempublikasikan karya ilmiah yang berjudul "Teori Ruang Topologi dan Metrik". Ruang metrik adalah ruang khusus dalam matematika analisis dilengkapi dengan metrik yang merupakan fungsi jarak yang memenuhi beberapa aksioma tertentu. Metrik merupakan fungsi dalam matematika analisis yang dapat digunakan untuk untuk menentukan jarak antara titik dan titik, antara titik dan himpunan, serta antara himpunan dan himpunan.

Salah satu metrik yang memiliki aplikasi yang berguna di berbagai bidang kehidupan terutama di bidang teknologi informasi yang menggunakan konsep jarak adalah metrik Hausdorff. Metrik Hausdorff adalah fungsi jarak untuk mempelajari karakteristik perbedaan antara dua himpunan. Metrik ini memiliki keunikan tersendiri yaitu memiliki tiga definisi alternatif yang ekuivalen. Kemudian dikembangkan lagi metrik minimum Hausdorff n dimensi. Kemudian, Tian dkk. (2015) mendefinisikan metrik Yau-Hausdorff pada Ruang Euclidean dalam karya ilmiah yang berjudul "*Two Dimensional Yau-Hausdorff Distance with Applications on Comparison of DNA and Protein Sequences*". Metrik ini dikembangkan dan diilhami oleh konsep metrik minimum Hausdorff n dimensi dan proyeksi geometri. Metrik ini dipublikasikan oleh Tian dkk. untuk mendukung penelitian mereka dalam memahami dan menginterpretasi Barisan DNA dan Protein dengan mengembangkan algoritma Pattern-Recognition dengan konstruksi metrik baru ini.

Himpunan yang dilengkapi metrik Hausdorff dinamakan ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff. Pada ruang metrik ini, dapat dikaji mengenai konvergensi dalam barisan himpunan. Kemudian, dapat juga dikaji tentang kelengkapan dan kekompakkan ruang metrik tersebut seperti yang telah dibahas dalam karya ilmiah yang dipublikasikan oleh Barich (2011) dengan judul "*Proving Completeness of The Hausdorff Induced Metric Space*". Dalam karya ilmiah tersebut, telah diteliti mengenai karakteristik ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff.

Berdasarkan hasil penelitian Barich (2011) dan Tian dkk. (2015), penulis akan melakukan studi literatur secara lebih mendalam tentang metrik Hausdorff dan beberapa metrik yang berkaitan yaitu metrik minimum Hausdorff n dimensi dan metrik Yau-Hausdorff. Dalam penelitian ini, penulis juga akan mengkaji tentang konvergensi dalam barisan himpunan dan karakteristik ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff yaitu kelengkapan dan kekompakkannya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Membuktikan bahwa terdapat tiga definisi alternatif yang ekuivalen dari metrik Hausdorff.
2. Menentukan hubungan antara metrik Hausdorff, minimum Hausdorff 2 dimensi, dan Yau-Hausdorff dalam ruang Euclidean R^2.
3. Menentukan hubungan antara konvergensi Kuratowski dan konvergensi dalam metrik Hausdorff pada barisan himpunan.
4. Menentukan karakteristik ruang metrik yang dinduksi metrik Hausdorff dari segi kelengkapan dan kekompakkannya.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah :

1. Memperluas pengetahuan tentang ruang metrik khususnya ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff dan konvergensi dalam barisan himpunan.
2. Sebagai salah satu sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya sekaligus dapat memberikan kontribusi dalam mempelajari dan mengembangkan kajian ilmu matematika analisis khususnya ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff dan konvergensi dalam barisan himpunan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi, istilah-istilah yang berhubungan dengan materi yang akan dibahas pada penelitian ini.

2.1 Metrik dan Ruang Metrik

Metrik pada himpunan X adalah suatu fungsi $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$

(ii) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$

Ruang metrik (X, d) adalah sebuah himpunan X yang dilengkapi metrik d (Bartle dan Sherbert, 2010).

Contoh:

Himpunan $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n\}$$

Kemudian, pada $\mathbb{R}^n$ didefinisikan jarak Euclidean d yaitu

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}^n$ dimana $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dan $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}^n, d)$ adalah ruang metrik.

Bukti.

1. Akan dibuktikan $d(a,b) \geq 0\ \forall a, b \in R^n$

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$$

$$\geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 0} = \sqrt{0} = 0$$

2. Akan dibuktikan $d(a,b) = 0$ jika dan hanya jika $a = b$

i.) Jika $d(a,b) = 0$ maka $a = b$

$$d(a,b) = 0$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2 = 0$$

$$(a_i - b_i)^2 = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

$$a_i = b_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

$$a = b$$

ii.) Jika $a = b$ maka $d(a,b) = 0$

$$a = b$$

$$a_i = b_i \quad \forall\, 1 \le i \le n$$

$$(a_i - b_i)^2 = 0 \quad \forall\, 1 \le i \le n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 = 0$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} = 0$$

$$d(a,b) = 0$$

Berdasarkan i dan ii, terbukti bahwa $d(a,b) = 0$ jika dan hanya jika $a = b$

3. Akan dibuktikan $d(a,b) = d(b,a)\ \forall a,b \in R^n$

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (-(b_i - a_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} = d(b,a)$$

4. Akan dibuktikan untuk setiap $a,b,c \in R^n$ dimana $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, dan $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$berlaku ketaksamaan segitiga,yaitu

$$d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b)$$

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i + c_i - b_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i)^2 + (c_i - b_i)^2 + 2(a_i - c_i)(c_i - b_i)}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - b_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} 2(a_i - c_i)(c_i - b_i)}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (c_i - b_i)^2}$$

$$= d(a, c) + d(c, b)$$

2.2 Himpunan Terbatas pada Bilangan Real

Himpunan bilangan real dapat dibagi menjadi dua macam yaitu himpunan terbatas dan himpunan tidak terbatas. Sebelum membahas hal tersebut, terlebih dahulu dibahas mengenai batas atas dan batas bawah. Misalkan S himpunan bagian dari bilangan real $\mathbb{R}$.

(i) Elemen $u \in \mathbb{R}$ dikatakan batas atas dari S jika $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$.

(ii) Elemen $w \in \mathbb{R}$ dikatakan batas bawah dari S jika $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$.

Sebuah himpunan di $\mathbb{R}$ dikatakan terbatas di atas jika himpunan tersebut memiliki batas atas. Secara serupa, sebuah himpunan di $\mathbb{R}$ dikatakan terbatas di bawah jika himpunan tersebut memiliki batas bawah. Jika sebuah himpunan di $\mathbb{R}$ memiliki batas atas dan batas bawah sekaligus, himpunan tersebut dikatakan himpunan terbatas. Jika sebuah himpunan di $\mathbb{R}$ tidak memiliki salah satu dari batas atas atau batas bawah, maka himpunan tersebut dikatakan tidak terbatas.

Dalam konsep himpunan terbatas, terdapat dua istilah yang penting yaitu supremum dan infimum. Supremum dari $S \subseteq \mathbb{R}$, misalkan $u \in \mathbb{R}$, jika u memenuhi dua syarat berikut.

(i) Jika $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$.

(ii) Jika $s \leq v$ untuk setiap $s \in S$, maka $u \leq v$.

Supremum dari himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ jika ada dinyatakan sebagai $\sup S$. Sedangkan infimum dari $S \subseteq \mathbb{R}$, misalkan $w \in \mathbb{R}$ jika w memenuhi dua syarat berikut.

(i) Jika $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$.

(ii) Jika $v \leq s$ untuk setiap $s \in S$, maka $v \leq w$.

Infimum dari himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ jika ada dinyatakan sebagai $\inf S$.

Berdasarkan sifat kelengkapan dari $\mathbb{R}$, setiap himpunan bilangan real tak kosong yang terbatas di atas memiliki supremum. Secara serupa, setiap himpunan bilangan real tak kosong yang terbatas di bawah memiliki infimum(Bartle dan Sherbert, 2010).

2.3 Topologi Titik Himpunan pada Ruang Metrik

Definisi 2.1

Misalkan $v \in X$ dan $r > 0$. Bola terbuka berpusat di v dengan jari-jari r didefinisikan oleh $B_d(v, r) = \{x \in X | d(x, v) < r\}$.

Definisi 2.2

Titik x dikatakan titik limit dari himpunan K jika untuk setiap $r > 0$, himpunan $K \cap B_d(x, r)$ memuat sebuah titik dari K selain x.

Definisi 2.3

Himpunan K tertutup relatif dalam (X, d) jika K memuat semua titik limitnya.

Definisi 2.4

Klosur dari K, $\overline{K}$ adalah himpunan $K \cup K'$, dimana K', himpunan semua titik limit di K.

Definisi 2.5

Sebuah himpunan $K \subset X$ terbatas di (X, d) jika terdapat $x \in X$ dan $M > 0$ sedemikian sehingga $K \subset B_d(x, M)$.

Definisi 2.6

Sebuah himpunan $K \subseteq X$ terbatas secara total jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat himpunan bagian berhingga dari X, $\{x_i | 1 \leq x_i \leq n\}$ sedemikian sehingga berlaku $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \epsilon)$.

Definisi 2.7

Sebuah himpunan $K \subseteq X$ dikatakan kompak secara sekuensial di (X, d) jika setiap barisan di K memiliki subbarisan yang konvergen ke suatu titik di K(Gordon, 2002).

2.4 Konvergensi, Kelengkapan, dan Kekompakan pada Ruang Metrik

Sebuah barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika terdapat sebuah titik $x \in X$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n , x) = 0.$$

x dinamakan limit dari barisan (x_n) dan dapat ditulis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau disingkat $x_n \longrightarrow x$. Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke x atau memiliki limit x. Jika barisan (x_n) tidak konvergen, barisan tersebut dikatakan divergen.

Sebuah barisan (x_n) dalam ruang metrik $X = (X, d)$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N = N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ untuk setiap } m, n > N.$$

Ruang X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam X konvergen.

Ruang metrik X dikatakan kompak jika setiap barisan dalam X memiliki sebuah subbarisan yang konvergen. Himpunan bagian K dari X, dikatakan kompak, K sebagai subruang dari X, yaitu jika setiap barisan dalam K memiliki sebuah subbarisan konvergen yang memiliki limit di K.

Lemma 2.1

Setiap himpunan bagian kompak K dari ruang metrik adalah tertutup dan terbatas(Kreyzig,1978).

2.5 Transformasi Geometri pada Bidang

Sebuah fungsi $f: E^n \to E^n$ adalah sebuah isometri jika untuk setiap titik P dan Q pada E^n,

$$f(P)f(Q) = PQ.$$

Isometri mempertahankan jarak termasuk juga mempertahankan panjang, sudut, dan luas. Secara singkat, isometri mempertahankan ukuran dan bentuk dari setiap gambar geometrik.

Istilah yang berhubungan erat dengan isometri adalah kekongruenan antara dua himpunan. Himpunan bagian A dan $B \subseteq E^n$ dinamakan kongruen (dalam simbol $A \cong B$) jika terdapat sebuah isometri f sedemikian sehingga $f(A) = B$. Setiap isometri Euclidean merupakan kombinasi dari tiga tipe tranformasi yang fundamental: refleksi, translasi, dan rotasi.

Translasi memindahkan objek sepanjang garis lurus melalui bidang tanpa merotasikan objek atau mengubah orientasinya. Terdapat korespondensi satu ke satu antara vektor di E^n dan translasinya: translasi T diasosiasikan terhadap sebuah vektor $v \in E^n$ dilakukan dengan menjumlahkan vektor v terhadap setiap titik,

$$T(P) = P + v$$

dimana v adalah vektor perpindahan untuk translasi T. Dalam koordinat, jika $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ maka

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n).$$

Komposisi translasi ekuivalen dengan penjumlahan vektor translasinya. Jika T_v adalah translasi oleh vektor v dan T_w adalah translasi oleh vektor w maka komposisi $T_v o T_w$ adalah translasi oleh vektor penjumlahan $v + w$.

$$T_v o T_w = T_{v+w}.$$

Invers dari sebuah translasi T_v juga merupakan sebuah translasi:

$$T_v^{-1} = T_{-v}.$$

Selain translasi, terdapat juga transformasi lain pada bidang yaitu rotasi. Sebuah rotasi pada sebuah bidang ditunjukkan dengan memutarkan bidang terhadap titik tertentu(pusat rotasi) sebesar sudut tertentu pula. Sehingga rotasi memerlukan dua bentuk data untuk mendeskripsikan rotasi pada E^2, sebuah titik dan sebuah sudut. Rotasi berlawanan arah jarum jam ditandai dengan besar sudut positif, sedangkan rotasi searah jarum jam ditandai dengan besar sudut negatif. Notasi rotasi yang sering digunakan yaitu:

$$R_{C,\phi} = \text{rotasi dengan pusat } C \text{ dan sudut } \phi$$

Rotasi pada bidang xy dengan sudut sebesar ϕ terhadap titik asal O diberikan dengan formula

$$R_{O,\phi}(x, y) = (x\cos\phi - y\sin\phi\,, x\sin\phi + y\cos\phi)$$

Invers dari sebuah rotasi adalah sebuah rotasi terhadap pusat yang sama dengan besar sudut yang sama tetapi berlawanan arah:

$$\left(R_{O,\phi}\right)^{-1} = R_{O,-\phi}$$

(Jennings, 1994).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung pada semester genap tahun akademik 2017/2018.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengumpulkan sumber referensi serta studi kepustakaan tentang ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff dan konvergensi dalam barisan himpunan baik dari buku, jurnal, maupun karya ilmiah pendukung lainnya.
2. Memaparkan bahwa terdapat tiga definisi alternatif yang ekuivalen dari metrik Hausdorff $h(A,B)$.

$$h(A,B) = \max\{h'(A,B), h'(B,A)\}$$

$$h(A,B) = \inf\{\, \varepsilon > 0 | A \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(B) \; dan \; B \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(A) \,\}$$

$$h(A,B) = sup\{|r(x,A) - r(x,B)| \colon x \in X\} = \sup_{x\in X} |r(x,A) - r(x,B)|$$

3. Memberikan contoh konstruksi ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff.
4. Menentukan hubungan beberapa metrik yang dikonstruksi dari metrik Hausdorff dalam ruang Euclidean R^n(dalam hal ini yang dibahas hubungan pada ruang dua dimensi R^2) yaitu metrik Hausdorff $h(A, B)$, metrik minimum Hausdorff n dimensi $H^n(A, B)$, dan metrik Yau-Hausdorff $D(A, B)$. Metrik $H^n(A, B)$ didefinisikan $H^n(A, B) = \inf_{t,\theta} h\big(A^\theta + t, B\big)$. Kemudian, metrik $D(A, B)$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$D(A, B) = \max\left\{\sup_{\theta} \inf_{\varphi} H^1\left(P_x\big(A^\theta\big), P_x(B^\varphi)\right), \sup_{\varphi} \inf_{\theta} H^1\left(P_x\big(A^\theta\big), P_x(B^\varphi)\right)\right\}$$

di mana H^1 adalah jarak minimum Hausdroff 1-dimensi,

$$H^1(A, B) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \max\left\{\max_{a\in A+t}\ \min_{b\in B}|\mathrm{a} - \mathrm{b}|, \max_{b\in B}\ \min_{a\in A+t}|\mathrm{b} - \mathrm{a}|\right\}$$

5. Menjelaskan dua macam konvergensi dalam barisan himpunan yaitu konvergensi dalam metrik Hausdorff dan konvergensi Kuratowski.
6. Menentukan hubungan antara kedua macam konvergensi tersebut dengan membuktikan teorema yang berkaitan.
7. Menentukan sifat kelengkapan dan kekompakan ruang metrik yang diinduksi metrik Hausdorff dengan membuktikan dua teorema berikut yaitu
   (i) Jika (X, d) merupakan ruang metrik yang lengkap maka $(\mathcal{K}, h)$ juga merupakan ruang metrik yang lengkap.
   (ii) Jika (X, d) merupakan ruang metrik yang kompak maka $(\mathcal{K}, h)$ juga merupakan ruang metrik yang kompak.

   di mana $\mathcal{K}$ himpunan dari seluruh himpunan bagian kompak dan tak kosong dari X.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Metrik Hausdorff dapat didefinisikan dengan tiga macam alternatif definisi yang ekuivalen sebagai berikut.

$$h(A,B) = \max\{h'(A,B), h'(B,A)\}$$

$$h(A,B) = \inf\{\ \varepsilon > 0 | A \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(B)\ dan\ B \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon(A)\ \}$$

$$h(A,B) = \sup_{x\in X} |r(x,A) - r(x,B)|$$

2. Konvergensi Hausdorff berimplikasi konvergensi Kuratowski jika memenuhi syarat yaitu misalkan X ruang metrik, $\{A_n\}$ barisan himpunan bagian kompak dari X dan $A \subset X$ kompak maka, jika terdapat himpunan bagian kompak K dari X sedemikian sehingga $A_n \subset K$ untuk setiap n dan $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, maka $\lim_{n\to\infty} h(A_n, A) = 0$.
3. Untuk setiap himpunan berhingga $A, B \subseteq R^2$, berlaku hubungan berikut.

$$h(A,B) \leq H^2(A,B) \leq D(A,B)$$

4. Pada ruang metrik terinduksi metrik Hausdorff berlaku dua implikasi berikut.
   a. Jika (X,d) ruang metrik yang lengkap, maka $(\mathcal{K},h)$ juga lengkap.
   b. Jika (X,d) ruang metrik yang kompak, maka $(\mathcal{K},h)$ juga kompak.

5.2. Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mengkaji konvergensi dalam barisan himpunan dengan menggunakan metrik yang lain, serta hubungan antara metrik Hausdorff, minimum Hausdorff n dimensi, dan Yau-Hausdorff dalam ruang Euclidean R^n dibahas lebih detail dengan aplikasinya dalam analisis jarak di bidang teknologi informasi disertai dengan komputasi matematika agar memberikan kontribusi yang lebih signifikan dalam matematika terapan.

DAFTAR PUSTAKA

Barich, Katie. 2011. *Proving Completeness of Hausdorff Induced Metric Space*. (Tugas Akhir). Walla Walla: Whitman College.

Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis 4th Edition.* Illinois: John Wiley & Sons.

Deza, M.M. dan Deza, E. 2009. *Encyclopedia of Distances*. New York: Springer-Verlag.

Gordon, R.A. 2002. *Real Analysis:A First Course 2nd Edition.* Reading: Addison-Wesley.

Geletu, Abebe. 2006. *Introduction to Topological Spaces and Set-Valued Maps*. Ilmenau: Ilmenau University of Technology.

Jennings, G.A. 1994. *Modern Geometry with Applications*. New York: Springer-Verlag.

Kreyzig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons.

Tian, K., Yang, X., Kong, Q., Yin, C., He R.L., dan Yau, S.S. 2015. Two Dimensional Yau-Hausdorff Distance with Appplications on Comparison of DNA and Protein Sequences. *Journal of Public Library of Science ONE* **10(**9).