**REPRESENTASI MULTIVARIATE STATE SPACE METODE AKAIKE UNTUK DATA MULTIVARIATE STATIONARY TIME SERIES**

**(Skripsi)**

**Oleh:**

**Abdul Haris Siregar**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2018**

# ABSTRAK

## REPRESENTASI MULTIVARIATE STATE SPACE METODE AKAIKE UNTUK DATA MULTIVARIATE STATIONARY TIME SERIES

Oleh

Abdul Haris Siregar

Dalam penelitian bidang ekonomi hal yang harus diperhatikan adalah bagaimana kondisi/keadaan ekonomi tersebut sebelum atau setelah pengamatan, atau bagaimana kondisi ekonomi tersebut dalam kurun waktu yang berbeda dan memiliki varibel yang banyak atau multivariat. Dalam menganalisis data multivariat diperlukan suatu metode yang akurat supaya tidak mengalami bias. Representasi *multivariate state space* yaitu analisis *time series* yang menggambarkan data *multivariate stationary time series* melalui peubah tambahan (*state vector*). Dalam analisis *multivariate state space*, khususnya metode Akaike asumsi yang digunakan relatif sedikit dan sederhana serta sangat baik digunakan dalam pemilihan model peramalan. Dalam prosesnya, model *time series* yang telah ditransformasi ke dalam representasi *state space*, dimana sebelumnya telah dilakukan analisis terhadap data penelitian sehingga terbentuk model yang layak. Pada akhirnya perhitungan dilanjutkan berdasarkan algoritma *kalman filter* untuk mendapatkan prediksi dari deret waktu.



**Kata Kunci:** Akaike, *State Space, Time Series, Multivariat, Kalman Filter*, Simpanan Daerah.

## ABSTRACT

**REPRESENTATION OF MULTIVARIATE STATE SPACE METHOD AKAIKE FOR DATA MULTIVARIATE STATIONARY TIME SERIES**

By

Abdul Haris Siregar

In the field of economic research the thing to be considered is how the condition / state of the economy is before or after observation, or how the economic conditions are in different periods and have multivariate variables. In analyzing multivariate data required an accurate method in order not to experience bias. Multivariate state space representation is time series analysis that describes multivariate stationary time series data through additional variables (state vector). In multivariate state space analysis, in particular the Akaike method of assumption used is relatively small and simple and very well used in the selection of forecasting models. In the process, the time series model has been transformed into a representation of the state space, which has previously been analyzed to the research data to form a viable model. In the end the calculation is continued based on the algorithm kalman filter to get the prediction of the time series.

**Keyword:** Akaike, *State Space, Time Series*, *Multivariat*, *Kalman Filter*, Regional Savings.

# REPRESENTASI MULTIVARIATE STATE SPACE METODE AKAIKE UNTUK DATA MULTIVARIATE STATIONARY TIME SERIES

**Oleh:**

**ABDUL HARIS SIREGAR**

**Skripsi**

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar**
**SARJANA SAINS**

**Pada**

**Jurusan Matematika**
**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2018**

| | | |
|---|---|---|
| Judul Skripsi | : | **REPRESENTASI MULTIVARIATE STATE SPACE METODE AKAIKE UNTUK DATA MULTIVARIATE STATIONARY TIME SERIES** |
| Nama Mahasiswa | : | ***Abdul Haris Siregar*** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : | 1317031001 |
| Program Studi | : | S1 Matematika |
| Jurusan | : | Matematika |
| Fakultas | : | Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam |

**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing,

| | |
|---|---|
| **Prof. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.** | **Dorrah Aziz, Dra., M.Si.** |
| NIP. 195701011984041001 | NIP. 196101281988112001 |

2. Ketua Jurusan Matematika

**Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D.**
NIP. 196311081989022001

**MENGESAHKAN**

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Mustofa Usman, MA., Ph.D.** ..................

Sekreataris : **Dorrah Aziz, Dra., M.Si.** ..................

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ..................

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.**
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **29 Maret 2018**

# SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"REPRESENTASI MULTIVARIATE STATE SPACE METODE AKAIKE UNTUK DATA MULTIVARIATE STATIONARY TIME SERIES"** merupakan hasil karya sendiri dan bukan merupakan karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 Maret 2018
Penulis,

**Abdul Haris Siregar**

# RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Desa Adijaya, pada tanggal 19 Maret 1996, anak kedua dari empat bersaudara dari pasangan Bapak Fauzanur Siregar S.E., dan Ibu Meriani Lubis.

Penulis mengawali pendidikan formal pada tahun 2000 di TKIT Bustanul Ulum Terbanggi Besar. Pada tahun 2002 penulis melanjutkan pendidikan di SDIT Bustanul Ulum Terbanggi Besar dan diselesaikan tahun 2008. Selanjutnya penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Poncowati hingga tahun 2010, kemudian penulis melanjutkan pendidikannya di SMA Negeri 1 Terbanggi Besar dan diselesaikan pada tahun 2013. Pada tahun yang sama, penulis diterima dan terdaftar sebagai mahasiswa reguler Program Studi S1 Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Universitas Lampung.

Pada tahun 2016, penulis melakukan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Tenaga Kerja dan Transmigrasi Provinsi Lampung dan Kuliah Kerja Nyata di Desa Srisawahan Kecamatan Punggur Kabupaten Lampung Tengah.

**MOTTO**

*"Harus Bisa dan Pasti Bisa"*

*(Pak Kartono)*

*"Manusia Yang Baik adalah Manusia Yang*

*Bermanfaat Bagi Sesama"*

*(Pak Mario Teguh)*

*"Nikmatilah Hidup Dengan Santai,*
*Fokus Namun Tidak Jadi Beban"*

*(Abdul Haris Siregar)*

*Kupersembahkan Kepada :*

***Ibunda dan Alm. Ayahanda Tercinta, serta Saudaraku Tersayang, yang Telah Memberikan Doa dan Dorongan serta Menantikan Keberhasilanku***

## SANWACANA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala limpahan rahmat dan hidayahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**REPRESENTASI MULTIVARIATE STATE SPACE METODE AKAIKE UNTUK DATA MULTIVARIATE STATIONARY TIME SERIES**".

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis sadar bahwa banyak pihak yang telah terlibat sehingga dapat terselesaikan dengan baik dan tepat waktu. Untuk itu penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Mustofa Usman, MA., Ph.D., selaku pembimbing I yang setia membimbing, memberikan araahan, saran dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dorrah Aziz, Dra., M.Si., selaku pembimbing II yang dengan sabar memberikan kesempatan bagi penulis untuk belajar lebih banyak selama proses pembuatan skripsi ini.
3. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc., selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam proses pembuatan skripsi ini.
4. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku pembimbing akademik yang selalu memberikan pengarahan selama masa perkuliahan.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberikan bantuan kepada penulis.
8. Alm. Ayahanda, Ibunda, Abang, Adik-adik, dan keluarga yang selalu memberikan semangat, doa, dan kasih sayang.
9. Sahabat dan teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2013. Diantaranya Ali, Ansori, Efrizal, Dimas, Aiman, Afif, Dafri, Alfan, Hamid, Pranoto, Budi, Rasyid serta semua sahabat laki-laki dan perempuan lainnya yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih atas segala motivasi, bantuan, dan hal lain yang telah kalian berikan kepada penulis.
10. Keluarga besar HIMATIKA FMIPA UNILA dan ROIS FMIPA UNILA atas kebersamaannya dan perjuangan dalam memperbaiki dan mengembangkan diri untuk menjadi pribadi yang berguna bagi agama, bangsa, dan negara.
11. Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun agar dapat lebih baik dimasa yang akan datang.

Bandar Lampung, 29 Maret 2018
Penulis,

Abdul Haris Siregar

## DAFTAR ISI

## DAFTAR TABEL

## DAFTAR GAMBAR

# I. PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang dan Masalah

Dalam penelitian bidang ekonomi hal yang harus diperhatikan adalah bagaimana kondisi/keadaan ekonomi tersebut sebelum atau setelah pengamatan, atau bagaimana kondisi ekonomi tersebut dalam kurun waktu yang berbeda. Misalnya, statistik ekonomi dan keuangan daerah. Jika diperhatikan statistik ekonomi dan keuangan daerah erat kaitannya dengan simpanan daerah. Simpanan daerah akan berbeda setiap waktunya. Oleh karena itu, jika ingin meneliti simpanan daerah ini ada baiknya memperhatikan kondisi statistik ekonomi dan keuangan daerah tersebut dalam beberapa kondisi waktu yang berbeda.

Ketika dilakukan analisis terhadap simpanan daerah dalam kurun waktu tertentu dengan menggunakan metode *univariate* untuk mendapatkan model terbaik tentu saja metode ini kurang tepat. Karena dalam melihat pergerakan statistik ekonomi dan keuangan daerah tertentu diperlukan beberapa daerah lainnya dan metode *univariate* ini biasanya digunakan pada variabel tunggal. Untuk jenis data seperti simpanan daerah yang memiliki beberapa variabel pengamatan diperlukan metode lanjutan dari *univariate* yakni metode *multivariate*.

Data *multivariate* merupakan data yang memiliki variabel tak bebas lebih dari dua, dimana disetiap variabelnya memiliki observasi masing-masing. Dalam analisis data *multivariate stationary time series* biasanya diperlukan asumsi yang sangat banyak, dimana dalam kehidupan sehari-hari sangat sulit untuk mendapatkan data yang tepat untuk dianalisis, dan apabila dipaksakan untuk dianalisis akan menghasilkan *error* yang cukup besar, tentu saja hal ini sangat beresiko. Salah satu solusi yang dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan tersebut adalah dengan menggunakan representasi *Multivariate State Space* metode Akaike.

Representasi *Multivariate State Space* yaitu analisis *time series* yang menggambarkan data *multivariate stationary time series* melalui peubah tambahan (*state vector*). Dalam analisis *Multivariate State Space*, khususnya metode Akaike asumsi yang digunakan relatif sedikit dan sederhana serta sangat baik digunakan dalam pemilihan model peramalan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis akan mengkaji *Multivariate State Space* metode Akaike untuk menganalisis data *multivariate stationary time series*.

## 1.2. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui tahap-tahap representasi *Multivariate State Space* metode Akaike terhadap data *multivariate stationary time series.*
2. Mengestimasi Parameter model *State Space* metode Akaike.
3. Menerapkan model *State Space* metode Akaike pada studi kasus untuk memperoleh model terbaik dan memprediksi/meramalkannya.

## 1.3. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Dapat mengetahui tahap-tahap representasi *Multivariate State Space* metode Akaike terhadap data *multivariate stationary time series.*
2. Memperoleh hasil estimasi model *State Space* metode Akaike.
3. Dapat menerapkan model *State Space* metode Akaike pada studi kasus untuk memperoleh model terbaik dan memprediksi/meramalkannya.

# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1. Simpanan Daerah

Simpanan daerah mencakup 3 aspek utama yakni :

a. Simpanan Berjangka

Simpanan berjangka atau deposito (time deposit = deposito berjangka) adalah simpanan dari pihak ketiga pada bank yang penarikannya hanya dapat dilakukan dalam jangka waktu tertentu menurut perjanjian antara pihak ketiga dan bank yang bersangkutan.

Seperti yang tercantum pada perundangan-perundangan Indonesia No. 10 tahun 1998 yang mengatur tentang perbankan ini memuat juga pengertian deposito yang berbunyi "Deposito adalah simpanan yang penarikannya hanya dapat dilakukan pada waktu tertentu berdasarkan perjanjian nasabah penyimpan dengan bank"

b. Giro

Giro adalah sebuah produk bank dalam rangka menghimpun dana dari pihak ketiga dan pencairannya dapat diambil sewaktu-waktu atau ditarik sampai ke batas *limit* yang telah ditentukan oleh pihak bank.

Definisi lainnya dari giro adalah simpanan pada bank yang penarikannya dapat dilakukan setiap waktu dengan menggunakan cek atau surat perintah pembayaran lain atau dengan cara pemindahbukuan.

Nasabah giro atau giran adalah badan hukum yang membutuhkan kemudahan dalam lalu lintas pembayaran dalam menjalankan usahanya sehari-hari.

Jumlah simpanan giro lebih dinamis atau berfluktuasi dari waktu ke waktu sehingga giro merupakan sumber dana yang termasuk jangka pendek bagi bank.

c. Tabungan

Tabungan merupakan simpanan uang yang bisa dilakukan secara perseorangan atau instansi sesuai dengan ketentuan yang ditetapkan setiap bank. Simpanan uang ini bisa ditarik kapan saja, terutama bagi bank yang telah memiliki sarana ATM atau Anjungan Tunai Mandiri untuk penarikan uang secara mandiri. Tapi simpanan uang dalam bentuk tabungan tidak bisa ditarik tunai dengan menggunakan bilyet giro, cek dan alat penarikan lain yang ditentukan bank. Penabung akan mendapatkan sarana tabungan, seperti buku tabungan, kartu ATM, mobile banking, internet banking dan sebagainya.Tabungan bisa dijadikan sarana menyisihkan kekayaan atau pendapatan seseorang atau kelompok. Sekaligus bisa menunjang berbagai transaksi bisnis dan keuangan.

Menurut Undang-undang No 10 Tahun 1998 Tentang Perbankan, *Tabungan adalah simpanan yang penarikannya hanya dapat dilakukan menurut syarat tertentu yang disepakati, tetapi tidak dapat ditarik dengan cek, bilyet giro, dan /atau alat lainnya yang dipersamakan dengan itu.*

## 2.2. Analisis Deret Waktu (*Time Series*)

Data deret waktu adalah sekumpulan pengamatan kuantitatif yang disusun dari satu objek yang terdiri dari beberapa waktu periode, seperti harian, bulanan, triwulanan, dan tahunan. Data deret waktu yang memiliki dua atau lebih peubah disebut *multivariate time series*. Model *multivariate time series* melibatkan beberapa peubah yang tidak hanya runtut namun juga saling berkorelasi **(Montgomery, Jeninings, dan Kulahci, 2008)**.

Dari suatu deret waktu akan dapat diketahui pola perkembangan suatu peristiwa, kejadian atau variabel. Jika perkembangan suatu peristiwa mengikuti suatu pola yang teratur, maka berdasarkan pola perkembangan tersebut akan dapat diramalkan peristiwa yang bakal terjadi dimasa yang akan datang.

Jika observasi-observasi disimbolkan dengan $y_1, y_2, \dots, y_n$, maka deret waktu dapat digambarkan dengan model dasar sebagai berikut:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t, \qquad t = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

dimana: $\mu_t$ adalah komponen yang bervariasi secara perlahan yang disebut tren,

$\gamma_t$ adalah periodik komponen periode tetap yang disebut musiman,

$\varepsilon_t$ adalah komponen tidak beraturan yang disebut kesalahan atau error

**(Durbin dan Koopman, 2012)**.

### 2.2.1. Multivariat

Data deret waktu dapat dipengaruhi oleh beberapa faktor. Jika data deret waktu dipengaruhi oleh lebih dari dua faktor dan diukur secara bersama maka data yang digunakan adalah data multivariat. Analisis multivariat merupakan pengembangan lanjutan dari analisis univariat maupun bivariat. Menurut Rencher (2002), analisis multivariat berasal dari kata *multi* dan *variate*, yang artinya analisis lebih dari dua variabel. Dengan demikian, analisis multivariat merupakan metode statistik yang memungkinkan melakukan penelitian terhadap lebih dari dua variabel secara bersamaan. Dengan menggunakan teknik analisis ini dapat menganalisis pengaruh beberapa variabel terhadap variabel lainnya dalam waktu yang bersamaan. Analisis multivariat digunakan karena pada kenyataannya masalah yang terjadi tidak dapat diselesaikan dengan menghubungkan dua variabel atau melihat pengaruh satu variabel terhadap variabel lain.

## 2.3. Representasi *State Space*

Representasi *state space* dari suatu sistem merupakan suatu konsep dasar dalam teori control modern. Model *state space* dapat mengatasi keterbatasan dari teori control konvensional dalam meramalkan perilaku pada suatu sistem yang kompleks. Analisis *state space* dapat diterapkan pada suatu multi input-multi output, yang mungkin linear ataupun nonlinear, parameter konstan (*time-invariant*) ataupun parameter berubah.

*State* dari suatu sistem didefinisikan sebagai sekumpulan kecil informasi mengenai tingkah laku atau keadaan pada saat ini dan sebelumnya sedemikian sehingga keadaan yang akan datang dari suatu sistem dapat digambarkan secara lengkap sebagai pengetahuan bagi keadaan sekarang dan sebagai input bagi keadaan yang akan datang.

Jika $Y_{1t}$ dan $Y_{2t}$ sebagai output dari suatu sistem terhadap input $X_{1t}$ dan $X_{2t}$ maka suatu sistem dikatakan linear jika dan hanya jika suatu kombinasi linear dari input $aX_{1t} + bX_{2t}$, menghasilkan output dengan kombinasi linear yang sama $aY_{1t} + bY_{2t}$ untuk berbagai konstanta $a$ dan $b$. Suatu sistem dikatakan *time-invariant* jika karakteristik dari suatu sistem tidak berubah terhadap waktu, sedemikian sehingga jika input $X_t$ menghasilkan $Y_t$, maka input $X_{t-to}$ akan menghasilkan $Y_{t-to}$. Sedangkan suatu sistem dikatakan linear *time-invariant* jika sistem itu linear dan juga *time-invariant.* Suatu sistem dikatakan akan mempunyai proses yang stasioner apabila sistem ini merupakan sistem yang linear *time-invariant.*

Untuk sistem yang linear *time-invariant*, bentuk *state space*-nya digambarkan dalam persamaan *state:*

$$Y_{t+1} = AY_t + GX_{t+1} \tag{2.2}$$

dan persamaan output:

$$Z_t = HY_t \tag{2.3}$$

dimana: $Y_t$ = vector *state* $k \times 1$

$A$ = matriks transisi $k \times k$

$G$ = matriks input $k \times n$

$Z_t$ = vector output $m \times 1$

$H$ = matriks observasi atau output $m \times k$

**Definisi:** Sebuah deret waktu $\{Z_t\}$ dikatakan dalam representasi *state space* jika terdapat model *state space* untuk $\{Z_t\}$ yang sesuai dengan persamaan (2.2) dan (2.3) **(Brockwell dan Davis, 2002)**.

Jika input $X_t$ dan output $Z_t$ adalah proses stokastik, maka pernyataan *state space*-nya menjadi:

$$Y_{t+1} = AY_t + Ga_{t+1} \tag{2.4}$$

$$Z_t = HY_t + b_t$$

dimana $a_{t+1} = X_{t+1} - E(X_{t+1}|X_t, t \leq n)$ adalah *vector error* peramalan satu langkah kedepan dari proses input $X_t$, dan $b_t$ adalah suatu error berukuran $m \times 1$ yang diasumsikan independen terhadap $a_t$. Vektor $a_{t+1}$ juga diketahui sebagai inovasi dari input $X_t$ pada waktu $(t+1)$. Ketika $Z_t = X_t$, $b_t$ dihilangkan dari persamaan (2.4) dan bentuk *state space*-nya adalah bentuk yang berasal dari proses stokastik $Z_t$ yang stasioner, yaitu:

$$Y_{t+1} = AY_t + Ga_{t+1} \tag{2.5}$$

$$Z_t = HY_t$$

Jadi, proses $Z_t$ tersebut adalah output dari suatu proses stokastik yang linear dengan parameter konstan yang dikendalikan oleh input *white noise* $a_t$. Suatu proses dikatakan proses stokastik jika variabel-variabel random tersebut dapat dinyatakan dalam sekelompok urutan waktu. Sedangkan suatu proses $(a_t)$ disebut suatu proses *white noise* jika proses tersebut merupakan deretan dari variabel random tidak berkorelasi yang berasal dari distribusi tertentu dengan mean dan variansi yang diasumsikan 0 dan $\sum_a$, proses tersebut memiliki $\gamma_{ij}(k) = 0$ untuk $k = 0$, sedangkan $Y_t$ sebagai *state* dari proses tersebut.

### 2.3.1. Multivariate State Space Metode Akaike

Model *state space* yang merepresentasikan suatu *multivariate time series* melalui variabel pendukung, beberapa diantaranya mungkin tidak dapat diamati secara langsung. Variabel pendukung ini disebut vektor *state*. Vektor *state* merangkum semua informasi dari nilai sekarang dan masa lalu dari suatu deret waktu yang relevan dengan prediksi nilai ke depannya. Deret waktu yang diamati dinyatakan sebagai kombinasi linear dari variabel *state*. Model *state space* juga disebut *Markovian Representation* atau *Canonical Representation*.

Bentuk *state space* mencakup kelas model yang sangat luas. Setiap *Gaussian multivariate stationary time series* dapat ditulis dalam bentuk *state space*, asalkan dimensi prediktor *space* terbatas.

Secara khusus, proses *autoregressive moving average* (ARMA) memiliki representasi *state space* dan sebaliknya, setiap proses *state space* dapat dinyatakan dalam bentuk ARMA **(Akaike, 1974)**.

Ada berbagai bentuk model *state space* yang digunakan. Bentuk model *state space* yang digunakan kali ini didasarkan pada Akaike (1976). Model ini didefinisikan oleh persamaan *state transition* berikut:

$$z_{t+1} = Fz_t + Ge_{t+1} \qquad (2.6)$$

Dalam persamaan *state transition*, matriks koefisien **F** yang berukuran $s \times s$ disebut dengan *transition matrix*, itu menentukan sifat dinamis dari model.

Matriks koefisien **G** yang berukuran $s \times r$ disebut dengan *input matrix*, ini menentukan struktur varians dari persamaan transisi. Untuk identifikasi model, $r$ baris pertama dan kolom dari matriks G ditetapkan menjadi matriks identitas berukuran $r \times r$.

Vektor input $e_t$ yang berdimensi $r$ adalah urutan vektor acak yang berdistribusi normal dengan mean 0 dan kovarian $\sum_{ee}$. *Random error* $e$ kadang-kadang disebut dengan *innovation vektor* atau *shock vektor*.

Selain persamaan *state transition*, model *state space* biasanya mencakup persamaan pengukuran atau persamaan pengamatan yang memberikan nilai observasi $x_t$ sebagai fungsi dari vektor *state* $z_t$. Namun, dalam metode Akaike ini selalu mencakup nilai observasi $x_t$ dalam vektor *state* $z_t$, persamaan pengukuran dalam kasus ini hanya mewakili ekstraksi $r$ komponen pertama dari vektor *state*.

Persamaan pengukuran yang digunakan pada metode ini adalah:

$$x_t = [I_r, 0]z_t \tag{2.7}$$

dimana $\boldsymbol{I_r}$ merupakan matriks identitas berukuran $r \times r$. Dalam prakteknya, metode ini melakukan ekstaksi $x_t$ dari $z_t$ tanpa mengacu pada persamaan pengukuran eksplisit **(SAS Institute, 2016)**.

## 2.4. Algoritma *State Space* Metode Akaike

### 2.4.1. Stasioneritas

Stasioneritas artinya tidak terjadi pertumbuhan dan penurunan. Data dikatakan stasioner apabila pola data tersebut berada pada kesetimbangan di sekitar nilai rata-

rata dan varian yang konstan selama waktu tertentu. Data deret waktu dikatakan stasioner apabila tidak terdapat unsur tren dan musiman dalam data, atau dapat dikatakan rataan dan variannya tetap. Selain plot deret waktu, kestasioneran dapat dilihat dari plot autokorelasi yang turun mendekati nol secara cepat, umumnya setelah lag kedua atau ketiga. Kestasioneran data secara varian dapat dilihat dari Transformasi Box-Cox dimana dikatakan stasioner jika *rounded value*-nya bernilai satu. Apabila tidak stasioner dalam varian, maka dilakukan transformasi agar nilai varian menjadi konstan. Box dan Cox memperkenalkan transformasi pangkat (*power transformations*) dengan persamaan sebagai berikut:

$$T(Y_t) = \frac{(Y_t^{\lambda} - 1)}{\lambda}, \qquad \lambda \neq 0 \tag{2.8}$$

dengan $\lambda$ disebut sebagai parameter transformasi. Dalam transformasi Box-Cox, $\lambda$ akan diperoleh, dimana nantinya akan menentukan transformasi yang harus dilakukan. Khusus untuk $\lambda = 0$ dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\lim_{\lambda \to 0} T(Y_t) = \lim_{\lambda \to 0} \left( \frac{(Y_t^{\lambda} - 1)}{\lambda} \right) = \ln(Y_t), \tag{2.9}$$

Nilai beserta aturan transformasi Box-Cox dapat dilihat pada tabel 2.1.

Tabel 2.1. Transformasi Box-Cox

| Nilai $\lambda$ | Transformasi |
|---|---|
| $-1$ | $\frac{1}{Y_t}$ |
| $-0{,}5$ | $\frac{1}{\sqrt{Y_t}}$ |
| 0 | $\ln(T_t)$ |
| 0,5 | $\sqrt{Y_t}$ |
| 1 | $Y_t$ (tidak ada transformasi) |

Ketidakstasioneran rata-rata dapat diatasi dengan melakukan *differencing* (pembeda). Perlu diingat bahwa transformasi Box-Cox untuk melihat kestasioneran varian harus dilakukan sebelum melakukan *differencing*. Operator shift mundur (*backward shift*) sangat tepat untuk menggambarkan proses *differencing*. Penggunaan *backward shift* adalah sebagai berikut:

$$B^d Y_t = Y_{t-d} \tag{2.10}$$

**(Wei, 2006)**.

Uji stasioneritas juga dapat dilakukan dengan uji akar unit pada tingkat level atau tingkat *differencing*. Persamaan akar unit jika menggunakan intersep adalah sebagai berikut:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t \tag{2.11}$$

dengan $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$. Hipotesisnya adalah:

$H_0$ : $\gamma = 0$ (terdapat akar unit)

$H_1$ : $\gamma \neq 0$ (tidak terdapat akar unit)

Statistik uji:

$$\mathrm{ADF}_\gamma = \frac{\hat{\gamma}}{se(\hat{\gamma})}$$

Pada tingkat signifikansi $\alpha = 0{,}05$, $H_0$ ditolak jika statistik $\mathrm{ADF}_\gamma > t_{\alpha;n-k+1}$ atau $p - value < \alpha$. Jika $H_0$ ditolak maka data stasioner **(Fuller, 1996)**.

### 2.4.2. Fungsi Autokorelasi (*Autocorrelation Function*)

Himpunan data deret waktu $Z_1, Z_2, \ldots, Z_t$ yang dianggap sebagai variabel acak $Z_t$ diasumsikan mempunyai fungsi kepadatan peluang bersama $f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_t)$.
Jika struktur peluang *FKP* tidak berubah oleh adanya perubahan waktu maka waktu tersebut stasioner. Suatu data deret waktu $Z_t$ dapat dipandang sebagai suatu proses stokastik. Hal ini terjadi karena data deret waktu lampau hanya dapat menunjukkan struktur peluang yang akan datang dari suatu data deret waktu tanpa dapat diramalkan dengan pasti.

Data deret waktu $Z_t$ yang stasioner akan mempunyai nilai mean yang konstan $E(Z_t) = \mu$ dan varians konstan $E(Z_t - \mu)^2 = \sigma^2$. Fungsi autokovarian antara $Z_t$ dan $Z_{t+k}$ adalah:

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] \tag{2.12}$$

Autokorelasi merupakan korelasi atau hubungan antara data pengamatan suatu dara deret waktu. Untuk menghitung autokorelasi antara $Z_t$ dan $Z_{t+k}$ adalah:

$$\rho_k = Cor(Z_t, Z_{t+k}) = \frac{Cov(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{Var(Z_t)}\sqrt{Var(Z_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{2.13}$$

dimana $Var(Z_t) = Var(Z_{t+k}) = \gamma_0$, $\gamma_k$ dinamakan fungsi autokovarian dan $\rho_k$ dinamakan fungsi autokorelasi (ACF). Dalam praktiknya $\rho_k$ tidak diketahui dan dapat diperkirakan dengan $\hat{\rho}_k$ yang merupakan koefisien korelasi pada sampel dengan rumus:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t - \bar{Z})^2} \tag{2.14}$$

dimana: $\hat{\rho}_k$ = koefisien autokorelasi

$Z_t$ = nilai variabel $Z$ pada periode $t$

$Z_{t+k}$ = nilai variabel $Z$ pada periode $t+k$

$\bar{Z}$ = nilai rata-rata variabel $Z$

Untuk mengetahui apakah koefisien autokorelasi yang diperoleh signifikan atau tidak, diperlukan pengujian dengan hipotesis **(Wei, 2006)**:

$H_0$ : $\rho_k = 0$ (koefisien autokorelasi tidak signifikan)

$H_1$ : $\rho_k \neq 0$ (koefisien autokorelasi signifikan)

Statistik uji yang digunakan adalah:

$$t = \frac{\hat{\rho}_k}{SE(\hat{\rho}_k)} \tag{2.15}$$

$$SE(\hat{\rho}_k) = \sqrt{\frac{1 + 2\sum_{i=1}^{k-1} \hat{\rho}_i^2}{n}} \tag{2.16}$$

dimana: $SE(\hat{\rho}_k)$ = standar error untuk autokorelasi pada *lag* ke-$k$

$\hat{\rho}_i$ = autokorelasi pada *lag* ke-$i$

$k$ = selisih waktu

$n$ = banyaknya observasi dalam deret waktu

Kriteria keputusan $H_0$ ditolak apabila:

$t < -t_{\alpha/2,n-1}$ atau $t > t_{\alpha/2,n-1}$

### 2.4.3. Fungsi Autokorelasi Parsial (*Partial Autocorrelation Function*)

Fungsi autokorelasi parsial adalah tingkat keeratan hubungan antara $Z_t$ dan $Z_{t+k}$ setelah hubungan linear dengan variabel $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$ dipisahkan.

Sementara koefisien dari autokorelasi parsial digunakan untuk mengukur derajat hubungan antara nilai-nilai sekarang dengan nilai-nilai sebelumnya dengan pengaruh nilai variabel waktu *lag* yang lain dianggap konstan. Fungsi autokorelasi parsial dapat dinyatakan sebagai berikut: **(Wei, 2006)**

$$\phi_{kk} = Corr(Z_t, Z_{t+k} | Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}) \tag{2.17}$$

Autokorelasi parsial diperoleh melalui model regresi dimana variabel tak bebas $Z_{t+k}$ dari proses yang stasioner diregresikan pada variabel $Z_{t+k-1}, Z_{t+k-2}, \dots, Z_t$ ber*lag* $k$, sebagai berikut:

$$Z_{t+k} = \phi_{k1} Z_{t+k-1} + \phi_{k2} Z_{t+k-2} + \cdots + \phi_{kk} Z_t + a_{t+k} \tag{2.18}$$

dimana $\phi_{ki}$ merupakan parameter regresi ke-$i$ dan $a_{t+k}$ adalah residual dengan rataan 0 yang tidak berkorelasi dengan $Z_{t+k-j}$ untuk $j = 1, 2, \dots, k$. Kemudian persamaan (2.18) dikalikan dengan $Z_{t+k-j}$ di kedua rusuknya dan lakukan ekspektasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z_{t+k-j} Z_{t+k} = {} & Z_{t+k-j}(\phi_{k1} Z_{t+k-1}) + Z_{t+k-j}(\phi_{k2} Z_{t+k-2}) + \cdots \\ & + Z_{t+k-j}(\phi_{kk} Z_t) + Z_{t+k-j}(a_{t+k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(Z_{t+k-j}\, Z_{t+k}\right) &= E\big(Z_{t+k-j}(\phi_{k1} Z_{t+k-1}) + Z_{t+k-j}(\phi_{k2} Z_{t+k-2}) + \cdots \\ &\quad + Z_{t+k-j}(\phi_{kk} Z_t) + Z_{t+k-j}(a_{t+k})\big) \\ &= E\left(Z_{t+k-j}(\phi_{k1} Z_{t+k-1})\right) + E\left(Z_{t+k-j}(\phi_{k2} Z_{t+k-2})\right) \\ &\quad + \cdots + E\left(Z_{t+k-j}(\phi_{kk} Z_t)\right) + E\left(Z_{t+k-j}(a_{t+k})\right) \\ &= \phi_{k1} E\left(Z_{t+k-j} Z_{t+k-1}\right) + \phi_{k2} E\left(Z_{t+k-j} Z_{t+k-2}\right) + \cdots \\ &\quad + \phi_{kk} E\left(Z_{t+k-j} Z_t\right) + E\left(Z_{t+k-j} a_{t+k}\right) \end{aligned}$$

$$\gamma_j = \phi_{k1} \gamma_{j-1} + \phi_{k2} \gamma_{j-2} + \cdots + \phi_{kk} \gamma_{j-k} \tag{2.19}$$

Akibat dari persamaan (2.19) maka berdasarkan persamaan (2.18) dan dimisalkan $\gamma_0 = 1$ diperoleh:

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k} \quad \text{untuk } j = 1, 2, \dots, k \tag{2.20}$$

sehingga didapat persamaan berikut:

$$\rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\vdots$$

$$\rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_0$$

dimana $\rho_0 = 1$. Dengan menggunakan aturan Cramer pada persamaan di atas, untuk $k = 1, 2, \dots$ dan $j = 1, 2, \dots$ maka diperoleh:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Dengan demikian nilai fungsi autokorelasi parsial dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut: **(Wei, 2006)**

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \tag{2.21}$$

Berdasarkan persamaan $(2.21)$ dapat ditentukan bahwa nilai $\rho_k$ untuk $k = 1, 2, ...$ adalah $-1 < \rho_k < 1$. Dengan demikian determinasi pada persamaan $(2.21)$ dapat dicari determinasinya. Walaupun perhitungan determinasinya terlihat rumit namun persamaan $(2.21)$ tetap dapat digunakan karena determinannya tidak akan nol. Sama halnya dengan $\rho_k$, nilai $\phi_{kk}$ tidak mudah dihitung apalagi dengan determinan serumit itu. Oleh karena itu metode rekursif untuk menghitung $\phi_{kk}$ telah diberikan oleh Durbin (1960) yang dimulai dengan $\hat{\phi}_{11} = \hat{\phi}_1$ yaitu:

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_j} \tag{2.22}$$

dan,

$$\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1,k+1}\hat{\phi}_{k,k+1-j} \qquad j = 1, 2, \dots, k \tag{2.23}$$

### 2.4.4. Proses White Noise

Proses *White Noise* sama dengan kesalahan / error pada model regresi biasa. Untuk model deret waktu, proses *White Noise* dinotasikan dengan $\{Z_i\}$. Proses *White Noise* memiliki sifat-sifat antara lain:

1. deretnya terdiri dari peubah acak yang berurutan tidak saling berkorelasi,
2. $E(Z_t) = 0$ untuk setiap waktu,
3. $Var(Z_t) = \sigma^2$ untuk setiap waktu, dan
4. $\gamma_k = Cov(Z_{t+k}, Z_t) = 0$ untuk $k \neq 0$

**(Pankratz, 1991)**.

### 2.4.5. Persamaan Yule-Walker

Sistem persamaan *Yule Walker* dari model AR($p$) dapat diberikan sebagai berikut:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p} \tag{2.24}$$

dengan mensubtitusikan $k = 1, 2, \dots, p$, diperoleh:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2}$$

$$\vdots$$

$$\rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p \tag{2.25}$$

atau,

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Jika distribusi dengan penduganya, maka diperoleh penduga *Yule Walker* yaitu:

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Solusi dari sistem persamaan di atas merupakan penduga dari model AR($p$) **(Wei, 1964)**.

### 2.4.6. Uji Kecocokan Model dan Analisis Korelasi Kanonik

Representasi *state space* yang diberikan pada bagian sebelumnya tidaklah unik. Sebagai contoh, dari (2.5), dapat dibentuk sebuah vektor *state* baru $V_t = MY_t$ untuk setiap matriks nonsingular $\boldsymbol{M}$, sehingga diperoleh sebuah representasi *state space* baru:

$$V_{t+1} = A_1 V_t + G_1 a_{t+1} \tag{2.29}$$

dan

$$Z_t = H_1 V_t \tag{2.30}$$

dimana $A_1 = MAM^{-1}$, $G_1 = MG$, dan $H_1 = HM^{-1}$. Akan tetapi, berdasarkan representasi kanonik yang ditunjukkan pada Akaike (1976), tetap saja akan didapatkan sebuah solusi yang unik. Dalam representasi korelasi kanonik, vektor *state* adalah unik yang ditentukan berdasarkan analisis korelasi kanonik antara himpunan informasi saat ini dan observasi sebelumnya $(Z_n, Z_{n-1}, \dots,)$ dengan himpunan informasi saat ini dan nilai yang akan datang $(Z_n, Z_{n+1|n}, \dots,)$. Dalam model ARMA, karena fungsi peramalan akhirnya akan ditentukan oleh polinomial AR dan $(Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{n-p})$ berisi semua informasi yang diperlukan untuk nilai yang akan datang dari proses, maka analisis korelasi kanonik secara sederhana dilakukan antara data *space*:

$$D_n = \left(Z'_n, Z'_{n-1}, \dots, Z'_{n-p}\right)' \tag{2.31}$$

dan prediktor *space*:

$$F_n = \left(Z'_n, Z'_{n+1|n}, \dots, Z'_{n+p|n}\right)' \tag{2.32}$$

berdasarkan matriks block Hankel, kovarian antara $D_n = \left(Z'_n, Z'_{n-1}, \dots, Z'_{n-p}\right)'$ dengan $F_n = \left(Z'_n, Z'_{n+1|n}, \dots, Z'_{n+p|n}\right)'$ didefinisikan oleh:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1) & \cdots & \Gamma(p) \\ \Gamma(1) & \Gamma(2) & \cdots & \Gamma(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma(p) & \Gamma(p+1) & \cdots & \Gamma(2p) \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

dengan menggunakan sifat ekspektasi bersyarat, maka $Cov\left(Z_{n-i}, Z_{n+j|n}\right) = Cov(Z_{n-i}, Z_{n+j})$. Untuk model vektor ARMA secara umum, Akaike (1974a, 1976) menunjukkan bahwa dibawah asumsi nonsingularitas untuk $\Gamma(0)$, rank $\Gamma$ adalah sama dengan dimensi dari vektor *state* dan juga sama dengan jumlah korelasi kanonik yang tidak nol antara $D_n$ dan $F_n$.

Ketika model tidak diketahui, pemilihan untuk orde $p$ diperoleh dari uji kecocokan data yang optimal dari AR, yang seringkali berdasarkan pada nilai $AIC$ (*Akaike Information Criterion*). Untuk proses vektor, $AIC$ didefinisikan:

$$AIC = n \ln |\textstyle\sum_p| + 2pm^2 \tag{2.34}$$

dimana: $n$ : jumlah observasi,

$|\sum_p|$ : determinan kovarian matriks untuk inovasi atau barisan *white noise* pada uji kecocokan AR ($p$),

$m$ : dimensi dari vektor proses $Z_t$.

AR orde $p$ optimal dipilih ketika nilai AIC minimum. Jadi, analisis korelasi kanonik akan didasarkan pada matriks block Hankel dari kovarian sampel, yaitu:

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}(0) & \hat{\Gamma}(1) & \cdots & \hat{\Gamma}(p) \\ \hat{\Gamma}(1) & \hat{\Gamma}(2) & \cdots & \hat{\Gamma}(p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\Gamma}(p) & \hat{\Gamma}(p+1) & \cdots & \hat{\Gamma}(2p) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

dimana $\hat{\Gamma}(j), \quad j = 0, 1, \dots, 2p$ adalah matriks kovarian sampel yang didefiniskan:

$$\hat{\Gamma}(s) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-s}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+s} - \bar{Z}); \qquad s = 1, 2, \dots,$$

dimana $\bar{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ adalah rata-rata vaktor sampel.

Seperti pada bagian sebelumnya, beberapa komponen dari vektor prediksi $Z_{n+i|n}$ mungkin merupakan kombinasi linear dari komponen lainnya, sehingga analisis korelasi kanonik dilakukan antara semua komponen data *space*

$$D_n = \big[Z_1, Z_{2.n}, \dots, Z_{m,n}, Z_{1,n-1}, Z_{2,n-1}, \dots, Z_{m,n-1}, \dots, Z_{1,n-p}, Z_{2,n-p}, \dots, Z_{m,n-p}\big]' \tag{2.36}$$

dan komponen prediktor *space*

$$F_n = \big[Z_{1,n}, Z_{2.n}, \dots, Z_{m,n}, Z_{1,n+1|n}, Z_{2,n+1|n}, \dots, Z_{m,n+1|n}, \dots, Z_{1,n+p|n}, Z_{2,n+p|n}, \dots, Z_{m,n+p|n}\big]' \tag{2.37}$$

karena vektor *state* diketahui sebagai suatu subset dari prediktor *space*, sebuah urutan vektor *state* yang potensial $Y_n^j$ ditentukan berdasarkan analisis korelasi kanonik antara barisan $F_n^j$ (subset dari $F_n$) dengan data *space* $D_n$, yang didasarkan pada submatriks $\hat{\Gamma}^j$ yang terbentuk dari kolom $\hat{\Gamma}$, yang sesuai dengan komponen $D_n$ dan $F_n^j$.

Secara spesifik, karena korelasi kanonik antara $Z_n = \big[Z_1, Z_{2.n}, \dots, Z_{m,n}\big]'$ dan $D_n$ adalah $1, 1, \dots, 1$, jelas tidak sama dengan nol, maka vektor *state* adalah himpunan dari $Z_n$ dan subset pertama dari urutan $F_n^1$ yang merupakan himpunan dari $\big[Z_{1,n}, Z_{2.n}, \dots, Z_{m,n}, Z_{1,n+1|n}\big]'$. Jika korelasi kanonik yang terkecil dari $\hat{\Gamma}^1$ dianggap nol, maka kombinasi linear dari $F_n^1$ tidak berkorelasi dengan data *space* $D_n$.

Jadi, komponen $Z_{1,n+1|n}$ dan setiap $Z_{1,n+i|n}$ dikeluarkan dari pertimbangan untuk menjadi komponen pada vektor *state*. Jika nilai korelasi kanonik yang terkecil dianggap tidak sama dengan nol, maka $Z_{1,n+1|n}$ ditambahkan didalam vektor *state*. Barisan $F_n^j$ sekarang dapat digeneralisasi dengan menambahkannya pada vektor *state*. Komponen selanjutnya dari $F_n$ tidak dapat disamakan dengan komponen yang sebelumnya telah gagal dimasukkan kedalam vektor *state*.

Korelasi kanonik terkecil dari $\hat{\Gamma}^j$ dapat dihitung dan diuji signifikansinya. Jika nilai korelasi kanonik tersebut berbeda secara signifikan dengan nol maka komponen dimasukkan pada vektor *state*. Dan sebaliknya, jika nilai korelasi kanonik tersebut tidak berbeda secara signifikan dengan nol maka komponen dikeluarkan dari vektor *state* dan dikeluarkan dari pertimbangan selanjutnya. Pemilihan vektor *state* selesai ketika tidak ada lagi unsur dari $F_n$ yang dapat dimasukkan ke dalam vektor *State*.

Untuk masing-masing langkah dalam urutan analisis korelasi kanonik, signifikansi dari nilai korelasi kanonik yang terkecil ditandai dengan $\hat{\rho}_{min}$ didasarkan pada nilai $AIC$:

$$C = -n \ln(1 - \hat{\rho}_{min}^2) - 2[m(p+1) - q + 1] \tag{2.38}$$

dimana $q$ adalah dimensi dari $F_n^j$ pada tahap sekarang, jika $C \leq 0$, maka $\rho_{min}$ dianggap tidak berbeda secara signifikan dengan nol. Dan sebaliknya, jika $C > 0$ maka $\rho_{min}$ dianggap berbeda secara signifikan dengan nol **(Akaike, 1976)**.

Untuk menguji signifikasi korelasi kanonik dapat juga digunakan pendekatan uji $\chi^2$ dengan statistiknya:

$$\chi^2 = -\left(n - \frac{1}{2}[m(p+1) - q + 1]\right) \ln(1 - \hat{\rho}_{min}^2) \tag{2.39}$$

Sebuah pendekatan distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan $m(p+1)-q+1$, ditulis $\chi^2_{(m(p+1)-q+1)}$. Hipotesis yang harus diuji adalah:

$H_0$ : $\rho_{min}$ tidak berbeda secara signifikan dengan nol.

$H_1$ : $\rho_{min}$ berbeda secara signifikan dengan nol.

Dengan kriteria pengujian, tolak $H_0$ jika $\chi^2_{hitung} \geq \chi^2_{tabel}$ **(Bartlett, 1941)**.

### 2.4.7. Estimasi Parameter

Estimasi adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah perkiraan dari suatu parameter. Data yang digunakan untuk melakukan estimasi parameter populasi adalah statistik sampel sebagai estimator. Estimasi parameter adalah estimasi yang digunakan untuk menduga suatu populasi dari sampel **(Harinaldi, 2005).**

**Metode Maksimum Likelihood**

Metode maksimum likelihood adalah salah satu metode yang paling sering digunakan untuk mencari nilai estimasi dari suatu parameter. Fungsi densitas bersama variabel random $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang bernilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah $L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n;\ \theta)$ yang merupakan fungsi likelihood. Fungsi likelihood merupakan fungsi dari $\theta$ dan dilambangkan dengan $L(\theta)$.

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel random yang saling bebas stokastik independen (*iid*) dari $f(x;\ \theta)$; $\theta \in \Omega$, maka:

$$L(\theta) = f(x_i;\ \theta)$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n;\ \theta)$$

$$= f(x_1;\ \theta)\, f(x_2;\ \theta) \dots f(x_n;\ \theta)$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta) \tag{2.40}$$

Untuk hasil pengamatan $x_1, x_2, \dots, x_n$ nilai $\hat{\theta}$ berada dalam $\Omega(\hat{\theta} \in \Omega)$, dimana $L(\theta)$ maksimum yang disebut sebagai *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dari $\theta$. Jadi, $\hat{\theta}$ merupakan nilai duga dari $\theta$. Jika $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ ; $\theta \in \Omega$, maka untuk memperoleh nilai $\hat{\theta}$ tersebut $L(\theta)$ harus dimaksimumkan dengan cara derivatif berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = 0 \tag{2.41}$$

**(Hogg dan Craig, 1995)**.

## 2.5. Peramalan

Peramalan adalah proses perkiraan (pengukuran) besarnya atau jumlah sesuatu pada waktu yang akan datang berdasarkan data masa lampau yang dianalisis secara ilmiah khususnya menggunakan metode statistika **(Sudjana, 1989)**.

Untuk banyak investigasi data deret waktu, peramalan vektor *state* suatu observasi yang akan datang sangat penting. Pada bagian ini, akan menunjukkan bahwa *minimum mean square error forecasts* dapat diperoleh hanya dengan memperlakukan nilai yang akan datang dari pengamatan yang hilang dan menggunakan teknik dari bagian akhir.

Misalkan terdapat pengamatan vektor $y_1, \dots, y_n$ dengan model *state space:*

$$y_t = Z_t a_t + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, H_t),$$

$$a_{t+1} = T_t a_t + R_t \eta_t, \qquad \eta_t \sim N(0, Q_t), \qquad t = 1, \dots, n,$$

$$a_t \sim N(a_1, P_1), \tag{2.42}$$

dan akan dilakukan peramalan $y_{n+j}$ untuk $j = 1, \dots, J$ dimana penduga $\bar{y}_{n+j}$ yang memiliki matriks kuadrat tengah galat minimum diberikan $Y_n$ yaitu $\bar{F}_{n+j}$ dimana $\bar{F}_{n+j} = E\left[(\bar{y}_{n+j} - y_{n+j})(\bar{y}_{n+j} - y_{n+j})' \middle| Y_n\right]$ adalah minimal di matriks untuk semua perkiraan $y_{n+j}$.

Jika $x$ adalah vektor acak dengan mean $\mu$ dan matriks varians yang terbatas, maka nilai dari vektor konstan $\lambda$ yang meminimalkan $E[(\lambda - x)(\lambda - x)']$ adalah $\lambda = \mu$. Dengan demikian *minimum mean square error forecast* $y_{n+j}$ yang diberikan $Y_n$ adalah mean bersyarat $\bar{y}_{n+j} = E(Y_{n+j} | Y_n)$.

Untuk $j = 1$ peramalannya sangat mudah. Dengan $y_{n+1} = Z_{n+1} a_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$ sehingga:

$$\bar{y}_{n+1} = Z_{n+1} E(a_{n+1} | Y_n) \tag{2.43}$$

$$= Z_{n+1} a_{n+1},$$

dengan $a_{n+1}$ adalah:

$$a_{n+1} = T_t a_{t|t} \tag{2.44}$$

$$= T_t a_t + K_t V_t,$$

Dimana $a_{n+1}$ dihasilkan oleh Kalman Filter. Matriks *conditional mean square*

$$\bar{F}_{n+1} = E\left[\left(\bar{y}_{n+j} - y_{n+j}\right)\left(\bar{y}_{n+j} - y_{n+j}\right)'\middle| Y_n\right] \tag{2.45}$$

$$= Z_{n+1}P_{n+1}Z'_{n+1} + H_{n+1},$$

dihasilkan dari Kalman Filter relation berikut:

$$F_t = Var(v_t|Y_{t-1}) = Var(Z_t a_t + \varepsilon_t - Z_t a_t|Y_{t-1}) = Z_t P_t Z'_t + H_t. \tag{2.46}$$

Dari hal tersebut dapat menghasilkan peramalan $\bar{y}_{n+j}$ untuk $j = 2, \dots, J$ hanya dengan memperlakukan $y_{n+1}, \dots, y_{n+J}$ sebagai nilai yang hilang. Misalkan $\bar{a}_{n+j} = E\left(a_{n+j}\middle|Y_n\right)$ dan $\bar{P}_{n+j} = E\left[\left(\bar{a}_{n+j} - a_{n+j}\right)\left(\bar{a}_{n+j} - a_{n+j}\right)'\middle| Y_n\right]$. Karena $y_{n+j} = Z_{n+j}a_{n+j} + \varepsilon_{n+j}$ diperoleh:

$$\bar{y}_{n+j} = Z_{n+j}E\left(a_{n+j}\middle|Y_n\right) \tag{2.47}$$

$$= Z_{n+j}\bar{a}_{n+j}$$

dengan matriks *conditional mean square error*:

$$\bar{F}_{n+j} = E\left[\left\{Z_{n+j}\left(\bar{a}_{n+j} - a_{n+j}\right) - \varepsilon_{n+j}\right\}\left\{Z_{n+j}\left(\bar{a}_{n+j} - a_{n+j}\right) - \varepsilon_{n+j}\right\}'\middle| Y_n\right]$$

$$= Z_{n+j}\bar{P}_{n+j}Z'_{n+j} + H_{n+j}. \tag{2.48}$$

Sekarang didapatlah cara untuk menghitung $\bar{a}_{n+j}$ dan $\bar{P}_{n+j}$. Diperoleh $a_{n+j+1} = T_{n+j}a_{n+j} + R_{n+j}\eta_{n+j}$ sehingga:

$$\bar{a}_{n+j+1} = T_{n+j}E\left(a_{n+j}\middle|Y_n\right) \tag{2.49}$$

$$= T_{n+j}\bar{a}_{n+j},$$

Untuk $j = 1, \dots, J-1$ dan dengan $\bar{a}_{n+j} = a_{n+j}$, didapat pula:

$$\bar{P}_{n+j+1} = E\left[\left(\bar{a}_{n+j+1} - a_{n+j+1}\right)\left(\bar{a}_{n+j+1} - a_{n+j+1}\right)'\middle| Y_n\right] \tag{2.50}$$

$$= T_{n+j}E\left[\left(\bar{a}_{n+j} - a_{n+j}\right)\left(\bar{a}_{n+j} - a_{n+j}\right)'\middle| Y_n\right]T'_{n+j}$$

$$+R_{n+j}E\left[\eta_{n+j}\eta'_{n+j}\right]R'_{n+j}$$

$$= T_{n+j}\bar{P}_{n+j}T'_{n+j} + R_{n+j}Q_{n+j}R'_{n+j},$$

untuk $j = 1, \dots, j-1$.

Dari perhitungan di atas, Jika diambil nilai $Z_{n+j} = 0$ untuk $j = 1, \dots, j-1$ maka $\bar{a}_{n+j}$ dan $\bar{P}_{n+j}$ dapat dicari dengan cara yang sama dengan cara untuk mencari $a_{n+j}$ dan $P_{n+j}$ dari Kalman Filter:

$$v_t = y_t - Z_t a_t, \qquad F_t = Z_t P_t Z'_t + H_t, \tag{2.51}$$

$$a_{t|t} = a_t + P_t Z'_t F_t^{-1} v_t, \qquad P_{t|t} = P_t - P_t Z'_t F_t^{-1} Z_t P_t,$$

$$a_{t+1} = T_t a_t + K_t v_t, \qquad P_{t+1} = T_t P_t (T_t - K_t Z_t)' + R_t Q_t R'_t,$$

untuk $t = 1, \dots, n$, dimana $K_t = T_t P_t Z'_t F_t^{-1}$ dengan $a_1$ dan $P_1$ merupakan vektor mean dan matriks varians dari vektor inisial *state* $\alpha_1$

**(Durbin dan Koopman, 2012)**.

### 2.5.1. Selang Kepercayaan

Dengan asumsi kenormalan, maka dapat dibentuk selang kepercayaan untuk setiap komponen *state*. Selang kepercayaan 95% dihitung dengan:

$$\alpha_t \pm 1{,}96\sqrt{P_t} \tag{2.52}$$

dimana $\alpha_t$ dan $P_t$ adalah komponen *state* dan varian dari *state*

**(Commandeur dan Koopman, 2007)**.

### 2.5.2. Ketepatan Peramalan

Salah satu ukuran ketepatan peramalan yang seringkali dipergunakan adalah MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) yang didapat melalui perhitungan:

$$\text{MAPE} = \frac{100}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|y_t - \hat{y}_t|}{|y_t|} \tag{2.53}$$

**(Pelagatti, 2016)**.

# III. METODOLOGI PENELITIAN

## 3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2017/2018, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

## 3.2. Data Penelitian

Data yang digunakan diperoleh dari http://www.bi.go.id/id/statistik/sekda/ tentang Simpanan Daerah Provinsi Lampung, Provinsi Bengkulu, dan Provinsi Sumatra Selatan. Adapun Simpanan Daerah didalamnya terdapat simpanan berjangka, giro, dan tabungan. Selain itu, data penelitian yang digunakan yaitu data bulanan dari bulan Januari 2010 sampai dengan bulan Desember 2016 sebanyak 84 observasi. Untuk menganalisis data, dilakukan dengan bantuan software SAS 9.4 dan MATLAB 16.

## 3.3. Metode Penelitian

Adapun metode penelitian dalam melakukan analisis data menggunakan metode *Multivariate State Space* metode Akaike adalah sebagai berikut:

A. Melihat kestasioneran data terhadap mean dengan menggunakan plot data dan uji Augmented Dickey Fuller (ADF).Melakukan pembedaan (*differencing*) apabila data belum stasioner dalam mean.

B. Menganalisis Autoregresif awal.

   1. Menentukan model autoregresif yang tepat dengan menggunakan nilai Akaike's Information Criterion (AIC) yang terkecil.
   2. Menganalisis nilai matriks autokovarian dalam fase korelasi kanonik.
   3. Mengindikasi elemen dari matriks autokovarian menggunakan representasi skematik.
   4. Mencari nilai matriks koefisien dari model autoregresif disetiap lag dengan menggunakan estimasi Yule-Walker.

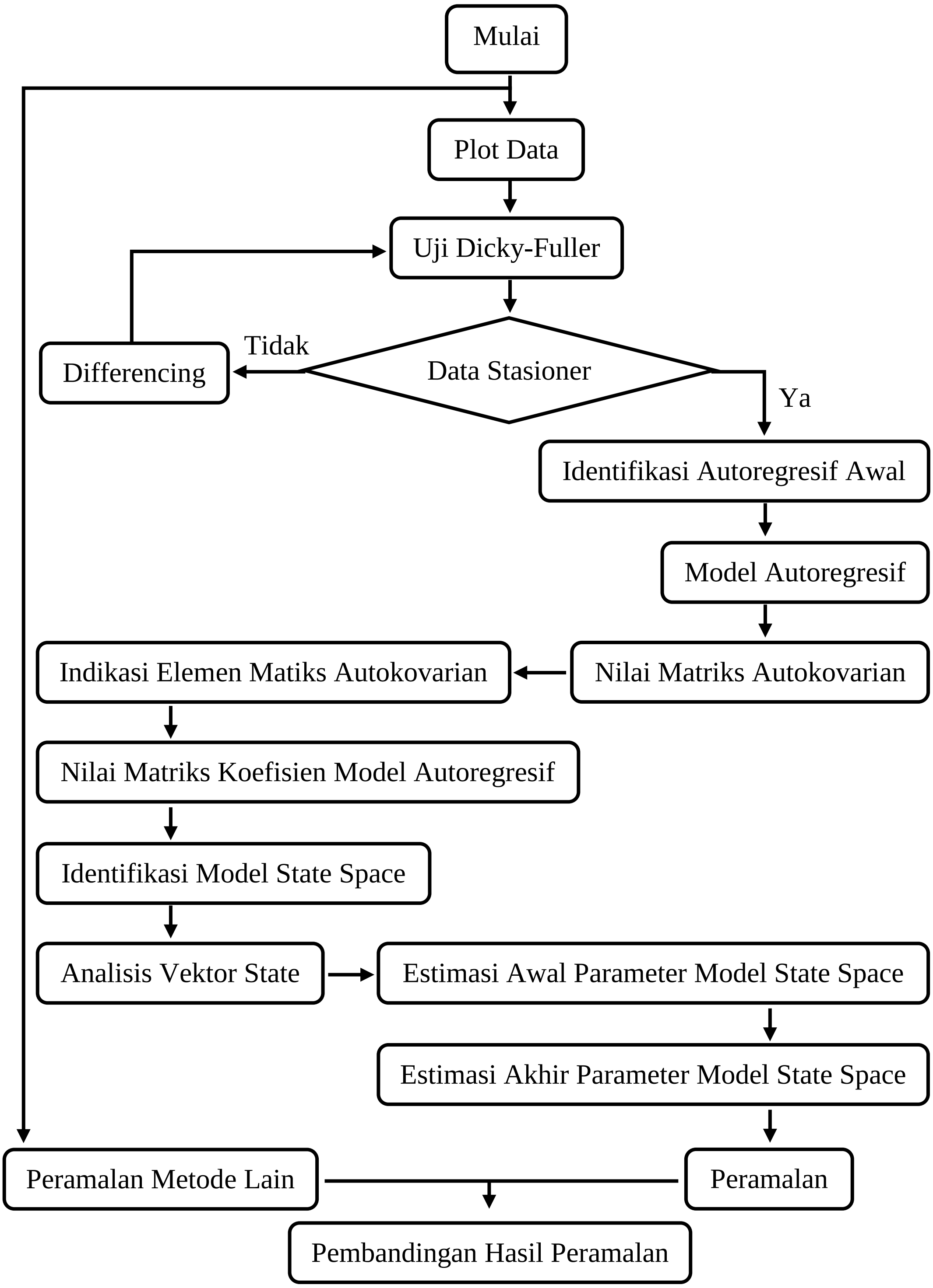
C. Memilih model State Space dan pendugaan awal.

   1. Memilih vektor *state* menggunakan analisis korelasi kanonik.
   2. Mengestimasi parameter dengan menggunakan maximum likelihood.
   3. Membentuk estimasi awal dari parameter model *state space* dengan menggunakan informasi dari analisis korelasi kanonik dan autoregresif awal.

D. Melakukan estimasi model *state space* dengan menggunakan maximum likelihood yang akan menghasilkan estimasi akhir dari model *state space*.

E. Melakukan peramalan data Simpanan Daerah Provinsi Lampung, Provinsi Bengkulu, dan Provinsi Sumatra Selatan dengan menggunakan teknik Kalman Filter yang sesuai dengan model *state space*.

### 3.4. Diagram Alir Representasi *Multivariate State Space* Metode Akaike




Gambar 3.1. Diagram Alir

# V. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian mengenai representasi *Multivariate State Space* metode Akaike terhadap data *multivariate stationary time series* serta aplikasinya dalam analisis simpanan daerah Provinsi Lampung, Provinsi Bengkulu, dan Provinsi Sumatra Selatan, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Perkiraan parameter $\mathrm{F}$, $\mathrm{G}$, dan $\sum_{\mathrm{e}}$ pada model *state space* dengan metode *Maximum Likelihood* diperoleh

$$\hat{\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.05176 & 0 & 0.011362 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.049747 \\ 0 & 0.529734 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.12994 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\widehat{\textstyle\sum_{\mathrm{e}}} = \begin{bmatrix} 2.522\mathrm{E}11 & 7.608\mathrm{E}10 & 3.147\mathrm{E}11 \\ 7.608\mathrm{E}10 & 5.961\mathrm{E}10 & 6.345\mathrm{E}10 \\ 3.147\mathrm{E}11 & 6.345\mathrm{E}10 & 1.404\mathrm{E}12 \end{bmatrix}.$$

2. Model state space menggunakan *multivariate state space* metode Akaike yang diperoleh dari data Simpanan Daerah Provinsi Lampung, Provinsi Bengkulu, dan Provinsi Sumatra Selatan periode Januari 2010 hingga Desember 2016 yaitu:

$$\begin{bmatrix} \text{Lampung}_{t+1|t+1} \\ \text{Bengkulu}_{t+1|t+1} \\ \text{SumSel}_{t+1|t+1} \\ \text{Lampung}_{t+2|t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.05176 & 0 & 0.011362 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.049747 \\ 0 & 0.529734 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{Lampung}_{t} \\ \text{Bengkulu}_{t} \\ \text{SumSel}_{t} \\ \text{Lampung}_{t+1|t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.12994 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{t+1} \\ \eta_{t+1} \\ \epsilon_{t+1} \end{bmatrix}$$

dengan $Var \begin{bmatrix} e_{t+1} \\ \eta_{t+1} \\ \epsilon_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.522\text{E}11 & 7.608\text{E}10 & 3.147\text{E}11 \\ 7.608\text{E}10 & 5.961\text{E}10 & 6.345\text{E}10 \\ 3.147\text{E}11 & 6.345\text{E}10 & 1.404\text{E}12 \end{bmatrix}$

3. Hasil peramalan dengan model state space pada data Simpanan Daerah Provinsi Lampung, Provinsi Bengkulu, dan Provinsi Sumatra Selatan periode Januari 2017 hingga Juli 2017 adalah:

| Bulan | Peramalan | | |
|---|---|---|---|
| | Lampung | Bengkulu | SumSel |
| Januari 2017 | 40101702 | 10801313 | 62773964 |
| Februari 2017 | 40109493 | 10871100 | 62819768 |
| Maret 2017 | 40405769 | 10933528 | 63168410 |
| April 2017 | 40691404 | 11014329 | 63505881 |
| Mei 2017 | 40973141 | 11094452 | 63839261 |
| Juni 2017 | 41264611 | 11174327 | 64182857 |
| Juli 2017 | 41555722 | 11254822 | 64526076 |

# DAFTAR PUSTAKA

Akaike, H. 1974. “Markovarian Representation of Stochastic Processes and Its Application to the Analysis of Autoregressive Moving Average Processes.” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 26:363–387.

Akaike, H. 1976. “Canonical Correlations Analysis of Time Series and the Use of an Information Criterion.” In *System Identification: Advances and Case Studies*, edited by R. Mehra and D. G. Lainiotis, 27–96. New York: Academic Press.

Brockwell, P. J., dan Davis, R. A. 2002. *Introduction to Time Series and Forcasting*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag.

Casella, G., dan Berger, R. L. 1990. *Statistical Inference*. California: Wadsworth and Brooks/Cole.

Commandeur, J. Dan S. J. Koopman. 2007. *An Introduction to State Space Time Series Analysis*. Oxford: Oxford University Press.

Durbin, J., dan Koopman, S. J. 2012. *Time Series Analysis by State Space Methods*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press.

Fuller, W. 1996. *Introduction to Statistical Time* Series. John Wiley, New York.

Harinaldi, M.Eng. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik Untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Erlangga.

Hogg, R. V., dan Craig, A. T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. 5th ed. Prentice-Hall, Inc.

Montgomery, D., Jennings, C., dan Kulahci, M. 2008. *Introduction to Time Series Analysis and Forcasting*. New York: John Wiley and Sons Interscience Publication.

Nachrowi, D., dan Hardius, U. 2006. *Pendekatan Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Pankratz, A. 1991. *Forcasting with Dynamic Regression Models*. Canada: Willery Intersciences Publication.

Pelagati, M. M. 2016. *Time Series with Unobserved Components*. Boca Raton: CRC Press.

Rencher, A. C. 2002. *Methods of Multivariate Analysis.* 2nd ed. New York: A John Wiley & Sons, Inc. Publication.

SAS Institute. 2016. *SAS/ETS® 14.2 User's Guide*. United States of America: SAS Institute, Inc.

Wei, W. W. S. 1964. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods.* New York: Addison-Wesley.

Wei, W. W. S. 2006. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods.* 2nd ed. New York: Pearson Education.