RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_2)$

(Skripsi)

Oleh

YOUNG ENJANG YUNAHAR MS.JIA

1317031089

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2018

ABSTRAK

RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_2)$

Oleh

YOUNG ENJANG YUNAHAR MS.JIA

Ruang barisan adalah salah satu konsep dalam analisis, membahas tentang barisan dengan karakteristik tertentu salah satunya adalah ruang barisan l_∞. Beberapa penelitian sebelumnya telah membuktikan bahwa ruang tersebut merupakan ruang Banach, Solid, dan BK. Berdasarkan penelitian tersebut skripsi ini akan membahas tentang ruang barisan $l_\infty(\Delta)$, dan $l_\infty(\Delta_2)$, adalah ruang linier, ruang Banach, Solid, dan merupakan ruang BK.

Kata Kunci : Ruang Barisan, Ruang Norm, Ruang Banach.

ABSTRACT

DIFFERENCE SEQUENCS SPACE $l_\infty(\Delta_2)$

By

YOUNG ENJANG YUNAHAR MS.JIA

Sequences space as one concept of analysis, discuss about sequences with spesific characteristics for example l_∞. Some of the previous research has proved that l_∞ are Banach space, solid and BK space. Based on the research this essay will discuss about of sequences space $l_\infty(\Delta)$, and $l_\infty(\Delta_2)$, which then can be proved as Linier space, Banach space, solid and BK space.

Keyword : Sequences space, Norm space, Banach space.

RUANG BARISAN SELISIH $\boldsymbol{l_\infty(\Delta_2)}$

Oleh

YOUNG ENJANG YUNAHAR MS.JIA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_2)$**

Nama Mahasiswa : *Young Enjang Yunahar MSJIA*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031089

Program Studi : *Matematika*

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP. 19720227 199802 1 001

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19610128 198811 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing: **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **27 Juli 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Young Enjang Yunahar MS.JIA**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1317031089**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_2)$**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27 Juli 2018

Yang Menyatakan

Young Enjang Yunaar MS.JIA

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Young Enjang Yunahar MS.JIA, anak pertama dari tiga bersaudara. Dilahirkan di Seputih Mataram, Lampung Tengah 05 Juli 1995 oleh pasangan Paiman dan Karmi. Tinggal di perumahan *Housing* 1 F199 PT.GPM, Kecamatan Seputih Mataram, Lampung Tengah.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SDS 01 Gula Putih Mataram pada tahun 2000 dan lulus pada 2006. Kemudian melanjutkan pendidikan di Sekolah menengah Pertama SMP Gula Putih Mataram pada tahun 2006 dan lulus pada tahun 2009. Dan melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Atas di *Sugar Group High School* pada tahun 2010 dan lulus pada tahun 2013.

Pada tahun 2013 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung, melalui jalur test SBMPTN.

Pada tahun 2016 melaksanakan Kuliah Praktik (KP) di Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional (BKKbN) Bandar Lampung dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2017 di desa Surabaya Ilir kecamatan Bandar Surabaya, Lampung Tengah.

KATA INSPIRASI

“ Jangan biarkan kesulitan membuatmu gelisah, karena bagaimanapun juga hanya di malam yang paling gelaplah bintang – bintang tampak bersinar lebih terang”

(Ali bin Abi Thalib)

“ Barang siapa yang menempuh jalan menuntut ilmu, niscaya Allah subhanahu wata’ala akan memudahkan baginya jalan menuju surga”

(H.R Muslim)

“Baraang siapa yang meninggalkan sesuatu karena Allah, maka Allah akan memberinya ganti yang lebih baik”

(H.R Muslim)

“Impossible hanyalah sebua kata, selama kita yakin jadikanlah kata itu menjadi i am Possible”

(Young Enjang Yunahar)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah irabbil'alamin

Dengan kerendaan hati dan rasa bersukur kepada Alla SWT

Kupersembakan kara ini kepada :

Orang tua tercinta Bapak Paiman dan Ibu Karmi atas doa, dukungan dan kasi sayang yang terus diberikan serta kerja keras dan keingan ang di curahkan untuk merawat, membesarkan, menyekolakan, penulis hingga sekarang. Serta Adik – adik Cinta Anggun Larasat, dan Chindi Aulia Agustin, yang terus memberikan semangat dan kasih sayang.

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mensuport, menolong, memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia.

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. karena atas rahmat dan ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi “Ruang Barisan Selisih $l_\infty(\Delta_2)$ ”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terimakasih banyak kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Sc. selaku Dosen Pembimbing I, terimakasih untuk bimbingan dan kesediaan waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing II, terimakasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si, M.Si. selaku Dosen Penguji, terimakasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.,selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ayah, Ibu, Chinta, dan Chindi tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Untuk sahabat - sahabat sampah kontrakan yang telah memberikan semangat dan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Untuk sahabat Pejuang Skripsi, Mel, Anitha, Bayu yang telah memberikan semangat, motivasi dan waktu kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi.
11. Rihmit *and the genk* yang telah memberikan waktu , motivasi, dan tempat untuk penulis menyelesaikan skripsi
12. Dewi, Uli, Nur, Dona, Winda, Chandro, dan teman – teman kos Angan Saka yang terus memberikan motivasi untuk penulis menyelesaikan skripsi.
13. Sahabat-sahabat seperjuangan tersayang, Matematika 2013 yang banyak membantu dan sabar menghadapi penulis.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.
15. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 27 Juli 2018
Penulis

Young Enjang Yunahar MS.JIA

DAFTAR ISI

DAFTAR PUSTAKA

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika sebagai salah satu ilmu pasti memiliki peranan penting dalam perkembangan maupun kemajuan sains dan teknologi. Beberapa teori pemikiran ahli matematika digunakan sebagai dasar pemikiran pengambilan keputusan, dan sebagai bahan pertimbangan. Oleh karena itu, perkembangan ilmu matematika sangat dibutuhkan.

Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis, yang salah satu topik didalamnya membahas tentang konsep ruang barisan. Ruang barisan merupakan ruang linier yang didalamnya atau beranggotakan barisan – barisan dengan karakteristik tertentu, yang diantaranya adalah $l_{\infty,}\mathrm{c}, \mathrm{c}_0,$ dan l_p. Salah satu pakar matematika H. Kizmas (1981) yang meneliti syarat yang diperlukan oleh suatu matriks tak terhingga dari ruang barisan ke ruang barisan. Kemudian dasar pemikiran tersebut digunakan oleh Colak R. (1995), beliau menambahkan sebuah kondisi kedalam ruang barisan tersebut sehingga menjadi ruang barisan $l_\infty(\Delta)$, $\mathrm{c}(\Delta), \mathrm{c}_0(\Delta)$, dan $l_p(\Delta)$. Kemudian dikaji kondisi dan syarat yang diperlukan. Selanjutnya dikembangkan kembali oleh Hery S. (2013), di dalam tesisnya beliau membahas tentang perbedaan urutan ruang barisan $l_\infty(\Delta_m), \mathrm{c}(\Delta_m), \mathrm{c}_0(\Delta_m)$, dan $l_p(\Delta_m)$, sifat – sifat dan kondisi yang diperlukan ke dalam ruang barisan tersebut, dan mengkaji perbedaan antara selisih ruang barisan tersebut.

Dari pemikiran di atas penulis mencoba mengkaji lebih dalam tentang salah satu ruang barisan, yaitu barisan $l_\infty(\Delta_2)$.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini diantaranya

1. Mengkaji dan mempelajari sifat ruang barisan l_∞.
2. Mengkaji dan mempelajari sifat ruang barisan selisih $l_\infty(\Delta)$.
3. Mengkaji dan mempelajari sifat ruang barisan selisih $l_\infty(\Delta_2)$.

1.3 Manfaat penelitian

Adapun manfaat dilakukannya penelitian ini diantaranya

1. Memahami sifat - sifat pada ruang barisan l_∞.
2. Memahami sifat - sifat pada ruang barisan selisih $l_\infty(\Delta)$.
3. Memahami sifat - sifat pada ruang barisan selisih $l_\infty(\Delta_2)$.
4. Dapat memberi ide bagi penulis lain untuk meneliti lebih lanjut ruang barisan selisih.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Barisan

Definisi 2.1.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ yang bersesuaian dengan bilangan real $x^{(n)}$ tertentu, maka $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ dikatakan barisan. (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Definisi 2.1.2

Bilangan – bilangan $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}, \ldots, c^{(n)}$ disebut barisan bilangan tak hingga $c^{(n)}$disebut suku umum dari barisan. Bilangan $n, (n = 1, 2, 3, \ldots)$ adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Definisi 2.1.3

Misal L adalah suatu bilangan real dan $\{\tilde{x}^{(i)}\}$ suatu barisan, $\{\tilde{x}^{(i)}\}$ konvergen ke L

jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli $\mathbb{N}$, sehingga $\left|\tilde{x}^{(i)} - L\right| < \varepsilon$ untuk setiap $i > N$

Suatu bilangan L dikatakan limit dari suatu barisan tak hingga $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ jika ada bilangan real positif ε sehingga dapat ditemukan bilangan asli $\mathbb{N}$ yang tergantung pada ε sehingga $\left|\tilde{x}^{(i)} - L\right| < \varepsilon$ untuk setiap $i > N$, dan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit. (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Teorema 2.1.4

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas. (Martono, 1984)

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real $\{a^{(i)}\}$ konvergen ke a, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehinga $\left|a^{(i)}\right| \leq M$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Karena $\{a^{(i)}\}$ konvergen ke a, maka terdapat suatu $n_0 \in N$ sehingga $i > i_0 \Longrightarrow \left|a^{(i)} - a\right| < 1$. Akibatnya $\left|a^{(i)}\right| = \left|a^{(i)} - a + a\right| \leq \left|a^{(i)} - a\right| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $i > n_0$. Ambillah $M = maks\left(\left|a^{(1)}\right|, \left|a^{(2)}\right|, \ldots, \left|x^{(i_0)}\right|, |a| + 1\right)$, maka setiap $i \in M$ berlaku $\left|a^{(i)}\right| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a^{(i)}\}$ terbatas.

Definisi 2.1.5

Suatu barisan $\tilde{x} = (\tilde{x}^{(i)})$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $\left|x^{(i)}\right| \leq M \; \forall i \in \mathbb{N}$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞ . (Maddox, 1970)

Definisi 2.1.6

Suatu barisan $\{x^{(i)}\}$ dikatakan mempunyai limit L bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks n_0 sedemikian sehingga untuk $i \geq i_0$ berlaku $L - \varepsilon < \tilde{x}^{(i)} < L + \varepsilon$ (atau $\left|x^{(i)} - L\right| < \varepsilon$) artinya jika L adalah limit dari $\{\tilde{x}^{(i)}\}$ maka $\tilde{x}^{(i)}$ mendekati L jika *i* mendekati takhingga. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Definisi 2.1.7

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen. (Martono, 1984)

Definisi 2.1.8

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*. (Soeparna, 2007)

jadi :

$$\omega = \left\{\bar{x} = \left\{x^{(i)}\right\}: x^{(i)} \in \mathbb{R}\right\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{x \in \left\{x^{(i)}\right\} \in \omega: \sum_{i=1}^{\infty} \left|x^{(i)}\right|^p < \infty\right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|x^{(i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{\bar{x} = \{x^{(i)}\} \in \omega : \sup_{i\geq 1}\left|x^{(i)}\right| < \infty\right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\geq 1}\left|x^{(i)}\right|.$$

Definisi 2.1.9

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l^p$ dan $y \in l^p$

$$\left(x^{(i)}y^{(i)}\right)_{i\in N} \in l^\infty \text{dan } \sum_{i=1}^{\infty}\left|x^{(i)}y\right| \leq \|x\|^p\|y\|^q.$$

(Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.1.10

$l^p(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$. (Darmawijaya, 2007)

Bukti :

Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_n\}, \tilde{y} = \{y_n\} \in l^p$ dan skalar α.

Diperoleh :

a) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $\left|x^{(i)}\right| \geq 0$ untuk setiap i.

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \left|x^{(i)}\right| \geq 0 \text{ untuk setiap } i \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

b) $\|\alpha\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\alpha x^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\alpha x^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_\infty < \infty$

c) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \left|\alpha x^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \left|\alpha x^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan a), b) dan c) terbukti bahwa l^p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l^p. Dengan kata lain $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ ruang bernorm.

Teorema 2.1.11

Jika bilangan *real* p dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ merupakan Ruang Banach. (Darmawijaya, 2007)

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ merupakan ruang bernorma, langkah selanjutnya adalah membuktikan bahwa ruang bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p \leq \infty$ diambil sebarang barisan Cauchy $\{\tilde{x}_n\} \subset l^p$ dengan

$$\tilde{x}_n = \left\{\tilde{x}_n{}^{(i)}\right\} = \left(\tilde{x}_1{}^{(i)}, \tilde{x}_2{}^{(i)}, \tilde{x}_3{}^{(i)}, \ldots\right) \tag{1}$$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_p < \frac{\varepsilon}{4} \text{atau } \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p \tag{2}$$

Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli $m, n > 0$ diperoleh $\left|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap i. Dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $(\tilde{x}_n^{(i)})$ untuk setiap *n*.

Jadi terdapat bilangan $(\tilde{x}^{(i)})$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n^{(i)} = \tilde{x}^{(i)} \text{ atau } \lim_{n\to\infty} \left|\tilde{x}_n^{(i)} - \tilde{x}^{(i)}\right| = 0.$$

Berdasarkan (2) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

$$\left|\tilde{x}_n^{(i)} - x^{(i)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\tilde{x}_n^{(i)} - \tilde{x}^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Selanjutnya dibentuk barisan $\tilde{x} = \left\{\tilde{x}^{(i)}\right\}$. Menurut ketidaksamaan Minkowski.

a) $\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{x}^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{x}^{(i)} - \tilde{x}_n^{(i)} + \tilde{x}_n^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{x}_n^{(i)} - \tilde{x}_n^{(i)} + \tilde{x}_n^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{x}_n^{(i)} - \tilde{x}_n^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\tilde{x}_n^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Yang berarti $\tilde{x} = \left\{\tilde{x}^{(i)}\right\} \in l^p$. Berdasarkan pertidaksamaan (1) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

b) $\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$

Maka barisan $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\}$ konvergen ke $\tilde{x}$. Berdasarkan hasil a) dan b), terbukti bahwa barisan Cauchy $\left\{\tilde{x}^{(i)}\right\} \subset l^p$ konvergen ke $\tilde{x} = \left\{\tilde{x}^{(i)}\right\} \in l^p$ atau terbukti bahwa $\left(l^p, \|.\|_p\right)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang Banach.

Definisi 2.1.12

Misalkan X merupakan ruang barisan, X dikatakan ruang BK (Banach lengkap) jika X merupakan ruang Banach dan pemetaan koordinatnya $p^{(i)}(x) = \tilde{x}^{(i)}, \tilde{x} = (\tilde{x}^{(i)}) \in X$ kontinu. (Ruckle, 1991)

Contoh ruang BK (banach lengkap) adalah ruang barisan l^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Definisi 2.1.13

Misalkan X merupakan ruang barisan, X dikatakan solid (normal) jika untuk sebarang bilangan skalar $\{\alpha^n\}$ dengan $|\alpha^n| \leq 1$ diperoleh barisan $\{\alpha^n x^n\} \in X$. (Suharna, 2013)

Definisi 2.1.14

Ruang barisan, Himpunan dari barisan bilangan yang memiliki syarat

$$l_\infty = \left\{\tilde{x} = \left(\tilde{x}^{(i)}\right) \in X : \sup_{i\geq 1}\left|\tilde{x}^{(i)}\right| < \infty\right\}$$

l_∞ koleksi barisan bilangan yang $\sup_{i\geq 1}\left|\tilde{x}^{(i)}\right| < \infty$.

$$l_\infty(\Delta) = \{\tilde{x} = \left(\tilde{x}^{(i)}\right): \Delta\tilde{x} \in l_\infty\}$$

$l_\infty(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta\tilde{x} \in l_\infty$

$$l_\infty(\Delta_2) = \{\tilde{x} = \left(\tilde{x}^{(i)}\right): \Delta_2\tilde{x} \in l_\infty\}$$

$l_\infty(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_2 x \in l_\infty$

(H.Kizmaz,1981)

2.2. Ruang Bernorm

Definisi 2.2.1

Diberikan ruang linear X. Fungsi $x \in X \to \|x\| \in R$ yang mempunyai sifat – sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$

ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan non-negatif $\|x\|$ disebut norma vektor x. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui. (Darmawijaya, 2007)

Lemma 2.2.1

Dalam ruang linear bernorma X berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$. (Maddox, 1970)

Bukti : untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|.$$

Definisi 2.2.2

Setiap ruang bernorm $(X, \| . \|)$ merupakan metriks terhadap metriks

$$d(x,y) = \| x - y\|, \text{ untuk setiap } x, y \in X$$

berdasarkan teorema di atas, setiap ruang bernorm merupakan ruang metriks, maka semua konsep, pengertian, sifat – sifat, serta teorema – teorema yang berlaku di ruang metriks berlaku juga pada ruang bernorma dengan pengertian

$$d(x,y) = \| x – y \|$$

(Gozali, 2009).

Definisi 2.2.3

Barisan $\{x^{(i)}\}$ di dalam ruang bernorma X dikatakan **konvergen** (*convergent*) jika ada $x \in X$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 (bergantung pada ε), sehingga untuk setiap bilangan asli $i \geq n_0$ berlaku.

$$\left\|x^{(i)} - x\right\| < \varepsilon$$

Jika demikian halnya, dikatakan barisan $\{x^{(i)}\}$ konvergen ke x atau barisan $\{x^{(i)}\}$ mempunyai limit x untuk i → ∞ dan ditulis dengan

$$\lim_{i \to \infty} \left\|x^{(i)} - x\right\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis dengan $\lim_{i \to \infty} x^{(i)} = x$. Sedangkan titik x disebut titik limit barisan $\{x^{(i)}\}$. (Gozali, 2009)

Definisi 2.2.4

Barisan $\{x^{(i)}\}$ di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ disebut barisan Cauchy atau **barisan fundamental** jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0, sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m,n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. (Robert and Ronald, 2000)

Teorema 2.2.5

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorma X, merupakan barisan Chaucy. (Robert and Ronald, 2000)

Definisi 2.2.6

Ruang bernorma dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. (Robert and Ronald, 2000)

Definisi 2.2.7 Ruang Banach

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metriks yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorma *X* berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di *X* adalah konvergen. (Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.2.8 (**Ketaksamaan Ho'lder**)

$i.$ Untuk setiap $\tilde{x} = \{x^{(i)}\} \in \ell^1$ dan $\tilde{y} = \{x^{(i)}\} \in \ell^\infty$ benar bahwa

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)}y^{(i)}\right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|x^{(i)}y^{(i)}\right| \leq \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

dengan $\|\tilde{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|x^{(i)}\right|$ dan $\|\bar{y}\| = \sup_{i\geq 1} |y^{(i)}|$

$ii.$ Jika $1 < p,q < \infty\, dan\, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, maka, untuk setiap $\tilde{x} = \left\{x^{(i)}\right\} \in \ell_p$, dan $\tilde{y} = \{y^{(i)}\} \in \ell_p$ benar bahwa

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)}y^{(i)}\right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|x^{(i)}y^{(i)}\right| \leq \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

dengan $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|x^{(i)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ dan $\|\tilde{y}\|_q = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|y^{(i)}\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$

(Robert and Ronald, 2000).

Teorema 2.2.9 (Ketaksamaan Minkowski)

Jika $1 \leq p \leq \infty$ maka untuk setiap $\tilde{x} = \{x^{(i)}\}, \tilde{y} = \{y^{(i)}\}\, \ell_p$ benar bahwa

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

(Robert and Ronald, 2000).

2.3 Operator Linear dan Kontinu

Definisi 2.3.1

Operator adalah fungsi linear dan kontinu, dan biasanya ditulis dengan huruf kapital: A, B, C… . Fungsi dari suatu ruang bernorma ke ruang bernorma yang haruslah dari dua ruang bernorma atas lapangan yang sama yaitu $\mathbb{C}\ atau\ \mathbb{R}$. (Berberian, 1961)

Definisi 2.3.2

Diberikan ruang bernorma X dan Y. Fungsi $f : X \to Y$ dikatakan linear, jika $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap $x, y \in X$. (Berberian, 1961)

Definisi 2.3.3

Diberikan ruang bernorma $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$. Fungsi $f : X \to Y$ dikatakan

i. Kontinu pada $a \in X$, jika untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $\|a - x\| < \delta$ berakibat

$$\|f(a) - f(x)\| < \varepsilon.$$

ii. Fungsi f dikatakan kontinu pada X jika f kontinu disetiap $x \in X$

(Darmawijaya, 2007)

Definisi 2.3.4

Diberikan ruang bernorma $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$. Fungsi linear $f: X \to Y$ dikatakan terbatas, jika terdapat $M > 0$ sehingga $\| f(x) \| \leq M\|x\|$, untuk setiap $x \in X$.

(Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.3.5

Diberikan ruang bernorma-ruang bernorma $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$. Fungsi $f: X \to Y$ kontinu di suatu titik $a \in X$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x^{(i)}\} \subset X$ yang konvergen ke a berakibat barisan $\{f(x^{(i)})\}$ konvergen ke $f(a)$.

(Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.3.6

Diketahui X dan Y masing-masing ruang bernorma. Jika fungsi $f: X \to Y$ fungsi linear, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

a. Fungsi f kontinu pada X

b. Fungsi f kontinu di $\theta \in X$

c. Fungsi f kontinu di $x \in X$

d. Himpunan $\{\|f(\mathrm{x})\| : x \in \mathrm{X}$ dan $\|x\| \leq 1\}$ terbatas

e. Ada bilangan $M \geq 0$ sehingga $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ untuk setiap $x \in X$

(Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.3.7

Diketahui X ruang bernorma yang lengkap dan $A \subset X$. Diperoleh A tertutup jika dan hanya jika A lengkap. (Fuhrmann,1981)

2.4 Ruang Barisan Selisih

Definisi 2.4.1

Diperlihatkan barisan selisih bilangan sebagai berikut :

Jika $\tilde{x} = \{x^{(i)}\}$ suatu barisan bilangan dan

$\Delta\tilde{x} = \{x^{(i+1)} - x^{(i)}\}$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$

$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisan $\tilde{x} = \{x^{(i)}\}$

$\Delta_2\tilde{x} = \{x^{(i+2)} - 2x^{(i+1)} + x^{(i)}\}$

$\Delta_2\tilde{x}$ disebut barisan selisih kedua terhadap barisan $\tilde{x} = \{x^{(i)}\}$

$\vdots$

$\Delta_m\tilde{x} = \left\{\Delta_m\tilde{x}^{(i)} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} x^{(i+m-k)}\right\}$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x} = \{x^{(i)}\}$

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan

$\Delta\tilde{x} = \{\Delta x^{(i)}\}, \Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x^{(i)}\}, \dots, \Delta_m x^{(i)} = \{\Delta_m x^{(i)}\}$ yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m.

(Suharna, 2013)

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2017/2018 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah – langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Membuktikan bahwa ruang l_∞, adalah ruang barisan terbatas , konvergen, dan merupakan ruang Banach
2. Membuktikan bahwa ruang $l_\infty(\Delta)$,ruang barisan terbatas , konvergen, dan merupakan ruang Banach
3. Membuktikan bahwa ruang $l_\infty(\Delta_m)$, ruang barisan terbatas , konvergen, dan merupakan ruang Banach

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Ruang barisan $(l_\infty, \|.\|_\infty)$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{i\geq 1}\left|\tilde{x}^{(i)}\right|$ merupakan ruang Banach yang lengkap, Solid, dan juga merupakan ruang-BK.
2. Ruang barisan $(l_\infty(\Delta), \|.\|_{(\infty,\Delta)})$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_{(\infty,\Delta)} = x^{(1)} + \sup_{i\geq 1}\left|\tilde{x}^{(i)}\right|$ merupakan ruang Banach yang lengkap, Solid, dan juga merupakan ruang-BK.
3. Ruang barisan $(l_\infty(\Delta_2), \|.\|_{(\infty,\Delta_2)})$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_{(\infty,\Delta_2)} = x^{(1)} + x^{(2)} + \sup_{i\geq 1}\left|\tilde{x}^{(i)}\right|$ merupakan ruang Banach yang lengkap, Solid, dan juga merupakan ruang-BK.

5.2 Saran

Selisih ruang barisan $l_\infty, l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta_2)$, yang telah dibahas dapat dilanjutkan kembali oleh pembaca yang tertarik meneliti bidang analisis matematika terutama ruang barisan. Karena peneliti hanya meneliti hingga $l_\infty(\Delta_2)$ pembaca dapat membuktikan hingga $l_\infty(\Delta_m)$ ataupun membuktikan selisih ruang barisan lain.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S. K. 1961. *Introduction to Hilbert Space*. Oxford University Press, New York.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Gozali, M. 2009. *Ruang Norm dan Ruang Banach.* Universitas Pendidikan Indonesia. Bandung.

Kizmaz, H. 1981. *On Certain Sequance Spaces.* Karadeniz Teknik Universities, Turkey.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982.*Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Robert, G. Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* John Wiley & Sons, inc, New York.

Ruckle, W. H. 1991. *Modern Analysis*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Suharna, H. 2013. Ruang Barisan Selisih $c_0(\Delta_m), l_p(\Delta_m), c(\Delta_m), l_\infty(\Delta_m)$. Universitas Khairun Ternate.

Yahya, dkk. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.