PENDUGAAN PARAMETER PADA DATA MASA HIDUP SISTEM YANG BERDISTRIBUSI *GENERALIZED* EKSPONENSIAL DAN BERDISTRIBUSI *MIXTURE* EKSPONENSIAL

(Skripsi)

Oleh

SEPTI NOVITA SARI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

PARAMETERS ESTIMATION GENERALIZED EXPONENTIAL AND MIXTURE EKSPONENTIAL DISTRIBUTION ON FAILURE TIMES DATA

By

SEPTI NOVITA SARI

The expansion of the Exponential distribution in solving reliability problems is the Generalized Exponential distribution and Mixture of Exponential distribution. In estimating the parameters of each analytic distribution, the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method is used, for the distribution obtained by the estimator in the form of a non-linear equation system, it will be solved using the Newton-Raphson numerical method. The three distributions will be applied in the reliability test analysis for a system lifetime data. To determine the best distribution in the reliability test analysis, will be determined based on the Mean Square Error (MSE) indicator, the best distribution will have the smallest MSE value and then will be seen based on the comparison of the reliability and hazard rate of each distribution graph.

Keywords: Exponential distribution, Generalized Exponential distribution, Mixture of Exponential distribution, Maximum Likelihood Estimation, Newton-Raphson, Mean Square Error

ABSTRAK

PENDUGAAN PARAMETER PADA DATA MASA HIDUP SISTEM YANG BERDISTRIBUSI *GENERALIZED* EKSPONENSIAL DAN BERDISTRIBUSI *MIXTURE* EKSPONENSIAL

Oleh

SEPTI NOVITA SARI

Perluasan dari distribusi Eksponensial dalam menyelesaikan masalah reliabilitas adalah distribusi *Generalized* Eksponensial dan distribusi *Mixture* Eksponensial. Dalam menduga parameter dari masing-masing distribusi secara analitik digunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), untuk distribusi yang diperoleh hasil penduganya dalam bentuk sistem persamaan non-linier maka akan diselesaikan menggunakan metode numerik Newton-Raphson. Ketiga distribusi akan diterapkan dalam analisis uji reliabilitas untuk suatu data masa hidup sistem. Untuk menentukan distribusi yang paling baik digunakan dalam analisis uji reliabilitas, akan ditentukan berdasarkan indikator *Mean Square Error* (MSE), distribusi yang paling baik akan memiliki nilai MSE terkecil dan kemudian akan dilihat berdasarkan perbandingan grafik reliabilitas dan *hazard rate* masing-masing distribusi.

Kata kunci: distribusi eksponensial, distribusi *Generalized* Eksponensial, distribusi mixture, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), metode Newton-Raphs

PENDUGAAN PARAMETER PADA DATA MASA HIDUP SISTEM YANG BERDISTRIBUSI *GENERALIZED* EKSPONENSIAL DAN BERDISTRIBUSI *MIXTURE* EKSPONENSIAL

Oleh

Septi Novita Sari

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PENDUGAAN PARAMETER PADA DATA MASA HIDUP SISTEM YANG BERDISTRIBUSI *GENERALIZED* EKSPONENSIAL DAN BERDISTRIBUSI *MIXTURE* EKSPONENSIAL**

Nama Mahasiswa : Septi Novita Sari

Nomor Pokok Mahasiswa: 1417031105

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.	**Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.**
NIP. 19560208 198902 1 001	NIP. 19690305 199603 2 001

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.** .....

Sekretaris : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Eri Setiawan, M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **28 Agustus 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Septi Novita Sari
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1417031105
Judul	: Pendugaan Parameter pada Data Masa Hidup Sistem yang Berdistribusi *Generalized* Eksponensial dan Berdistribusi *Mixture* Eksponensial
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 17 September 2018

Penulis

METERAI TEMPEL
8BCDAFF273441961
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Septi Novita Sari
NPM. 1417031105

RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Bandar Lampung, 12 September 1995. Anak keempat dari empat bersaudara dari pasangan suami istri Bapak Ahmad Jamil Simatupang (Alm) dan Ibu Masrona Harahap.

Penulis memulai pendidikan dari taman kanak-kanak di TK Swasta Sriwijaya tahun 2001. Kemudian melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Waydadi tahun 2002. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 12 Bandar Lampung tahun 2008. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Swasta Al-Azhar 3 Bandar Lampung tahun 2011.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (UNILA) melalui jalur SNMPTN tahun 2014. Pada periode 2014/2015 penulis terdaftar sebagai anggota biro kesekretariatan dan periode 2016/2017 sebagai reporter media cetak pada Unit Kegiatan Mahasiswa Fakultas Natural (UKMF Natural).

Sebagai bentuk penerapan ilmu perkuliahan, pada tahun 2017 penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT. BANK RAKYAT INDONESIA (Persero) Tbk. Kantor Cabang Teluk Betung dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sukaratu Kecamatan Kabupaten Pringsewu selama 40 hari.

KATA INSPIRASI

MOTTO:

MAN JADDA WAJADA

"Barang siapa bersungguh-sungguh pasti akan mendapatkannya."

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"

(Q.S Al- Baqarah : 286)

"Barang siapa yang keluar untuk mencari ilmu maka ia berada di jalan Allah hingga ia pulang"

(HR. Tarmidzi)

"Segala persoalan dalam hidup ini sesungguhnya tidak untuk menguji seberapa kuat dirimu, tetapi untuk menguji seberapa besar kesungguhanmu dalam meminta pertolongan Allah S.W.T."

(Ibnul Qayyim)

"Percaya akan setiap doa yang terpanjatkan, kekhusyu'an yang menentramkan, keyakinan yang menguatkan. Janji-Nya itu pasti."

(Septi Novita Sari)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Wasysyukrulillah.

Puji dan syukur tiada hentinya terpanjatkan kepada Allah S.W.T Tiada kata yang lebih mampu mewakili setiap rasa bahagia yang ingin tercurahkan, ku persembahkan karya kecil ini untuk:

Kedua orang tuaku, Papa dan Mama
Ketiga saudaraku, Yazid Marzuki Simatupang, Alpian Nasir Simatupang dan Faren Ari Sandi Simatupang, A.Md., terimakasih untuk semua pengorbanan yang tidak akan terbayarkan oleh apapun

Ketiga kakak ipar terbaik, Kak Ratih, Kak Mia, dan Kak Eryah serta jagoan-jagoan yang selalu menyenangkan hati Appa Raja, Appa Raziq, Appa Raka, dan Appa Hafizh

***

Teruntuk Papa di Surga, kupersembahkan karya kecil ini khusus untukmu sebagai bukti cinta dan kasih saudaraku dalam menyambung tugasmu dalam hidupku.

SANWACANA

Puji dan syukur tak henti-hentinya tercurahkan kepada Allah SWT berkat segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam semoga selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Tidak lupa pula ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam memberikan bimbingan, motivasi, semangat, serta saran yang telah membangun penulis selama proses penyusunan skripsi ini. Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si., sebagai Dosen Pembimbing 1 yang telah meluangkan waktu dan membimbing penulis selama menyusun skripsi.
2. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc., sebagai Dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan saran serta arahan kepada penulis.
3. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran dan evaluasi kepada penulis selama penyusunan skripsi.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan selama masa perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D., selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universita Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
8. Kedua orang tua, ketiga Abang, dan ketiga kakak Ipar serta seluruh keluarga yang selalu memberikan doa dan kasih sayang, mendukung dan memotivasi untuk dapat menjadi kebanggaan keluarga sehingga dapat meraih kesuksesan.
9. Sahabat seperjuangan penulis Riya, Otin, Mba Sandra, Rere, Iin, Vivin., Lucia, Darma, dan Nandra serta Rahmad yang banyak memberikan masukan, memberi semangat yang sangat besar kepada penulis selama menjalani masa perkuliahan.
10. Teman-teman seperjuangan Arum, Rafika, Ira, Arisca, Arif dan Ardiansyah dan teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2014 lainnya yang telah banyak memberikan semangat, ide, dan saran kepada penulis.
11. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Dengan segenap upaya penulis berusaha semaksimal mungkin untuk menyempurnakan tulisan ini. Namun, penulis menyadari bahwa kesempurnaan hanya milik Allah SWT. Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Bandar Lampung, 17 September 2018
Penulis

Septi Novita Sari

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR iii

DAFTAR TABEL iv

I. PENDAHULUAN

1.1 LatarBelakang dan Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 3

1.3 Manfaat Penelitian 3

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Masa Hidup Sistem 4

2.2 Tipe Penyensoran..... 5

2.3 Fungsi Kepadatan Peluang Masa Hidup 7

2.4 Fungsi Reliabilitas 8

2.5 Fungsi *Hazard Rate* 9

2.6 Distribusi Eksponensial 10

2.7 Distribusi *Generalized* Eksponensial..... 12

2.8 Distribusi *Mixture*..... 15

2.9 Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)..... 17

2.10 Uji *Goodness of fit* Kolmogorov-Smirnov..... 18

2.11 Metode Newton-Raphson..... 19

2.12 *Mean Square Error* (MSE)..... 20

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian..... 22

3.2 Data Penelitian..... 22

3.3 Metode Penelitian 22

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hubungan Sampling Sensor dan Sampling Lengkap..... 26

4.2 Pendugaan Parameter Distribusi Eksponensial dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)..... 28

4.3 Pendugaan Parameter Distribusi *Generalized* Eksponensial dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)..... 29

4.4 Pendugaan Parameter Distribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)..... 31

4.5 Algoritma Newton-Raphson dalam Pendugaan Parameter 33

4.6 Analisis Uji Reliabilitas pada Data Masa Hidup Sistem Pendingin Pesawat..... 38

4.6.1 Uji Kesesuaian data Kolmogorov-Smirnov..... 39

4.6.2 Analisis Uji Reliabilitas Data Masa Hidup Sistem yang Berdistribusi Eksponensial 40

4.6.3 Analisis Uji Reliabilitas Data Masa Hidup Sistem yang Berdistribusi *Generalized* Eksponensial 43

4.6.4 Analisis Uji Reliabilitas Data Masa Hidup Sistem yang Berdistribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen 46

4.7 Perbandingan Distribusi berdasarkan Grafik Uji Reliabilitas dan Nilai *Mean Square Error* (MSE) Data Masa Hidup Sistem Pendingin Pesawat..... 49

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

Gambar 1. Ilustrasi Pengujian Sampel Waktu Kegagalan Suatu sistem dalam Sampling Sensor dan Sampling Lengkap 26

Gambar 2. Grafik Fungsi Reliabilitas Data Masa Hidup Pendingin Pesawat yang Berdistribusi Eksponensial..... 41

Gambar 3. Grafik Fungsi *Hazard Rate* Data Masa Hidup Pendingin Pesawat yang Berdistribusi Eksponensial..... 42

Gambar 4. Grafik Fungsi Reliabilitas Data Masa Hidup Pendingin Pesawat yang Berdistribusi *Generalized* Eksponensial..... 44

Gambar 5. Grafik Fungsi *Hazard Rate* Data Masa Hidup Pendingin Pesawat yang Berdistribusi *Generalized* Eksponensial..... 45

Gambar 6. Grafik Fungsi Reliabilitas Data Masa Hidup Pendingin Pesawat yang Berdistribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen 47

Gambar 7. Grafik Fungsi *Hazard Rate* Data Masa Hidup Pendingin Pesawat yang Berdistribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen 48

Gambar 8. Grafik Perbandingan Fungsi Reliabilitas Data Masa Hidup Pendingin Pesawat..... 51

Gambar 9. Grafik Perbandingan Fungsi *Hazard Rate* Data Masa Hidup Pendingin Pesawat..... 51

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

Tabel 1. Data Waktu Kegagalan (Jam) 38

Tabel 2. Hasil Pendugaan Parameter dan Nilai *Mean Square Error* (MSE) 51

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Perkembangan teknologi yang semakin pesat dan persaingan tingkat global yang semakin meningkat menuntut industri-industri dalam negeri harus memiliki keunggulan yang mampu bersaing di kanca global. Dalam ilmu matematika, statistika memiliki peran aktif untuk menangani masalah keandalan terhadap suatu sistem hasil produksi suatu industri yang dikenal dengan analisis keterandalan sistem atau reliabilitas. Reliabilitas adalah peluang bahwa sistem akan bekerja sesuai dengan fungsinya tanpa kerusakan, paling sedikit untuk suatu periode waktu tertentu.

Masa hidup sistem merupakan interval waktu yang diamati saat mulai pakai suatu sistem masuk kedalam pengamatan sampai sistem tidak bisa digunakan lagi karena rusak atau sistem tersebut secara ekonomis tidak berfungsi lagi. Analisis uji reliabilitas suatu sistem dapat ditentukan dengan menentukan fungsi keterandalan sistem (*reliability function*), fungsi kepadatan peluang (*probability density function*), dan fungsi kegagalan (*hazard function*).

Fungsi distribusi masa hidup yang didasarkan pada pengetahuan atau asumsi tertentu, distribusi populasinya termasuk dalam fungsi parametrik. Beberapa distribusi yang dapat digunakan untuk menggambarkan masa hidup diantaranya distribusi Eksponensial, distribusi Weibull, distribusi Gamma, dan lain-lain.

Distribusi yang digunakan dalam penelitian ini adalah distribusi Eksponensial. Namun, seiring berjalannya waktu banyak masalah yang tidak dapat diselesaikan oleh distribusi yang sudah ada dan dalam kondisi khusus, jika pengamatan diambil dari populasi yang heterogen, dalam hal ini model distribusi tunggal tidak selalu dapat digunakan, sehingga perluasan dari distribusi biasa telah banyak dikaji oleh para ahli. Oleh karena itu dalam penelitian ini selain distribusi Eksponensial, digunakan perluasan dari distribusi Eksponensial yaitu distribusi *Generalized* Eksponensial dan distribusi *Mixture* Eksponensial.

Hal yang tidak dapat dipisahkan dalam pengkajian distribusi adalah mengenai pendugaan parameter. Dalam analisis uji reliabilitas pendugaan parameter digunakan untuk mencari parameter dari distribusi yang berkaitan dengan data yang dimiliki.

Dalam penelitian ini, dilakukan analisis uji reliabilitas terhadap data masa hidup suatu sistem yang bertujuan untuk menentukan penduga parameter setiap distribusi menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) yang kemudian akan ditentukan pendekatan distribusi yang paling baik untuk digunakan terhadap data berdasarkan indikator *Mean Square Error* (MSE).

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan penduga parameter distribusi Eksponensial, distribusi *Generalized* Eksponensial dan distribusi *Mixture* Eksponensial dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).
2. Menerapkan hasil ketiga penduga pada data masa hidup suatu sistem.
3. Menentukan distribusi yang paling sesuai terhadap data masa hidup suatu sistem berdasarkan indikator *Mean Square Error* (MSE).

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat pada penelitian ini adalah menambah referensi terhadap ilmu statistika mengenai analisis reliabilitas dengan perluasan distribusi eksponensial yaitu berdistribusi *Generalized* Eksponensial dan distribusi *Mixture* Eksponensial. Penelitian ini bersifat aplikatif, dapat diterapkan pada ilmu lain diluar statistika misalnya ilmu teknik.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Masa Hidup Sistem

Dalam analisis masa hidup, bagian menarik pada suatu kelompok atau kumpulan untuk setiap individu masing-masing didefinisikan sebagai suatu kejadian penting, yang sering disebut kegagalan, terjadi setelah jangka waktu tertentu yang disebut waktu kegagalan. Kegagalan dapat terjadi paling banyak sekali pada setiap individu. Contoh waktu kegagalan salah satunya masa hidup komponen mesin dalam keandalan industri (Cox dan Oakes, 1984).

Masa hidup suatu sistem merupakan interval waktu saat suatu sistem masuk ke dalam penelitian sampai mengalami kegagalan. Fungsi-fungsi pada distribusi masa hidup merupakan suatu fungsi yang menggunakan variabel random masa hidup. Variabel random masa hidup biasanya dinotasikan dengan huruf T dan akan membentuk suatu distribusi peluang. Distribusi masa hidup dapat dijelaskan atau dikarakteristikan oleh tiga fungsi, yaitu fungsi reliabilitas $R(t)$, fungsi kepadatan peluang $f(t)$, dan fungsi *hazard* $h(t)$. Ketiga fungsi ini secara matematik ekuivalen, jika salah satu dari ketiganya diketahui, maka dua yang lainnya dapat dicari (Lee dan Wang, 2003).

2.2 Tipe Penyensoran

Menurut Lawless (1982), ada tiga macam metode yang sering digunakan dalam analisis masa hidup, yaitu:

1. Sampel Lengkap

   Pada uji sampel lengkap, percobaan akan dihentikan jika semua benda atau individu yang diuji telah mati atau gagal. Langkah seperti ini mempunyai keuntungan yaitu menghasilkan observasi terurut dari semua sampel yang diuji.

2. Sampel Tersensor Tipe 1

   Pada uji sampel tersensor tipe 1, percobaan akan dihentikan jika telah tercapai waktu tertentu (waktu penyensoran). Misalkan $T_1, T_2, \dots, T_n$ adalah sampel acak dari distribusi masa hidup dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$, fungsi reliabilitas $R(t)$ dan waktu tersensor untuk semua T_i yaitu L_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Suatu komponen dikatakan terobservasi jika $T_i \leq L_i$ dan tersensor jika $T_i > L_i$. Selanjutnya data sampel masa hidup dicatat sebagai $t_i = \min(L_i, T_i)$ dan:

   $$d_i = \begin{cases} 1, jika\ T_i \leq L_i \\ 0, jika\ T_i > L_i \end{cases}$$

   Dimana d_i adalah nilai sensor pada pengamatan ke-i.

3. Sampel Tersensor Tipe 2

   Suatu sampel dikatakan tersensor tipe 2 jika penelitian dihentikan setelah kegagalan ke-r telah diperoleh. Misalkan $T_1, T_2, \dots, T_n$ adalah sampel acak dari distribusi masa hidup dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dan fungsi

reliabilitas $R(t)$. Percobaan dikatakan telah selesai jika kegagalan ke-r telah tercapai $(r \leq n)$. Fungsi *likelihood* dari $T_1, T_2, \dots, T_r$ $(r \leq n)$ adalah:

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^{r} f(t_i)\,[R(t_i)]^{n-r} \tag{2.1}$$

Menurut Mendenhall dan Hader (1958), model untuk populasi kegagalan campuran juga dapat diterapkan dalam masalah yang melibatkan keandalan sistem. Ada banyak keadaan dimana hanya objek yang gagal yang dapat dikenali dalam suatu sub-kumpulan populasi, baik sub-populasi I, sub-populasi II atau sub-populasi ke-k. Berdasarkan penyebab kegagalan, kita dapat membagi objek gagal tertentu sebagai anggota dari sub-populasi I atau sub-populasi II atau sub-populasi ke-k. Ini mungkin menunjukkan bahwa dari kegagalan r, r_1, r_2,..., r_k merupakan kegagalan milik sub-populasi I, sub-populasi II atau sub-populasi ke-k. Masing-masing tergantung atas alasan kegagalan. Jadi jumlah observasi tanpa sensor adalah r = r_1 + r_2 + ... + r_k, dan sisa pengamatan n-r yang disensor yang tidak memberikan informasi tentang sub-populasi mana mereka berasal. Sehingga, fungsi *Likelihood* untuk keadaan ini dapat ditulis sebagai:

$$L(\boldsymbol{\Psi}|y) \propto \left\{\prod_{j=1}^{r_1} p_1 f_1(t_{1j})\right\}\left\{\prod_{j=1}^{r_2} p_2 f_2(t_{2j})\right\} \dots \left\{\prod_{j=1}^{r_i} (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_i) f_i(t_{ij})\right\} \{R(t)\}^{n-r} \tag{2.2}$$

Dimana $t = (t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}, t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}, t_{ij}, t_{ij}, \dots, t_{ir_i})$ adalah waktu kegagalan yang teramati untuk pengamatan tanpa sensor.

2.3 Fungsi Kepadatan Peluang Masa Hidup

Menurut Lee dan Wang (2003), fungsi kegagalan dari masa hidup *T* memiliki fungsi kepadatan peluang yang didefinisikan sebagai limit dari peluang suatu individu gagal dalam interval waktu yang sangat pendek t sampai t + *Δt*, atau peluang kegagalan dalam interval kecil per satuan waktu. Yang dijelaskan sebagai:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(objek\ gagal\ pada\ (t, t + \Delta t)}{\Delta t} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\mathrm{P}(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \right] \qquad (2.3)$$

Yang mempunyai sifat sebagai berikut:

a. $f(t) \geq 0, untuk\ semua\ t \geq 0$

   $f(t) = 0, untuk\ t < 0$

b. Luas daerah antara kurva kepadatan dengan sumbu t sama dengan 1, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

Variabel random *T* dengan fungsi kepadatan peluang *f(t)* merupakan variabel random non negatif, mempunyai fungsi distribusi kumulatif yang didefinisikan sebagai peluang suatu individu mengalami kejadian sampai dengan waktu t yang dinyatakan sebagai:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(t)dt \qquad (2.4)$$

Dimana:

F(t) = fungsi distribusi kumulatif dari t

P(t) = peluang suatu individu bertahan sampai waktu t

f(t) = fungsi kepadatan peluang dari t

2.4 Fungsi Reliabilitas

Fungsi reliabilitas R(t) didefinisikan sebagai peluang suatu individu dapat bertahan hidup lebih besar atau sama dengan waktu t. Jika suatu variabel random T melambangkan masa hidup atau waktu kegagalan suatu sistem, dengan demikian fungsi reliabilitas pada sistem pada waktu t didefinisikan sebagai berikut:

$$R(t) = 1 - \mathrm{P}(T \leq t) = 1 - F(t) \tag{2.5}$$

Untuk fungsi yang sama, dengan notasi $S(x) = 1 - F(x)$, disebut fungsi survival dalam aplikasi biomedis (Bain dan Engelhardt, 1992).

Menurut Kleinbaum dan Klein (2005), secara teori fungsi reliabilitas dapat digambarkan dengan kurva mulus dan memiliki karakteristik sebagai berikut:

1. Tidak meningkat, kurva cenderung turun ketika t meningat.
2. Untuk t = 0 dan R(t) = 1, adalah awal dari penelitian, karena tidak ada objek yang mengalami peristiwa, peluang waktu reliabilitas 0 adalah 1.
3. Untuk t = ∞ dan R(t) = 0, secara teori, jika periode penelitian meningkat sampai tak berhingga maka tidak ada satu pun yang bertahan, sehingga kurva reliabilitas mendekati nol.

2.5 Fungsi *Hazard Rate*

Fungsi *hazard* dapat diartikan sebagai tingkat kegagalan sesaat, atau bergantung pada kepadatan dari kegagalan pada saat t, dengan diketahui bahwa sistem telah bertahan hingga waktu t. Fungsi *hazard* secara matematik dinyatakan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(t|T \geq t) &= F'(t|T \geq t) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{F(t + \Delta t|T \geq t) - F(x|T \geq t}{\Delta t} \right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P[t \leq T \leq t + \Delta t|T \geq t]}{\Delta t} \right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P[t \leq T \leq t + \Delta t, T \geq t]}{\Delta t\, P[T \geq t]} \right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t\, [1 - F(x)]} \right] \\
&= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad (2.6) \\
&= h(t)
\end{aligned}
$$

Peningkatan Fungsi *Hazard* pada waktu t menunjukkan bahwa sistem lebih mungkin gagal di selisih waktu berikutnya (t, t + Δt) itu akan berada dalam interval sebelumnya sama panjangnya. Artinya, unit tersebut usang atau memburuk seiring bertambahnya usia. Demikian pula, penurunan Fungsi *Hazard* berarti unit meningkat (bertambah baik) seiring bertambahnya usia (Bain dan Engelhardt, 1992).

2.6 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan salah satu distribusi kontinu pertama kali diperkenalkan oleh Gupta dan Kundu tahun 1999. Distribusi Eksponensial merupakan suatu fungsi khusus dari distribusi Gamma yang berperan penting dalam statistika.

Suatu variabel acak kontinu T berdistribusi Eksponensial dengan parameter θ yang merupakan parameter skala, jika fungsi kepadatan peluang memiliki bentuk:

$$f(t) = \theta e^{-\theta t};\ \ \theta > 0\ dan\ t > 0 \tag{2.7}$$

Dengan fungsi distribusi kumulatifnya:

$$F(t) = 1 - e^{-\theta t};\ \ \theta > 0\ dan\ t > 0 \tag{2.8}$$

(Gupta dan Kundu, 1999).

Akan dibuktikan untuk $f(t;\theta)$ merupakan fungsi kepadatan peluang bagi distribusi Eksponensial:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)dt &= \lim_{u\to\infty}\int_0^u \theta e^{-\theta t}dt \\ &= \theta \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-\theta t}dt \\ &= \theta \lim_{u\to\infty} -\frac{1}{\theta}e^{-\theta t}|_0^u \\ &= (-e^{-ut} + e^{-0t}) \\ &= 1 \text{ (terbukti)}\end{aligned}$$

Fungsi reliabilitas dari distribusi Eksponensial adalah:

$$R(t) = 1 - (1 - e^{-\theta t})$$

$$R(t) = -e^{-\theta t} \tag{2.9}$$

Fungsi *hazard rate* atau laju kegagalan dari distribusi Eksponensial adalah:

$$h(t) = \frac{\theta e^{-\theta t}}{1-(1-e^{-\theta t})}$$

$$h(t) = \frac{\theta e^{-\theta t}}{-e^{-\theta t}}$$

$$h(t) = \theta \text{ (konstan)} \tag{2.10}$$

Adapun nilai harapan dan nilai varians dari distribusi Eksponensial (θ) adalah:

1. Nilai harapan distribusi Eksponensial:

$$E(T) = \int_0^\infty t\, f(t) dt$$

$$E(T) = \int_0^\infty t\, \theta e^{-\theta t}$$

$$E(T) = \theta \int_0^\infty t e^{-\theta t}$$

Misalkan:

$$t = \frac{1}{\theta} y \rightarrow dt = \frac{1}{\theta} dy$$

$$E(T) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} y\, \theta e^{-\theta \frac{1}{\theta} y} \frac{1}{\theta} dy$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty y e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\theta} \Gamma(2)$$

$$= \frac{1}{\theta} \tag{2.11}$$

2. Nilai varians distribusi Eksponensial:

$$
\begin{aligned}
Var(T) &= E(T^2) - (E(T))^2 \\
&= \int_0^\infty t^2\, \theta e^{-\theta t} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\theta} y\right)^2 \theta e^{-\theta \frac{1}{\theta} y} \frac{1}{\theta} dy - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\theta^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\theta^2} \Gamma(3) - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \\
&= \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} \\
&= \frac{1}{\theta^2} \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

2.7 Distribusi *Generalized* Eksponensial

Variabel acak T dikatakan mempunyai Distribusi *Generalized* Eksponensial jika fungsi kepadatan peluangnya dinyatakan sebagai:

$$f(t) = \alpha\theta e^{-\theta t}(1 - e^{-\theta t})^{\alpha - 1}\ ;\ \alpha > 0, \qquad \theta > 0, dan\ \ t > 0 \qquad (2.13)$$

dan

Fungsi distribusi kumulatifnya dinyatakan sebagai:

$$F(t) = (1 - e^{-\theta t})^{\alpha}\ \ ; \alpha > 0, \theta > 0, dan\ \ t > 0 \qquad (2.14)$$

dengan $\alpha =$ parameter bentuk yaitu jenis khusus dari parameter numerik yang menunjukkan bentuk dari kurva

$\theta =$ parameter skala yaitu jenis khusus dari parameter numerik yang menunjukkan besarnya distribusi data.

(Gupta dan Kundu, 1999).

Akan dibuktikan $f(t)$ merupakan fungsi kepadatan peluang untuk distribusi *Generalized* Eksponensial:

$$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \alpha\theta e^{-\theta t}\left(1-e^{-\theta t}\right)^{\alpha-1}dt$$

$$= \theta\alpha \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-\theta t}\left(1-e^{-\theta t}\right)^{\alpha-1}dt$$

$misal$:

$y = e^{-\theta t}$

$dy = -\theta e^{-\theta t}dt$

$dt = \dfrac{-dy}{\theta y}$

Ketika $t = 0$, maka $y = 1$

Ketika $t = \infty$, maka $y = 0$

$$\int_0^\infty f(t)dt = \alpha\,\theta\int_1^0 y(1-y)^{\alpha-1}\frac{-dy}{\theta y}$$

$$= \alpha\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}dy$$

$Misal$:

$u = 1 - y$

$du = -dy$

$-du = dy$

Ketika $y = 0$, maka $u = 1$

Ketika $y = \infty$, maka $u = 0$

$$\int_0^\infty f(t)dt = \alpha \int_1^0 u^{\alpha-1} - du$$

$$= \alpha \int_0^1 u^{\alpha-1} du$$

$$= \alpha \left[\frac{1}{\alpha} u^\alpha\right]_0^1$$

$$= \alpha \left[\frac{1}{\alpha}(1^\alpha) - \frac{1}{\alpha}(0)^\alpha\right]$$

$$= \alpha \left[\frac{1}{\alpha}\right]$$

$= 1$ (terbukti)

Fungsi reliabilitas dari distribusi *Generalized* Eksponensial adalah:

$$R(t) = 1 - \left[\left(1 - e^{-\theta t}\right)^\alpha\right] \tag{2.15}$$

Fungsi *hazard rate* atau laju kegagalan dari distribusi *Generalized* Eksponensial adalah:

$$h(t) = \frac{\alpha\theta e^{-\theta t}(1 - e^{-\theta t})^{\alpha-1}}{1 - [(1 - e^{-\theta t})^\alpha]} \tag{2.16}$$

Adapun nilai harapan dan nilai varians dari distribusi *Generalized* Eksponensial (α, θ) menurut Gupta dan Kundu (1999) adalah:

1. $E(X) = \frac{1}{\theta}(\psi(\alpha + 1) - \left(\psi(1)\right)$ (2.17)
2. $Var(X) = -\frac{1}{\theta^2}(\psi'(\alpha + 1) - (\psi'(1))$ (2.18)

Dimana ψ adalah fungsi digamma dan ψ' adalah derivatif dari fungsi digamma. (Uraian dari nilai harapan dan nilai varians dijabarkan pada lembar lampiran)

2.8 Distribusi *Mixture*

Salah satu model khusus yang dapat digunakan untuk memodelkan data yang populasinya merupakan susunan dari beberapa subpopulasi atau kelompok. Setiap subpopulasi merupakan komponen penyusun dari model campuran serta mempunyai proporsi yang bervariasi untuk masing-masing komponennya. Distribusi *mixture* menggabungkan sejumlah komponen yang kemungkinan berasal dari distribusi yang sama atau berbeda-beda sehingga dapat memberikan gambaran mengenai sifat-sifat data. Suatu variabel acak dikatakan mengikuti distribusi *mixture* berhingga dengan *k* komponen jika fungsi kepadatan *T* dapat ditulis:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} p_i f_i(t) \tag{2.19}$$

p_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ adalah sejumlah *k* proporsi pencampur, yang mana $0 \leq p_i \leq 1$ dan $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. $f_i(t)$ adalah sejumlah *k* komponen fungsi kepadatan.

(Tahir, dkk., 2016).

Berdasarkan definisi ini, distribusi *mixture* Eksponensial 2 komponen dengan proporsi pencampur *p* memiliki fungsi kepadatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif sebagai:

$$f(t; \mathbf{\Psi}) = \mathrm{p}\ \theta_1 e^{-\theta_1 t} + (1 - \mathrm{p})\theta_2 e^{-\theta_2 t} \tag{2.20}$$

$$F(t; \mathbf{\Psi}) = \mathrm{p}\ (1 - e^{-\theta_1 t}) + (1 - \mathrm{p})1 - e^{-\theta_2 t} \tag{2.21}$$

Dimana $\boldsymbol{\Psi} = (\theta_1, \theta_2, \mathrm{p})$; $\Psi_\mathrm{k} = \theta_\mathrm{k}$; $k = 1, 2$.

$f_k(t; \Psi_k) = \theta_k e^{-\theta_k t}; 0 < t < \infty, \ \ k = 1,2.$

$F_k(t; \Psi_k) = 1 - e^{-\theta_k t}; 0 < t < \infty, \ \ k = 1,2.$

Akan dibuktikan $f(t; p, \theta_1, \theta_2)$ merupakan fungsi kepadatan peluang untuk distribusi *Mixture* Eksponensial 2 komponen:

$$f(t) = \int_0^\infty p\theta_1 e^{-\theta_1 t} dt + \int_0^\infty (1-p)\theta_2 e^{-\theta_2 t} dt$$

$$= p \int_0^\infty \theta_1 e^{-\theta_1 t} dx + (1-p) \int_0^\infty \theta_2 e^{-\theta_2 t} dt$$

$$= p(1) + (1-p)(1)$$

$$= 1 \text{ (Terbukti)}$$

Fungsi reliabilitas dari distribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen adalah:

$$R(t) = 1 - \left[p\left(1 - e^{-\theta_1 t}\right) - (1-p)\left(1 - e^{-\theta_2 t}\right)\right] \tag{2.22}$$

Fungsi *hazard rate* atau laju kegagalan dari distribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen adalah:

$$h(t) = \frac{p\left(\theta_1 e^{-\theta_1 t}\right) - q\left(\theta_2 e^{-\theta_2 t}\right)}{1 - [p(1 - e^{-\theta_1 t}) - q(1 - e^{-\theta_2 t})]} \tag{2.23}$$

Adapun nilai harapan dan nilai varians dari distribusi *Mixture* Eksponensial 2 komponen (p, θ_1, θ_2) adalah:

1. Nilai harapan distribusi *Mixture* Eksponensial 2 komponen:

$$E(T) = pE_1(T) + (1-p)E_2(T)$$

$$= \frac{p}{\theta_1} + \frac{(1-p)}{\theta_2} \tag{2.24}$$

2. Nilai varians distribusi *Mixture* Eksponensial 2 komponen:

$$Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2$$

$$Var(T) = \left(\frac{2p}{{\theta_1}^2} + \frac{2(1-p)}{{\theta_2}^2}\right) - \left(\frac{p}{\theta_1} + \frac{(1-p)}{\theta_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2p}{{\theta_1}^2} + \frac{2(1-p)}{{\theta_2}^2}\right) - \left(\frac{p^2}{{\theta_1}^2} + \frac{2p(1-p)}{\theta_1\theta_2} + \frac{(1-p)^2}{{\theta_2}^2}\right) \tag{2.25}$$

2.9 Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Misal $t_1, t_2, \ldots, t_n$ merupakan sampel acak dari suatu distribusi dengan fungsi kepadatan peluang $f(t,\theta)$, untuk $\theta \in \Omega$. Fungsi kepadatan peluang bersama antara $t_1, t_2, \ldots, t_n$ adalah $f(t_1;\theta)f(t_2;\theta)\ldots f(t_n;\theta)$. Jika fungsi kepadatan peluang bersama tersebut dinyatakan sebagai fungsi terhadap θ maka dinamakan fungsi *Likelihood* yang dinotasikan L atau ditulis:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta), \text{ dengan } \theta \in \Omega \tag{2.26}$$

Jika statistik $\hat{\theta} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(t_1, t_2, \ldots, t_n;\theta)$, $\theta \in \Omega$, maka statistik $\hat{\theta} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ dinamakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dari θ. Dengan demikian, $\hat{\theta}$ adalah nilai dari θ yang memenuhi:

$$f\left(t_1, t_2, \dots, t_n; \hat{\theta}\right) = \max_{\theta \in \Omega} f(t_1, t_2, \dots, t_n; \theta) \qquad (2.27)$$

Jika Ω ruang parameter yang merupakan interval terbuka dan $L(\theta)$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan serta diasumsikan maksimum pada Ω maka persamaan *maksimum likelihood* adalah:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = 0 \qquad (2.28)$$

Jika penyelesaian dari persamaan (2.18) ada, maka maksimum $L(\theta)$ dapat terpenuhi. Apabila penyelesaian dari persamaan (2.18) sulit diselesaikan maka fungsi $L(\theta)$ dapat dibuat logaritma naturalnya, dengan ketentuan memaksimumkan $\ln L(\theta)$, sehingga persamaan logaritma natural *likelihood* adalah:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = 0 \qquad (2.29)$$

(Bain dan Engelhardt, 1992).

2.10 Uji *Goodness of fit* Kolmogorov-Smirnov

Uji *Goodness of fit* Kolmogorov-Smirnov adalah sebuah metode untuk uji kesesuaian distribusi sebuah sampel acak yang belum diketahui distribusinya. Statistik uji Kolmogorov-Smirnov (KS) didasarkan pada perbedaan maksimum antara sampel CDF dan CDF yang dihipotesiskan.

Misalkan $t_1, t_2, \dots, t_n$ adalah sampel acak berukuran n yang diambil dari populasi yang tidak diketahui distribusinya.

Untuk menguji ditentukan $H_0 : T \sim F(t)$

$$D^+ = \max_i \left(i/n - F\left(t_{i;n}\right) \right) \tag{2.30}$$

$$D^- = \max_i \left(F\left(t_{i;n}\right) - (i-1)/n \right) \tag{2.31}$$

$$D = \max \left(D^+, D^- \right) \tag{2.32}$$

Setelah ditemukan nilai statistik test T maka langkah selanjutnya dibandingkan dengan Tabel Kolmogorov-Smirnov dengan tingkat signifikan $1 - \alpha$. Apabila nilai statistik test T < tabel K-S maka terima H_0 dan sebaliknya, (Bain dan Engelhardt, 1992).

2.11 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut. Misalkan terdapat bentuk implisit dari $\frac{\partial \log L(\theta;t)}{\partial \theta_k} = 0$ dengan $k = 1, 2, \dots, p$, maka iterasi Newton-Raphson adalah sebagai berikut:

$$\theta^{n+1} = \theta^n - J(\theta^n)^{-1} g(\theta^n), \qquad n = 0, 1, \dots, q. \tag{2.33}$$

dengan $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ maka,

$$g(\theta) = \left(\frac{\partial \log L(\theta;t)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \log L(\theta;t)}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial \log L(\theta;t)}{\partial \theta_p}\right)^T \tag{2.34}$$

$$J(\theta) = \left[\frac{\partial^2 \log L(\theta;t)}{\partial \theta_k \theta_m}\right] ; k, m = 1, 2, \dots, p. \tag{2.35}$$

dimana:

θ^{n+1} adalah vektor berukuran $p \times 1$ pada iterasi ke $n + 1$.

$J(\theta^n)$ adalah matriks jacobian pada saat θ^n

$g(\theta^n)$ adalah vektor $p \times 1$ dari fungsi turunan pertama logaritma natural $L(\theta; t)$.

(Lee dan Wang, 2003)

2.12 *Mean Square Error* (MSE)

Dalam statistik, kesalahan kuadrat rata-rata (MSE) dari penduga adalah satu dari banyak cara untuk mengukur perbedaan antara nilai-nilai dari penduga dan nilai sebenarnya dari jumlah yang diperkirakan. MSE merupakan dua momen dari *error* yaitu menggabungkan varians penduganya dan penduga biasnya. Untuk penduga yang tak bias, MSE adalah varian. Seperti halnya varian, MSE memiliki satuan ukuran yang sama dengan jumlah kuadrat yang di estimasi. Semakin kecil nilai MSE nya maka semakin bagus nilai penduga yang diperoleh karena mendekati nilai yang diobservasi dan juga sebaliknya.

MSE dari penduga $\hat{\theta}$ dari estimasi parameter θ didefinisikan:

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right] \tag{2.36}$$

MSE merupakan jumlah dari varian dari parameter dan kuadrat dari penduga biasnya:

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + \left(Bias\ (\hat{\theta}, \theta)\right)^2 \tag{2.37}$$

Jika penduganya *unbiased* atau bias $(\hat{\theta}, \theta) = 0$ maka MSE dapat didefinisikan sebagai varian sehingga

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) \tag{2.38}$$

(Graybill, Mood, dan Boes, 1963).

Jika $\hat{F}(t_i)$ merupakan penduga dari fungsi distribusi kumulatif (t_i), menurut Al Fawzan (2000) rumus *Mean Square Error* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$MSE(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\hat{F}(t_i) - F(t_i)\right]^2 \tag{2.39}$$

Dengan $F(t_i) = \frac{i}{n}$ merupakan fungsi distribusi kumulatif empiris.

Apabila parameter populasi diketahui, maka $F(t_i)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif parametrik.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Pada penelitian ini digunakan data sekunder yaitu data masa hidup suatu sistem yang menunjukkan waktu kegagalan pada mesin pendingin pesawat 7912.

3.3 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan fungsi distribusi kumulatif, fungsi kepadatan peluang, fungsi reliabilitas dan fungsi *hazard rate* terhadap distribusi Eksponensial, distribusi *Generalized* Eksponensial dan distribusi *Mixture* Eksponensial

2. Menduga parameter (θ) pada distribusi Eksponensial dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan fungsi *Likelihood* dari distribusi Eksponensial
   b. Menentukan logaritma natural dari fungsi *Likelihood* distribusi Eksponensial
   c. Menentukan turunan persamaan logaritma natural dari fungsi *Likelihood* terhadap parameter distribusi Eksponensial
   d. Memaksimumkan fungsi *Likelihood* dengan membuat hasil turunan dari persamaan logaritma natural sama dengan nol.
3. Menduga parameter (α, θ) pada distribusi *Generalized* Eksponensial dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimaton* (MLE) dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan fungsi *Likelihood* dari distribusi *Generalized* Eksponensial Menentukan logaritma natural dari fungsi *Likelihood* distribusi *Generalized* Eksponensial
   b. Menentukan turunan persamaan logaritma natural dari fungsi *Likelihood* terhadap parameter-parameter distribusi *Generalized* Eksponensial
   c. Memaksimumkan fungsi *Likelihood* dengan membuat hasil turunan dari persamaan logaritma natural sama dengan nol.
4. Menduga parameter (p, θ_1, θ_2) pada distribusi *Mixture* Eksponensial dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Menentukan fungsi *Likelihood* dari distribusi *Mixture* Eksponensial dengan pendekatan berdasarkan sampling yang disensor, dimana dalam sampling lengkap dapat diperoleh dengan *Likelihood* yang sama dengan asumsi waktu sensor tidak terbatas. Dengan fungsi *Likelihood* berdasarkan persamaan (2.2), menjadi sebagai berikut:

$$L(\theta;t) = \left\{\prod_{j=1}^{r_1} pf_1\left(t_{1j}\right)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{r_2}(1-p)f_2\left(t_{2j}\right)\right\}\{R(t)\}^{n-r} \qquad (3.2)$$

Untuk $i = 1, 2\ ; j = 1, \dots, r_i$ dan t_{ij} menunjukkan waktu kegagalan dari satuan yang termasuk dalam sub-populasi sepanjang i.

b. Menentukan logaritma natural dari fungsi *Likelihood* distribusi *Mixture* Eksponensial

c. Menentukan turunan persamaan logaritma natural dari fungsi *Likelihood* terhadap parameter-parameter distribusi *Mixture* Eksponensial

d. Memaksimumkan fungsi *Likelihood* dengan membuat hasil turunan dari persamaan logaritma natural sama dengan nol

5. Mencari penduga dari distribusi yang masih dalam bentuk sistem persamaan non linier menggunakan metode Newton-Raphson dengan langkah-langkah sebagai berikut:

   1. Menentukan nilai dugaan awal asumsikan $\theta^0 = \begin{bmatrix} {\theta_1}^0 \\ {\theta_2}^0 \end{bmatrix}$ sebagai tebakan awal dari solusi sistem persamaan non linier, dengan dua variabel yang tidak diketahui

   2. Menentukan sistem persamaan non linier $g(\theta)$ dan matriks jacobian $J(\theta)$

3. Menghitung $\theta^{n+1} = \theta^{n} - J(\theta^{n})^{-1} g(\theta^{n})$ untuk mendapatkan nilai tebakan ke $n + 1$
4. Menghentikan proses iterasi dengan syarat $|\theta^{n+1} - \theta^{n}| <$ *error*, dengan *error* adalah bilangan positif mendekati nol yang ditentukan. Nilai θ^{n+1} adalah numerik dari sistem persamaan non linier $g(\theta)$

6. Melakukan analisis uji Reliabilitas pada data masa hidup suatu sistem pendingin pesawat yang berdistribusi Eksponensial, berdistribusi *Generalized* Eksponensial dan berdistribusi *Mixture* Eksponensial dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Melakukan uji kesesuaian data dengan uji Kolmogorov-Smirnov
   b. Mensubtitusikan nilai hasil pendugaan parameter dari setiap distribusi terhadap masing-masing model untuk data kegagalan.
   c. Menggambarkan model untuk data kegagalan dalam bentuk grafik
7. Menentukan pendekatan distribusi yang terbaik melalui indikator *Mean Square Error* (MSE).

V. KESIMPULAN

Kesimpulan berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diperoleh adalah sebagai berikut:

1. Pendugaan parameter distribusi Eksponensial, distribusi *Generalized* Eksponensial dan distribusi *Mixture* Eksponensial dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) adalah sebagai berikut:

   a. Distribusi Eksponensial secara analisis

   $$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

   Dengan mensubtitusikan data masa hidup pendingin pesawat ke dalam penduga yang dimiliki, maka diperoleh nilai untuk parameter θ, yaitu $\hat{\theta} = 0.01678$.

   b. Distribusi *Generalized* Eksponensial secara analisis

   $$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i - (\hat{\alpha} - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{-\hat{\theta} t_i}} \left(t_i e^{-\hat{\theta} t_i} \right)}$$

   dan

   $$\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - e^{-\hat{\theta} t_i}\right)}$$

Pendugaan parameter distribusi *Generalized* Eksponensial secara numerik diperoleh dengan menggunakan metode Newton-Raphson pada Matlab untuk data masa hidup pendingin pesawat, masing-masing parameter yaitu $\hat{\theta} = 0.0145$dan $\hat{\alpha} = 0.8093$.

c. Distribusi *Mixture* Eksponensial 2 komponen secara analisis

Proporsi:

$$\hat{p} = \frac{r_1}{n}$$

Dua parameter skala:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{r_1}{\sum_{j=1}^{r_1} t_{1j}}$$

dan

$$\hat{\theta}_2 = \frac{r_2}{\sum_{j=1}^{r_1} t_{2j}}$$

Dengan mensubtitusikan data masa hidup pendingin pesawat ke dalam penduga yang dimiliki, maka diperoleh nilai penduga bagi masing-masing parameter, yaitu $\hat{p} \ = 0.6$; $\hat{\theta}_1 = \ 0.0625$; $\hat{\theta}_2 = \ 0.0072$

2. Berdasarkan indikator *Mean Square Error* (MSE) dari masing-masing distribusi diperoleh 0.3122, 0.1767, dan 0.0955. Distribusi yang memiliki nilai MSE terkecil adalah distribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen, menunjukkan bahwa pendekatan distribusi terbaik bagi data masa hidup pendingin pesawat adalah distribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen. Pada perhitungan nilai MSE dari ketiga distribusi diperoleh bahwa semakin besar nilai penduga distribusi kumulatif pada masing-masing distribusi menyebabkan nilai MSE yang semakin kecil, begitu juga sebaliknya. Pada distribusi Eksponensial dan perluasannya, penambahan parameter pada setiap perluasan dari distribusi

Eksponensial menyebabkan terjadinya peningkatan nilai pada penduga distribusi kumulatif.

3. Berdasarkan hasil uji reliabilitas pada perbandingan grafik ketiga distribusi diperoleh dari ketiga grafik reliabilitas masing-masing distribusi ini menunjukkan reliabilitas sistem semakin lama semakin mengalami penurunan kinerja sistem, seiring dengan bertambahnya waktu dalam pengujian mengakibatkan reliabilitas yang semakin rendah yang ditunjukkan dengan pola grafik menurun.
   a. Ketika t $\pm$ 100 (jam) ketiga grafik reliabilitas saling berpotongan, yang berarti ketiga grafik berada pada nilai peluang keterandalan yang sama, menunjukkan adanya kedekatan dari model masing-masing distribusi.
   b. Ketika t < 100 (jam) grafik untuk distribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen memiliki keterandalan yang kurang baik dibandingkan distribusi lainnya dengan grafik yang cenderung lebih cepat menurun.
   c. Ketika t > 100 (jam) distribusi *Mixture* Eksponensial 2 Komponen memiliki keterandalan yang lebih baik, ditunjukkan dengan grafik nilai peluang reliabilitas yang lebih besar terhadap t ketika t meningkat jika dibandingkan dengan grafik fungsi reliabilitas lainnya.
4. Berdasarkan hasil uji reliabilitas pada perbandingan grafik *hazard rate* (laju kegagalan) ketiga distribusi diperoleh bahwa distribusi Eksponensial memiliki laju kegagalan yang konstan, artinya semakin meningkat waktu dari suatu sistem maka laju kegagalannya akan selalu sama sehingga kegagalan suatu sistem tidak dipengaruhi oleh waktu. Berdasarkan perluasan dari distribusi Eksponensial, yaitu distribusi *Generalized* Eksponensial dan distribusi *Mixture* Eksponensial menunjukkan menunjukkan pola grafik menurun,

artinya, semakin meningkat waktu dari suatu sistem maka laju kegagalannya akan semakin menurun. Pada saat $t > 0$ menunjukkan nilai peluang laju kegagalan pada distribusi *Mixture* Eksponensial lebih kecil dibandingkan dengan distribusi *Generalized* Eksponensial.

DAFTAR PUSTAKA

Al-fawzan, M.A. 2000. Methods for estimating The Parameters of The Weibull Distribution. *King Abdul Aziz City for Science and Technology*.

Bain, L. J. dan Engelhard. 1992. *Introduction To Probability and Mathematical Statistics*. Edisi ke-2. Duxbury, California.

Cox, D. R. dan Oakes, D. 1984. *Analysis of Survival Data*. Chapman & Hall, New York.

Graybill, F.A., Mood, A.M., dan Boes, D.C. 1963. *Introduction to The Theory Statistics*. Edisi ke-3. McGraw-Hill, Inc., Japan.

Gupta, R.D. dan Kundhu, D. 1999. Generalized Exponential Distribution. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*. **41**(2), 173-188.

Kleinbeum, D.G. dan Klein. 2005. *Survival Analysis, A Self-Learning Text*. Edisi ke-2. Springer-Verlag, New York.

Lawless, J.F. 1982. *Statistical Model and Method for Life Time Data*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

Lee, E. T. dan Wang, J. W. 2003. *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. John Wiley & Son, Inc., Canada.

Mendenhall, W., dan Hader, R.J. 1958. Estimation of Parameters of Mixed of Mixed Exponentially Distributed Failure Time Distribution from censored Life Test Data. *Biometrika*, 45, 504-520

Tahir, M., dkk. 2016.On Finite 3-component Mixture of Exponential Distributions: Properties and Estimation. *Cogent Mathematics*. **3**.