PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI GENERALIZED KUMARASWAMY (KUMARASWAMY-G) DENGAN METODE *PROBABILITY WEIGHTED MOMENT* (PWM)

(Skripsi)

Oleh

HANGGITA SEKAR TEJA KUSUMA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2018

ABSTRACT

ESTIMATION PARAMETER OF GENERALIZED KUMARASWAMY (KUMARASWAMY-G) USING PROBABILITY WEIGHTED MOMENT (PWM) METHOD

By

Hanggita Sekar Teja Kusuma

Kumaraswamy-G distribution is an extension of the Kumaraswamy distribution with two parameters (α, β) with the parameters α and β are form parameters that show the shape of the curve. The estimator of the Kumaraswamy distribution parameter was obtained by using the Probability Weighted Moment (PWM) estimation method. In this study, the estimation of the distribution parameter Kumaraswamy-G (α, β) was estimated using the Probability Weighted Moment method. Based on the results obtained shows that the parameter estimator (α, β) cannot be solved analytically because it still contains parameter values. Therefore, the R 3.3.2 program is used in finding the estimated value.

Keywords: Kumarawamy Distribution, Probability Weighted Moment (PWM), Newton-Raphson.

ABSTRAK

PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI GENERALIZED KUMARASWAMY (KUMARASWAMY-G) DENGAN METODE *PROBABILITY WEIGHTED MOMENT* (PWM)

Oleh

Hanggita Sekar Teja Kusuma

Distribusi kumaraswamy-G adalah perluasan dari distribusi Kumaraswamy dengan dua parameter yaitu (α, β) dengan parameter α dan β merupakan parameter bentuk yang menunjukan bentuk dari kurva. Penduga dari parameter distribusi Kumaraswamy ini diperoleh dengan menggunakan metode pendugaan *Probability Weighted Moment* (PWM) Pada penelitian ini akan mengkaji tentang pendugaan parameter distribusi Kumaraswamy-G (α, β)dengan menggunakan metode *Probability Weighted Moment.* Berdasarkan hasil yang diperoleh menunjukan bahwa penduga parameter (α,β) tidak bisa diselesaikan secara analitik karena masih mengandung nilai parameter. Oleh sebab itu, digunakan program R 3.3.2 dalam mencari nilai pendugaan tersebut.

Kata kunci : Distribusi Kumaraswamy-G*, Probability Weighted Moment* (PWM), Newton-Raphson.

PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI GENERALIZED KUMARASWAMY (KUMARASWAMY-G) DENGAN METODE PROBABILITY WEIGHTED MOMENT (PWM)

Oleh

HANGGITA SEKAR TEJA KUSUMA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI GENERALIZED KUMARASWAMY (KUMARASWAMY-G) DENGAN METODE *PROBABILITY WEIGHTED MOMENT* (PWM)**

Nama Mahasiswa : Hanggita Sekar Teja Kusuma

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031037

Jurusan/ Program Studi : Matematika/ S1 Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Pembimbing I	Pembimbing II
Ir. Warsono, M.S., Ph.D.	**Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**
NIP 19630216 198703 1 003	NIP 19620513 198603 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Ir. Warsono, M.S., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **04 September 2018**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Hanggita Sekar Teja Kusuma

No. Pokok Mahasiswa : 1317031037

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan bahwa, skripsi yang berjudul "Pendugaan Parameter Distribusi Generalized Kumaraswamy(Kumaraswamy-G) Dengan Metode *Probability Weighted Moment* (PWM)" merupakan hasil karya saya sendiri. Semua hasil penulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung dan sepanjang pengetahuan saya skripsi ini tidak ada dan belum pernah ditulis oleh pihak lain atau tidak berisi materi yang telah dipublikasikan. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil karya pihak lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 2018

METERAI TEMPEL
72B6AAFF273641942
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Hanggita Sekar T.K
NPM. 1317031037

RIWAYAT HIDUP

Hanggita Sekar Teja Kusuma merupakan anak ketiga dari Bapak Bambang Suhermanto, S.T dan Ibu Ary Lestary yang lahir di Surakarta pada tanggal 26 Oktober 1995.

Penulis memulai pendidikan Sekolah Dasar Negri 5 Sukajawa pada tahun 2001 Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 7 Bandar Lampung pada tahun 2007, dan Sekolah Menengah Atas di SMA Al-Azhar 3 Bandar Lampung pada tahun 2010. Penulis melanjutkan pendidikan penguruan tinggi di Universitas Lampung pada tahun 2013 di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswi di Universitas Lampung, penulis pernah aktif dalam berorganisasi dan pernah menjadi anggota Biro Dana dan Usaha HIMATIKA (Himpunan Mahasiswa Matematika) FMIPA Universitas Lampung.

Pada tahun 2017 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata di Desa Sukawaringin Kabupaten Lampung Tengah selama 40 hari. Penulis juga melaksanakan Kerja Praktik di PT Bank Syariah Mandiri Area Lampung selama 20 hari dengan judul "Analisis Perbandingan Jumlah Pembukaan Rekening Jangka Pendek Pada PT Bank Syariah Mandiri Area Lampung Maret 2015-Februari 2016".

MOTTO

Don't be sad, indeed Allah is with us
(Al-Qur'an Surat At taubah 9:40)

"Allah bersama orang-orang yang sabar dan bertawakal"

"setelah hujan maka ada pelangi begitulah hidup dibalik kesedihan tersimpan kebahagiaan yang menanti"

(Hanggita Sekar Teja Kusuma)

PERSEMBAHAN

Dengan segala rasa syukur kehadirat Allah SWT dan dengan segala kerendahan hati, kupersembahkan skripsi ini secara khusus sebagai wujud tanggung jawab , bakti dan sayang ku kepada:

Bapak yang selalu aku sayangi dan kucintai sepanjang hidupku, ibu ku tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa dan cintanya yang tak terhingga, kakak-kakakku yang telah memberikan kasih sayang, semangat dan pemikiran yang bijaksana.

Bapak dan Ibu Dosen yang telah memberikan Ilmu dengan tulus ikhlas, Sahabat – sahabatku tersayang yang selalu mendukung menemani saat suka maupun duka,

Dan Almamaterku tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur Penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena berkat Rahmat dan Hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul "**Pendugaan Parameter Distribusi Generalized Kumaraswamy (Kumaraswamy-G) Dengan Metode *Probability Weighted Moment* (PWM)**" dapat diselesaikan dengan baik.

Penulis menyadari banyak sekali pihak yang telah membantu penulis hingga terselesaikannya skripsi ini. Penulisan skripsi ini merupakan tugas akhir selama menempuh pendidikan Perguruan Tinggi di Jurusan Matematika Universitas Lampung. Dengan terselesainya skripsi ini penulis ingin mengucapkan rasa terima kasih yang tulus kepada :

1. Bapak Ir., Warsono, M.S., Ph.D., selaku Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan dan ilmunya selama penulis melaksanakan penelitian hingga menyelesaikannya skripsi ini dengan baik.
2. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D selaku Pembimbing II yang dengan sabar membimbing, memberikan saran serta pembelajaran yang membantu penulis selama melaksanakan penelitian hingga menyelesaikannya skripsi ini dengan baik.

3. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si selaku Pembahas atas bimbingan selama penulis melaksanakan penelitian hingga menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Amanto S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan, dukungan dan semangat selama masa studi.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito.S.Si., DEA,. Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
8. Bapak dan ibu tercinta, kakakku Nanda dan Bima, slalu memberi dukungan agar tetap tabah, kuat dan tawakal dalam menuntut ilmu sampai terselesainya skripsi ini.
9. Sahabat-sahabatku dikampus tercinta, Ega Jhea Gustavia, Tara Yunika Ferusia, Oktarini Husaini, yang telah berjuang bersama, menjadi tempat curahan hati penulis, selalu memberi semangat, bantuan yang tak ada hentinya untuk penulis.
10. Sahabat-sahabatku SMP tercinta Dwi Ratna Sari dan Kinasih Cahyono yang selalu setia mendampingi, sahabat SMA Hany dan Silva memberi support yang luar biasa, selalu memberikan semangat dan do’a yang tak ada hentinya.
11. Sahabat-sahabat SD tersayang, Anggi Devlyana, Erdalia Citra Ayu dan teman-teman SD 5 Sukajawa yang tidak bisa disebutkan satu persatu, yang

selalu mendengarkan curahan hati, memberikan semangat serta do’a yang tak ada hentinya.

12. Teruntuk Yudha Hudhaya yang dengan sabar mendengar keluh kesah, memberikan semangat yang luar biasa, memberikan motivasi serta memberikan kasih sayang tulus kepada penulis.
13. Teman - teman seperjuangan selama penelitian Tara, Oktarini, Ega, Afif, dan Dafri terima kasih untuk kerja samanya dalam susah dan senang.
14. Keluarga besar Matematika 2013, atas segala kebersamaan yang telah kita jalin.
15. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi yang tidak dapat penulis ucapkan satu – persatu.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis mengharapkan saran dan kritik. Besar harapan penulis semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak.

Bandar Lampung, 2018
Penulis,

Hanggita Sekar T.K

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Penelitian

Salah satu distribusi kontinu dalam teori probabilitas dan statistika adalah distribusi Kumaraswamy. Kumaraswamy berasal dari nama tokoh Poondi Kumaraswamy. Dia menggunakannya pada tahun 1980. Distribusi Kumaraswamy memiliki dua parameter, yaitu parameter bentuk α dan β Distribusi Kumaraswamy biasanya digunakan untuk variable yang lebih rendah dan batas atas. Oleh karena itu, distribusi Kumaraswamy ini dikembangkan menjadi distribusi *Generalized Kumaraswamy* (Kumaraswamy-G) dengan dua parameter positif tambahan α dan β. Sehingga parameter distribusi generalized kumaraswamy tetap berjumlah 2 parameter positif (α, β) yaitu parameter bentuk dengan nilai fungsi $g(x)$ adalah turunan dari fungsi kumaraswamy.

Dalam ilmu statistika biasanya dibagi menjadi dua kategori yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensia. Statistika deskriptif adalah metode mengatur, merangkum dan mempresentasikan data dengan cara informatif (Mc Graw Hill,2009). Sedangkan statistika inferensia adalah metode yang digunakan untuk mengestimasi sifat populasi berdasarkan pada sampel (Mc Graw Hill,2009). Perhatian utama berkenaan dengan statistika inferensia adalah menemukan sesuatu mengenai populasi dari sampel yang diambil dari populasi tersebut atau dengan kata lain statistika inferensia adalah menemukan penduga yang baik. Suatu penduga yang baik harus memenuhi beberapa sifat penduga yang diinginkan suatu peluang, yaitu tak bias, varian minimum, konsisten, efisien, statistik cukup dan kelengkapan. Dalam menentukan penduga yang baik untuk parameter dari dari suatu populasi tersebut, terdapat beberapa metode pendugaan yang dapat digunakan diantaranya metode momen, metode maximum likelihood (MLE), metode generalized momen (GM), metode *Probability Weighted Moment* (PWM), dan lain-lain. Dari beberapa metode yang telah ada, metode momen adalah metode yang sering digunakan. Greenwood et al. (1979) memperkenalkan metode PWM sebagai alternatif dari metode MLE yang memiliki kelemahan untuk sampel yang berukuran kecil. Sedangkan dalam penelitiannya Landweher et al. (1979) membandingkan hasil dugaan yang diperoleh dari MM, MLE dan PWM dan didapatkan bahwa PWM memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan MM dan MLE.

Sebagai salah satu bentuk aplikasi dari metode *Probability Weighted Moment* (PWM), maka penulis tertarik untuk menggunakan metode pendugaan tersebut untuk menduga parameter dari suatu distribusi. Dalam hal ini, penulis akan mengaplikasikan metode tersebut pada distribusi Generalized Kumaraswamy (kumaraswamy-g) . Karena itu, penulis akan mengaplikasikan metode pedugaan *Probability Weighted Moment* (PWM) tersebut pada distribusi *Generalized Kumaraswamy* yakni metode *Probability Weighted Moment* (PWM).

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membuat grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *Kumaraswamy-G* dengan parameter (α dan β).
2. Menduga parameter distribusi *Kumaraswamy-G* dengan menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM).
3. Mengetahui efek ukuran sampel dalam menduga distribusi Kumaraswamy-G

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan bermanfaat untuk memberikan sumbangan pemikiran bagi peneliti lain tentang karakteristik penduga parameter distribusi *Kumaraswamy-G* dengan metode *Probability Weighted Moment* yang meliputi sifat tak bias, ragam minimum, dan konsisten serta varians dan kovarians asimtotik penduga parameter distribusi *Kumaraswamy-G* pada metode pendugaan *Probability Weighted Moment* (PWM).

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Kumaraswamy

Distribusi Kumaraswamy diperkenalkan oleh seorang yang bernama Poondi Kumaraswamy. Distribusi Kumaraswamy merupakan distribusi peluang kontinu yang didefinisikan pada interval [0,1] . Distribusi Kumaraswamy sangat mirip dengan distribusi Beta namun lebih sederhana untuk digunakan dalam studi simulasi karena sederhana bentuk tertutup dari kedua fungsi kepekatan peluang dan fungsi distribusi kumulatif

Definisi 2.1

Fungsi peluang densitas dari distribusi Kumaraswamy adalah:

$$g(x:\alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}, \qquad \text{dimana } x \in [0,1]$$

Dalam hal ini α dan β adalah bentuk parameter tidak negatif.

Sedangkan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi kumaraswamy yaitu :

$$G(x:\alpha,\beta) = \int_0^x g(x:\alpha,\beta)\, dx = 1 - (1-x^{\alpha})^{\beta}\ .$$

(Kumaraswamy,1980)

2.2 Distribusi Generalized Kumaraswamy (Kumaraswamy-G)

Distribusi *Kumaraswamy-G* merupakan perluasan dari distribusi Kumaraswamy dengan dua parameter positif (α,β). Dilihat dari parameternya distribusi kumaraswamy dan distribusi kumaraswamy-g memiliki 2 parameter yang sama.

Definisi 2.2

Fungsi peluang densitas dari distribusi Kumaraswamy-G adalah:

$$f(x) = \alpha\beta g(x)G^{\alpha-1}(x)\{1-G^{\alpha}(x)\}^{\beta}, \qquad (2.2)$$

Sedangkan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Kumaraswamy- G yaitu :

$$f(x) = 1-\{1-G^{\alpha}(x)\}^{\beta}$$

Dimana $g(x) = dG(x)/dx$. Distribusi Kumaraswamy-G memiliki 2 parameter bentuk $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

(Corderio, de Castro,2011)

2.2.1 Nilai Harapan Distribusi Kumaraswamy-G

Nilai harapan dari distribusi Kumaraswamy-G adalah sebagai berikut :

$$E(X) = \int_0^1 x\, f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x\, \alpha\beta g(x)G^{\alpha-1}(1 - G^{\alpha}(x))^{\beta-1}dx$$

$$= \int_0^1 x\ \alpha^2\beta^2\, x^{\alpha-1}\, (1 - x^{a})^{b-1}\, (1-(1 - x^{a})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1-(1 - x^{a})^{\beta}\big)^{\beta-1}\big)dx$$

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 x^{\alpha-1+1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}\,(1\text{-}(1-x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha-1})(1$$
$$- \left(1\text{-}(1-x^{\alpha})^{\beta})^{\beta-1}\right)dx$$

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 x^{\alpha}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}(1\text{-}(1-x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha-1})(1-\left(1\text{-}(1-x^{\alpha})^{\beta})^{\beta-1}\right)\,dx$$

Misal:

$y = x^{\alpha}$

$y^{\frac{1}{\alpha}} = x$

$dy = \alpha x^{\alpha-1}\,dx$

Batas : x = 0 y = 0

x = 1 y = 1

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 (y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}\,(1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1$$
$$- \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}\frac{dy}{\alpha(y^{\frac{1}{a}})^{\alpha-1}\,dx}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2}{a}\int_0^1 \frac{(y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}}{(y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1}}\,(1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}\,dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 \frac{y^1}{y^{(1-\frac{1}{a})}}\,(1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}\,dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 \frac{1}{y^{-\frac{1}{\alpha}}}\,(1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}\,dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}}(1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}dy$$

Misal:

$u = 1 - (1-y)^{\beta}$

$du = \beta(1-y)^{\beta-1}\, dy$

$y = 1 - (1-y)^{1/\beta}$

Batas : y = 0 u = 0

y = 1 u = 1

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} (1-y)^{\beta-1} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} \frac{du}{\beta(1-y)^{\beta-1}\, dy}$

$$= \alpha\beta \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$$

$= \alpha\beta \int_0^1 1 - (1-u)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{1}{\alpha}} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$

Dengan menggunakan perluasan binomial :

$(1 - (1-u)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{1}{\alpha}}) = \sum_j^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}}$

Maka :

$= \alpha\beta \int_0^1 \sum_j^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$

$= \alpha\beta \int_0^1 \sum_j^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1} (u)^{\alpha-1}\, du$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \int_0^1 (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1} (u)^{\alpha-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \int_0^1 (u)^{\alpha-1+1} (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1+1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \beta\left(\alpha, \frac{j}{\beta} + \beta\right)$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta} + \beta)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{j}{\beta} + \beta\right)}$$

Maka diperoleh nilai $E(X)$ dari distribusi Kumaraswamy yaitu :

$$E(X) = \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta} + \beta)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{j}{\beta} + \beta\right)} \tag{2.3}$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $E(X^2)$ yaitu sebagai berikut :

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \, \alpha\beta g(x) G^{\alpha-1}(1 - G^{\alpha}(x))^{\beta-1} dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \; \alpha^2\beta^2 \, x^{\alpha-1} \, (1 - x^{\alpha})^{b-1} \, (1\text{-} (1 - x^{a})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{-} (1 - x^{a})^{\beta})^{\beta-1}\big) dx$$

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 x^{\alpha-1+2}(1 - x^{\alpha})^{\beta-1} \, (1\text{-} (1 - x^{a})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{-} (1 - x^{a})^{\beta})^{\beta-1}\big) dx$$

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 x^{\alpha+1}(1 - x^{\alpha})^{\beta-1}(1\text{-} (1 - x^{a})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{-} (1 - x^{a})^{\beta})^{\beta-1}\big) \, dx$$

Misal:

$y = x^{\alpha}$

$y^{\frac{1}{\alpha}} = x$

$dy = \alpha x^{\alpha-1}\, dx$

Batas : x = 0   y = 0

x = 1   y = 1

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 (y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha+1} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1} (1 - \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1} \frac{dy}{\alpha (y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1}\, dx}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2}{a} \int_0^1 \frac{(y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha+1}}{(y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1} (1 - \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1} dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 \frac{y^{(1+\frac{1}{a})}}{y^{(1-\frac{1}{a})}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1} (1 - \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1} dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 \frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{y^{-\frac{1}{a}}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1} (1 - \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1} dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1} (1 - \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1} dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{2}{a}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1} (1 - \left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1} dy$$

Misal:

$u = 1-(1-y)^{\beta}$

$du = \beta(1-y)^{\beta-1}\, dy$

$y = 1 - (1 - y)^{1/\beta}$

Batas : y = 0   u = 0

y = 1   u = 1

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{2}{\alpha}} (1-y)^{\beta-1} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} \frac{du}{\beta(1-y)^{\beta-1}\, dy}$$

$$= \alpha\beta \int_0^1 y^{\frac{2}{\alpha}} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \int_0^1 1 - (1-u)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{2}{\alpha}} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$$

Dengan menggunakan perluasan binomial :

$$(1 - (1-u)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{2}{\alpha}}) = \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}}$$

Maka :

$$= \alpha\beta \int_0^1 \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \int_0^1 \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1} (u)^{\alpha-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \int_0^1 (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1} (u)^{\alpha-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \int_0^1 (u)^{\alpha-1+1} (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1+1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \beta\left(\alpha, \frac{j}{\beta} + \beta\right)$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}$$

Maka diperoleh nilai $E(X^2)$ dari distribusi Kumaraswamy-G yaitu :

$$E(X^2) = \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)} \tag{2.4}$$

2.2.2 Ragam Distribusi Kumaraswamy-G

Ragam dari distribusi *Kumaraswamy-G* diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.3) dan (2.4) yaitu :

$$Var\,(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)} - \left[\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right]^2$$

$$= \left(\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right) - \left[\left(\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right)\right]^2$$

$$= \left(\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)} \right) - \alpha^2\beta^2 \left(\sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{j}{\beta}+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)} \right)^2$$

Sehingga diperoleh nilai dari Var(X) dari distribusi Kumaraswamy yaitu :

$$Var(X) = \left(\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)} \right) - \alpha^2\beta^2 \left(\sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{j}{\beta}+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)} \right)^2 \tag{2.5}$$

2.3 Metode *Probability Weighted Moment* (PWM)

Definisi 2.3

Secara umum metode *Probability Weighted Moment* (PWM) didefinisikan sebagai berikut :

$$M_{r,s,t} = E[(X(F))^r (F(x))^s (1 - F(x))^t] \tag{2.6}$$

Dimana

X(F) = invers distribusi

F(x) = distribusi fungsi kumulatif

r,s,t = bilangan real

Untuk nilai s = t = 0dan r adalah bilangan bulat tidak negative, maka dapat ditulis:

$$M_{r,0,0} = E[(X(F))^r \, (F(x))^0 \, (1-F(x))^0]$$

(Greenwood,et a., 1979)

Adapun kelas dari fungsi PWM diatas dengan X(F) adalah invers dari fungsi distribusi kumulatif maka fungsi PWM adalah

$$M_{1,s,t} \, (r = 1, s = 0,1,2,\ldots, t = 0,1,2,\ldots).$$

Sementara $M_{1,s,t}$ dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu s = 0 ($M_{1,0,t}$) dan t = 0 ($M_{1,s,0}$), sehingga fungsi diatas dapat dinyatakan dalam bentuk

$M_{1,0,t} = E[X(F)(1 - F(x)^t]$ dimana $M_{1,0,t} = \int_0^1 [X(F)(1 - F(x)t] \; dF$ dan

$M_{1,s,0} = E[X(F)(F(x)^s]$ dimana $M_{1,s,0} = \int_0^1 [X(F)(F(x)^s \,] dF$

Dengan menyelesaikan M_t akan didapatkan penduga parameter yang masih dinyatakan dalam bentuk M_t. Adapun penduga tak bias bagi M_t diperoleh berdasarkan sampel tataan $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$ dari sampel berukuran n, dan t bilangan positif dengan menyelesaikan persamaan

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t} \frac{\binom{n-i}{t}}{\binom{n-i}{t}} \, x_{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t} \frac{(n-i)\ldots(n-i-t+1)}{(n-1)\ldots(n-t)} \, x_{(i)}$$

Selanjutnya dengan mengganti M_t dengan $\widehat{M}_t$ akan didapatkan penduga parameter dari setiap parameter distribusi.

Selain itu dalam mencari nilai Probability Weighted Moment dapat dicari juga menggunakan persamaan sebagai berikut :

$$M_{i,j,k} = \int_0^1 [X(F)(1 - F(x)^k] \; dF$$

Dimana l,j,k adalah nilai real, sehingga :

$$M_{i,0,k} = M_k$$

Dimana l=1 dan j=0 . untuk nilai M_k, dimana untuk nilai k adalah bilangan tidak negative maka :

$$M_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\binom{n-i}{k}}{\binom{n-1}{k}}$$

Dimana *xi*,nilai *i* = 1,….,n,

(Greenwood,et a., 1979)

2.4 Pendugaan Parameter

Untuk mengkaji karakteristik penduga dari distribusi Kumaraswamy-G dengan menggunakan metode PWM, maka harus memenuhi sifat-sifat penduga yang baik diantaranya sebagai berikut:

2.4.1 Penduga Tak Bias

Dalam menduga suatu parameter hal yang harus di kaji adalah karakteristik dalam pendugaan parameter. Salah satu sifat penduga yang baik dalam menduga parameter yaitu sifat tak bias. Suatu penduga dikatakan memiliki sifat tak bias apabila asumsi yang telah ditentukan terpenuhi.

Definisi 2.4

Penduga U(X) dikatakan sebagai penduga tak bias bagi $g(\theta)$ jika :

$$E\big(U(X)\big) = g(\theta), \qquad \forall\, \theta \in \Omega$$

(Hogg and Craig,1995).

2.4.2 Ragam Minimum

Salah satu sifat yang baik dalam pendugaan parameter yaitu memiliki ragam yang minimum. Dalam hal ini akan dijelaskan definisi mengenai ragam minimun dalam suatu penduga yaitu :

Definisi 2.5

Misalkan T(X) merupakan penduga bagi $\tau(\theta)$ maka T_1(X) dikatakan sebagai penduga yang memiliki ragam minimum, jika :

$$\text{Var } T_1(X) \leq \text{Var } T(X)$$

Dan T(X) merupakan sembarang penduga bagi $\tau(\theta)$ untuk $\theta \in \Omega$, dimana :

$$Var\big(T(X)\big) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{nE[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)]^2}$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

2.4.2.1 Informasi Fisher

Dalam menduga suatu parameter yang memiliki sifat ragam yang minimum harus memenuhi beberapa faktor pendukung, yaitu informasi Fisher.

Dalam hal ini informasi Fisher digunakan untuk menemukan pertidaksamaan *Rao-Cramer*. Berikut akan dijelaskan mengenai informasi Fisher yaitu :

Definisi 2.6

Misalkan X variabel acak dengang fungsi kepekatan (p.d.f) f(x,θ), $\theta \epsilon \Omega$, informasi Fisher dinotasikan dengan $I(\theta)$, dimana

$$\mathrm{I}(\theta) = \mathrm{E}\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}[\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}]^2 \;\; f(x;\theta)\, dx$$

Atau $\mathrm{I}(\theta)$ dapat dihitung dengan cara berikut :

$$\mathrm{I}(\theta) = -\mathrm{E}\left\{\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} - \left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right] \; f(x;\theta)\, dx$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.4.2.2 Matriks Informasi Fisher

Pada kasus multivariat, jika θ merupakan suatu vektor dari parameter, maka *I*(θ) adalah matriks informasi fisher.

Definisi 2.7

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang f(x; θ_1, θ_2) (θ_1, θ_2) ϵ Ω, dengan syarat keteraturannya ada. Tanpa menggambarkan syaratnya secara detail, misalkan ruang dari X dimana f(x; θ_1, θ_2) > 0 tidak melibatkan θ_1 dan θ_2, serta dapat diturunkan dibawah integral. Jadi, matriks informasi fisher dapat dituliskan sebagai berikut:

$$l_n = -n \begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial{\theta_1}^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial{\theta_2}^2}\right] \end{bmatrix}$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.4.2.3 *Cramer-Rao Lower Bound* (CRLB)

Menurut Hog dan Craig tahun 1995, pertidaksamaan *Rao-Cramer* dapat dituliskan sebagai berikut :

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{[(k'(\theta)]^2}{\left[nE\left(\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]} = \frac{[(k'(\theta)]^2}{n\mathrm{I}(\theta)}$$

Jika $Y = u(X1, X2, \ . \ . \ ., Xn)$ adalah penduga tak bias bagi θ, jika $k(\theta) = \theta$ sehingga $k'(\theta) = 1$ kemudian *Rao-Cramer* menjadi :

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n\mathrm{I}(\theta)}$$

Dimana $\frac{1}{n\mathrm{I}(\theta)}$ disebut sebagai *Rao-Cramer Low Boud.*

Definisi 2.8

Misalkan Y merupakan penduga tak bias dari suatu parameter θ dalam kasus pendugaan titik. Statistik Y disebut penduga yang efisien dari θ jika dan hanya jika ragam dari Y mencapai batas bawah *Rao-Cramer Lower Bound* .

(Hogg and Craig, 1995).

2.4.3 Konsisten

Sifat lain yang harus dimiliki oleh suatu penduga tak bias dan varians minimum adalah sifat kekonsistenan dari penduga tersebut, dimana saat ukuran sampel semakin besar maka penduga tersebut akan semakin mendekati parameter populasi sesungguhnya.

Definisi 2.9

U(X) dikatakan sebagai penduga konsisten bagi g(θ) jika $U(\boldsymbol{X})^{P} \rightarrow$ g(θ) untuk n→ ∞, θ ϵ Ω yaitu bila:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left| U(\boldsymbol{X}) - g(\theta) \right| \geq \varepsilon\} = 0$$

Atau

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left| U(\boldsymbol{X}) - g(\theta) \right| < \varepsilon\} = 1$$

(Hogg and Craig, 1995)

Dari definisi tersebut adapun teorema yang mendukung dalam sifat karakteristik penduga yang konsisten yaitu sebagai berikut :

Teorema 2.1 (Chebyshev's Inequality)

Misalkan variabel X merupakan variabel acak dengan rata – rata μ dan ragam σ^2. Untuk $\forall\ \varepsilon > 0$,

$$P(|X-\mu| \ \geq \ \varepsilon) \geq \ 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Atau

$$P(|X-\mu| \ \geq \ \varepsilon) \leq \ \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(Lansen dan Marx, 2012).

Teorema 2.2

Jika U(X) = U(X_1, X_2,..., X_n) merupakan penduga dari suatu parameter θ, maka berlaku :

- $\lim_{n\to\infty} Var_{\theta}\, U(X) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} Bias\, U(X) = 0$

Untuk $\forall\ \theta \in \theta$, U(X) merupakan penduga yang kosisten dari suatu parameter θ

(Casella and Berger, 2002)

2.5. Metode Newton Raphson

Apabila dalam proses pendugaan parameter di dapatkan persamaan akhir yang non linier maka tidak mudah memperoleh pendugaan parameter tersebut, sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk memecahkan persamaan non linier tersebut. Salah satu metode yang digunakan untuk memecahkan sistem persamaan non linier adalah metode Newton Raphson. Metode Newton Rapshon adalah metode untuk menyelesaikan persamaan non linier secara iteratif.

Jika θ_0 merupakan nilai awal (inisialisasi) dari θ atau θ_0 merupakan nilai ke-1 dari θ, maka dapat dimisalkan $\theta_0 = \theta_i$ dan $\theta = \theta_{i+1}$ dengan i awal = 0. Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan lebih dari satu parameter. Misal $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ maka iterasinya yaitu sebagai berikut :

$$\theta_{i+1} = \theta_i - [H^{-1}g]$$

Dimana $\hat{\theta}_{i+1} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1_{i+1}} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{pi+1} \end{bmatrix}$ dan $\hat{\theta}_i = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1_i} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{pi} \end{bmatrix}$

Vektor gradien dan vektor turunan pertama terhadap parameternya dan dilambangkan dengan $g(\theta)$ yaitu :

$$g(\theta) = \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln(\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

Matriks Hessien atau matriks turunan kedua terhadap parameternya, dilambangkan dengan $H(\theta)$ yaitu :

$$H(\theta) = \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_1{}^2} & \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_1\partial\theta_n} \\ \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_1{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_2\partial\theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_n\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_n\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln(\theta)}{\partial\theta_n{}^2} \end{bmatrix}$$

(Seber and Wild, 2003).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2017/2018, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode penelitian yang digunakan adalah studi pustaka dengan menggunakan buku-buku penunjang, skripsi, dan jurnal yang berhubungan dengan penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membuat grafik distribusi *Kumaraswamy-G* (α, β) dengan nilai parameter yang berubah menggunakan software R versi 3.3.2.
2. Menduga parameter *Kumaraswamy-G* (α, β) menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Mencari fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari distribusi *Kumaraswamy-G* (α, β).
   b. Mencari invers dari distribusi *Kumaraswamy-G* (α, β).

c. Mencari momen ke-r atau fungsi PWM.

d. Mencari penduga parameter (α, β) dari distribusi *Kumaraswamy-G* (α, β) yang tidak bias diselesaikan secara analitik sehingga menggunakan software R.

3. Melakukan simulasi menggunakan software R 3.3.3, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

   a. Membangkitkan data berukuran 50, 75,100 dan 150 dengan masing-masing pengulangan sebanyak 100 kali.

   b. Mencari nilai dugaan parameter dari penduga yang telah dicari menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM).

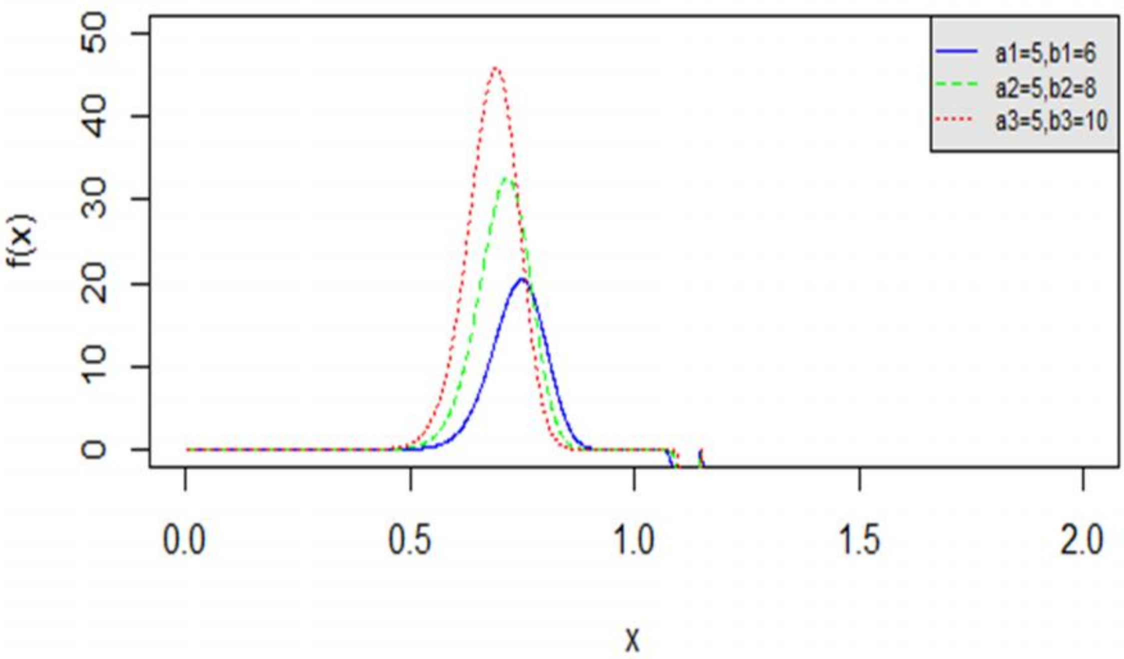
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas mengenai Pedugaan Parameter Distribusi Kumaraswamy-G dengan Metode *Probability Weighted Moment* (PWM) dimana dalam penelitian ini ada beberapa langkah – langkah dalam menduga suatu parameter. Langkah pertama yang digunakan yaitu membuat dan melihat grafik fungsi dari distribusi Kumaraswamy-G dengan nilai parameter yang berbeda – beda. Selanjutnya mencari penduga parameter (α,β) dari distribusi Kumaraswamy-G dengan menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) melakukan simulasi data pada distribusi Kumaraswamy-G Sebagai berikut :

4.1. Kurva Fungsi Kepekatan Peluang Distribusi Kumaraswamy-G (α,β)

Penelitian ini dilakukan untuk melihat bentuk kurva dari fungsi kepekatan peluang distribusi Kumaraswamy-g dengan menggunakan sofware R versi 3.3.2. dengan kombinasi dari nilai parameter α dan β. Adapun hasilnya sebagai berikut :

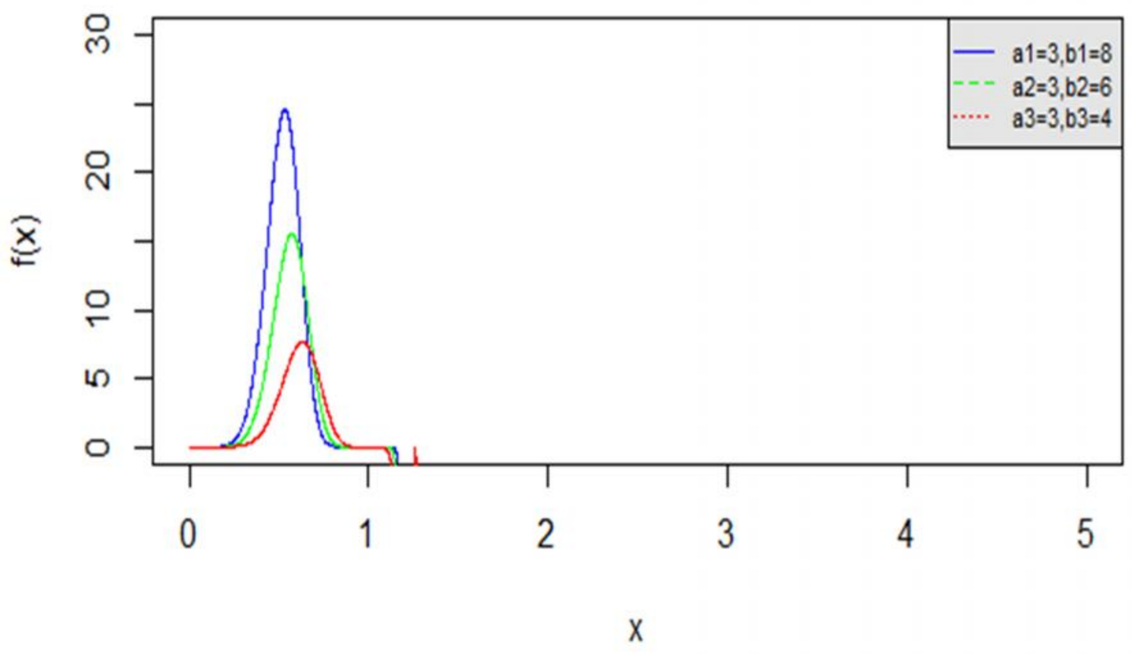
4.1.1. Kurva saat α Tetap dan β Meningkat



Gambar 1. Kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a tetap dan b meningkat

Dari gambar 1 di atas terlihat bahwa kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai b meningkat, dengan nilai a tetap. Kurva berwarna biru menunjukan nila a= 5 dan b= 6, untuk kurva berwarna hijau nilai a= 5 dan b= 8, sedangkan untuk kurva berwarna merah nilainya menunjukan a=5 dan b= 10. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kurva yang dihasilkan semakin meningkat. Sehingga dapat di simpulkan bahwa semakin besar nilai parameter b maka bentuk kurva yang dihasilkan akan semakin meruncing.

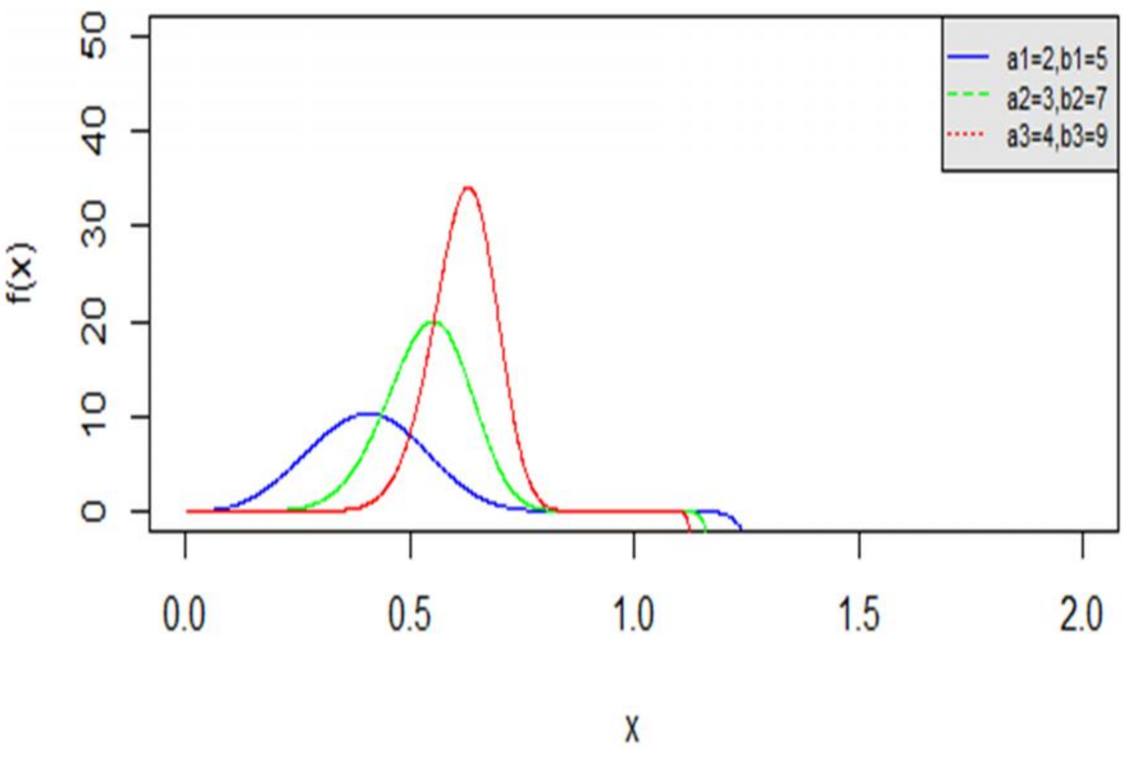
4.1.2. Kurva saat α Tetap dan β Menurun



Gambar 2. Kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a tetap dan b menurun

Dari gambar 2 di atas terlihat bahwa kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai b menurun, dengan nilai a tetap. Kurva berwarna biru menunjukan nila a= 3 dan b= 8, untuk kurva berwarna hijau nilai a= 3 dan b= 6, sedangkan untuk kurva berwarna merah nilainya menunjukan a= 3 dan b= 4. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kurva yang dihasilkan semakin menurun. Sehingga dapat di simpulkan bahwa semakin kecil nilai parameter b maka bentuk kurva yang dihasilkan akan menurun atau landai.

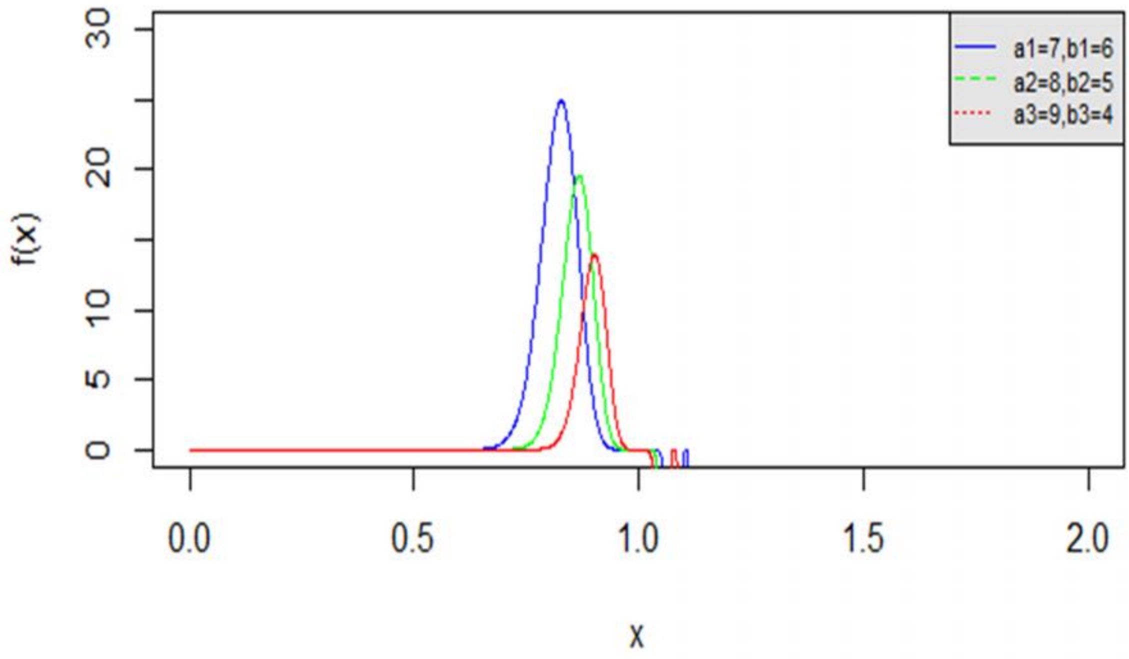
4.1.3. Kurva saat α Meningkat dan β Meningkat



Gambar 3. Kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a meningkat dan b meningkat

Dari gambar 3 di atas terlihat bahwa kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a dan b meningkat. Kurva berwarna biru menunjukan nila a= 2 dan b= 5, untuk kurva berwarna hijau nilai a= 3 dan b= 7, sedangkan untuk kurva berwarna merah nilainya menunjukan a= 4 dan b = 9. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kurva yang dihasilkan semakin meningkat. Sehingga dapat di simpulkan bahwa semakin besar nilai parameter a dan b maka bentuk kurva yang dihasilkan akan semakin runcing.

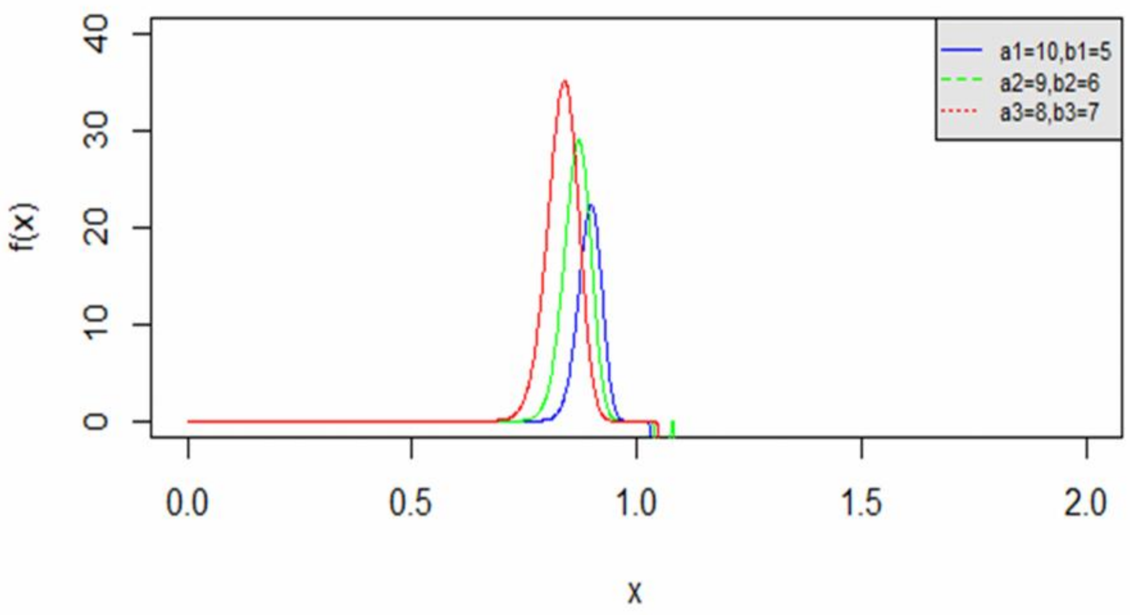
4.1.4. Kurva saat α Meningkat dan β Menurun



Gambar 4. Kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a meningkat dan b menurun

Dari gambar 4 di atas terlihat bahwa kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a meningkat dan b menurun. Kurva berwarna biru menunjukan nila a= 7 dan b= 6, untuk kurva berwarna hijau nilai a= 8 dan b= 5, sedangkan untuk kurva berwarna merah nilainya menunjukan a= 9 dan b = 4. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kurva yang dihasilkan semakin menurun. Sehingga dapat di simpulkan bahwa semakin besar nilai parameter a dan semakin kecil nilai parameter b maka bentuk kurva yang dihasilkan akan semakin melandai ke arah kanan.

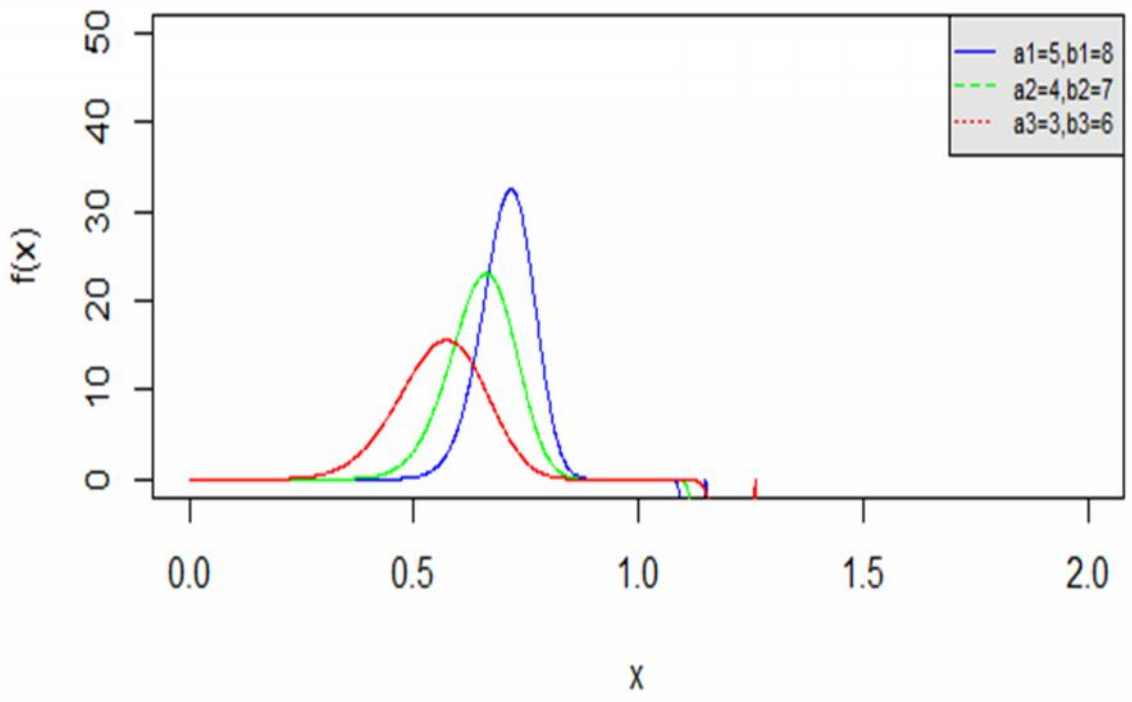
4.1.5. Kurva saat α Menurun dan β Meningkat



Gambar 5. Kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a menurun dan b meningkat

Dari gambar 5 di atas terlihat bahwa kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai b meningkat, dengan nilai a menurun. Kurva berwarna biru menunjukan nila a= 10 dan b= 5, untuk kurva berwarna hijau nilai a= 9 dan b= 6, sedangkan untuk kurva berwarna merah nilainya menunjukan a= 8 dan b= 7. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kurva yang dihasilkan semakin menurun. Sehingga dapat di simpulkan bahwa semakin kecil nilai parameter a dan semakin besar nilai parameter b maka bentuk kurva yang dihasilkan akan semakin melandai ke arah kiri.

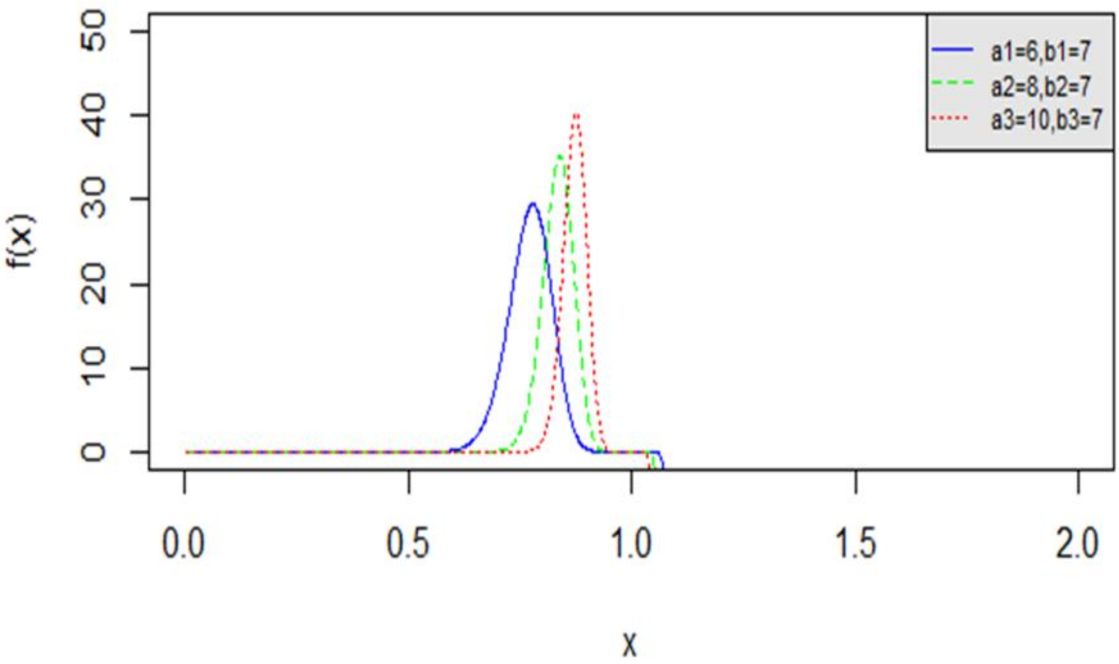
4.1.6. Kurva saat α Menurun dan β Menurun



Gambar 6. Kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a menurun dan b menurun

Dari gambar 6 di atas terlihat bahwa kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a dan b menurun. Kurva berwarna biru menunjukan nila a= 5. dan b= 8, untuk kurva berwarna hijau nilai a= 4 dan b= 7, sedangkan untuk kurva berwarna merah nilainya menunjukan a= 3 dan b= 6. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kurva yang dihasilkan semakin menurun. Sehingga dapat di simpulkan bahwa semakin kecil nilai parameter a dan semakin kecil juga nilai parameter b maka bentuk kurva yang dihasilkan akan semakin menurun.

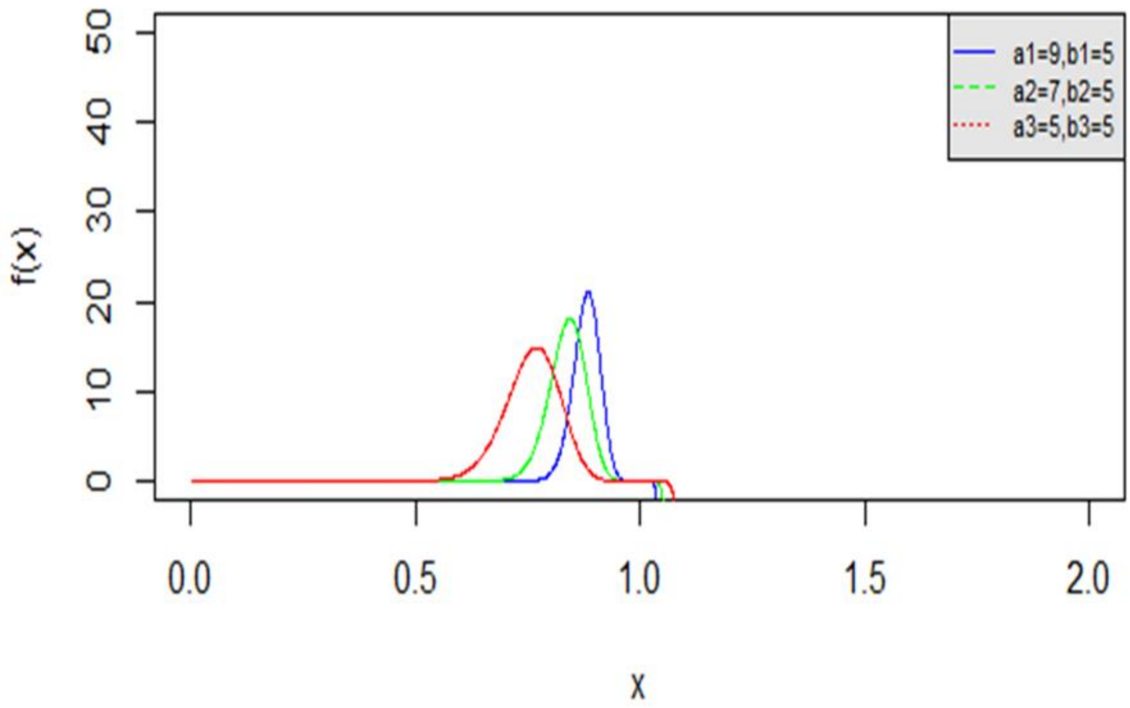
4.1.7. Kurva saat α Meningkat dan β Tetap



Gambar 7. Kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a meningkat dan b tetap

Dari gambar 7 di atas terlihat bahwa kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a meningkat dan nilai b tetap. Kurva berwarna biru menunjukan nila a= 6 dan b= 7, untuk kurva berwarna hijau nilai a= 8 dan b= 7, sedangkan untuk kurva berwarna merah nilainya menunjukan a= 10 dan b= 7. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kurva yang dihasilkan semakin meningkat. Sehingga dapat di simpulkan bahwa semakin besar nilai parameter a maka bentuk kurva yang dihasilkan akan semakin runcing.

4.1.8. Kurva saat α Menurun dan β Tetap



Gambar 8. Kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a menurun dan b tetap

Dari gambar 8 di atas terlihat bahwa kurva fungsi kepekatan peluang dari distribusi Kumaraswamy-G pada saat nilai a menurun dan nilai b tetap. Kurva berwarna biru menunjukan nila a= 9 dan b= 5, untuk kurva berwarna hijau nilai a= 7 dan b= 5, sedangkan untuk kurva berwarna merah nilainya menunjukan a= 5 dan b= 5. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kurva yang dihasilkan semakin menurun. Sehingga dapat kita simpulkan bahwa semakin kecil nilai parameter a maka bentuk kurva yang dihasilkan akan semakin melandai ke arah kiri.

4.2 Nilai $E(X)$ dan $Var(X)$ Distribusi Kumaraswamy-G

Dari distribusi Kumaraswamy-G selanjutnya akan dicari nilai ekspetasi $E(X)$ dan varian $Var(X)$ dari distribusi Kumaraswamy-G yaitu :

$$E(X) = \int_0^1 x\, f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x\, \alpha\beta g(x) G^{\alpha-1}(1 - G^{\alpha}(x))^{\beta-1} dx$$

$$= \int_0^1 x\ \alpha^2\beta^2\, x^{\alpha-1}\, (1 - x^{\alpha})^{b-1}\, (1\text{-}\, (1 - x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{-}\, (1 - x^{\alpha})^{\beta})^{\beta-1}\big) dx$$

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 x^{\alpha-1+1}(1 - x^{\alpha})^{\beta-1}\, (1\text{-}\, (1 - x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{-}\, (1 - x^{\alpha})^{\beta})^{\beta-1}\big) dx$$

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 x^{\alpha}(1 - x^{\alpha})^{\beta-1}(1\text{-}\, (1 - x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{-}\, (1 - x^{\alpha})^{\beta})^{\beta-1}\big)\, dx$$

Misal:

$y = x^{\alpha}$

$y^{\frac{1}{\alpha}} = x$

$dy = \alpha x^{\alpha-1}\, dx$

Batas : x = 0 y = 0

x = 1 y = 1

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 (y^{\frac{1}{a}})^{\alpha}\ (1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1$$

$$-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}\frac{dy}{\alpha(y^{\frac{1}{a}})^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2}{a}\int_0^1 \frac{(y^{\frac{1}{a}})^{\alpha}}{(y^{\frac{1}{a}})^{\alpha-1}}\ (1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 \frac{y^1}{y^{(1-\frac{1}{a})}}\ (1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 \frac{1}{y^{-\frac{1}{a}}}\ (1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{a}}\,(1-y)^{\beta-1}\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\alpha-1}(1-\left(1-(1-y)^{\beta}\right)^{\beta-1}dy$$

Misal:

$u = 1-(1-y)^{\beta}$

$du = \beta(1-y)^{\beta-1}\ dy$

$y = 1-(1-y)^{1/\beta}$

Batas : y = 0 u = 0

y = 1 u = 1

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{a}}\,(1-y)^{\beta-1}\ (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\ \frac{du}{\beta(1-y)^{\beta-1}\,dy}$$

$$= \alpha\beta \int_0^1 y^{\frac{1}{a}}\ (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\ du$$

$$= \alpha\beta \int_0^1 1-(1-u)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{1}{a}}\ (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\ du$$

Dengan menggunakan perluasan binomial :

$$(1-(1-u)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{1}{\alpha}}) = \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}}(-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}}$$

Maka :

$$= \alpha\beta \int_0^1 \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}}(-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}} (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$$

$$=\alpha\beta \int_0^1 \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}}(-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1} (u)^{\alpha-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}}(-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \int_0^1 (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1} (u)^{\alpha-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}}(-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \int_0^1 (u)^{\alpha-1+1} (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1+1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}}(-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \beta\left(\alpha, \frac{j}{\beta}+\beta\right)$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}}(-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}$$

Maka diperoleh nilai $E(X)$ dari distribusi Kumaraswamy-G yaitu :

$$E(X) = \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}}(-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)} \tag{4.1}$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $E(X^2)$ yaitu sebagai berikut :

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \, f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \, \alpha\beta g(x) G^{\alpha-1}(1 - G^{\alpha}(x))^{\beta-1} dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \;\; \alpha^2\beta^2 \, x^{\alpha-1} \, (1 - x^{\alpha})^{b-1} \, (1\text{–}\,(1 - x^{a})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{–}\,(1 - x^{a})^{\beta})^{\beta-1}\big)dx$$

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 x^{\alpha-1+2}(1 - x^{\alpha})^{\beta-1} \, (1\text{–}\,(1 - x^{a})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{–}\,(1 - x^{a})^{\beta})^{\beta-1}\big)dx$$

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 x^{\alpha+1}(1 - x^{\alpha})^{\beta-1}(1\text{–}\,(1 - x^{a})^{\beta})^{\alpha-1})(1 - \big(1\text{–}\,(1 - x^{a})^{\beta})^{\beta-1}\big) \, dx$$

Misal:

$y = x^{\alpha}$

$y^{\frac{1}{\alpha}} = x$

$dy = \alpha x^{\alpha-1} \, dx$

Batas : x = 0 y = 0

x = 1 y = 1

$$= \alpha^2\beta^2 \int_0^1 (y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha+1} \, (1 - y)^{\beta-1} \big(1 - (1 - y)^{\beta}\big)^{\alpha-1}(1 - \big(1 - (1 - y)^{\beta}\big)^{\beta-1} \frac{dy}{\alpha(y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2}{a} \int_0^1 \frac{(y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha+1}}{(y^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1}} \, (1 - y)^{\beta-1} \big(1 - (1 - y)^{\beta}\big)^{\alpha-1}(1 - \big(1 - (1 - y)^{\beta}\big)^{\beta-1} \, dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 \frac{y^{(1+\frac{1}{\alpha})}}{y^{(1-\frac{1}{\alpha})}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^\beta\right)^{\alpha-1} (1-\left(1-(1-y)^\beta\right)^{\beta-1} dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 \frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{y^{-\frac{1}{\alpha}}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^\beta\right)^{\alpha-1} (1-\left(1-(1-y)^\beta\right)^{\beta-1} dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^\beta\right)^{\alpha-1} (1-\left(1-(1-y)^\beta\right)^{\beta-1} dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{2}{\alpha}} (1-y)^{\beta-1} \left(1-(1-y)^\beta\right)^{\alpha-1} (1-\left(1-(1-y)^\beta\right)^{\beta-1} dy$$

Misal:

$u = 1-(1-y)^\beta$

$du = \beta(1-y)^{\beta-1}\, dy$

$y = 1-(1-y)^{1/\beta}$

Batas : y = 0 u = 0

y = 1 u = 1

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{2}{\alpha}} (1-y)^{\beta-1} (u)^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} \frac{du}{\beta(1-y)^{\beta-1}}$$

$$= \alpha\beta \int_0^1 y^{\frac{2}{\alpha}} (u)^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \int_0^1 1-(1-u)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{2}{\alpha}} (u)^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1}\, du$$

Dengan menggunakan perluasan binomial :

$$(1-(1-u)^{\frac{1}{\beta}})^{\frac{2}{\alpha}}) = \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}}$$

Maka :

$$= \alpha\beta \int_0^1 \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}} (u)^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \int_0^1 \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1} (u)^{\alpha-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \int_0^1 (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1} (u)^{\alpha-1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \int_0^1 (u)^{\alpha-1+1} (1-u)^{\frac{j}{\beta}+\beta-1+1}\, du$$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \beta\left(\alpha, \frac{j}{\beta}+\beta\right)$$

$$= \alpha\beta \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}$$

Maka diperoleh nilai $E(X^2)$ dari distribusi Kumaraswamy-G yaitu :

$$E(X^2) = \quad \alpha\beta \sum_j^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}$$

(4.2)

Kemudian akan dicari nilai Var(X) dari distribusi Kumaraswamy-G yaitu sebagai berikut :

$$Var\,(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}$$

$$- \left[\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right]^2$$

$$= \left(\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right)$$

$$- \left[\left(\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right)\right]^2$$

$$= \left(\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right)$$

$$- \alpha^2\beta^2 \left(\sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{j}{\beta}+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right)^2$$

Sehingga diperoleh nilai dari Var(X) dari distribusi Kumaraswamy-G yaitu :

$$Var(X) = \left(\alpha\beta \sum_{j}^{\frac{2}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{2}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{j}{\beta}+\beta)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right)$$

$$- \alpha^2\beta^2 \left(\sum_{j}^{\frac{1}{\alpha}} (-1)^j \binom{\frac{1}{\alpha}}{j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{j}{\beta}+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{j}{\beta}+\beta\right)}\right)^2$$

(4.3)

4.3 Fungsi Kumulatif dari Distribusi Kumaraswamy-G

Untuk mendapatkan fungsi kumulatif dari distribusi *Kumaraswamy-G* yaitu dengan cara mengintegralkan fungsi kepekatan peluangnya. Telah diketahui sebelumnya bahwa fungsi kepekatan peluang dari distribusi *Kumaraswamy-G* adalah sebagai berikut:

$f(\mathrm{x}) = \alpha\beta g(x) G^{\alpha-1}(x)\{1-G^{\alpha}(x)\}^{\beta-1}$, x ϵ (0,1)

dimana nilai $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$

$G(x) = 1-(1-\mathrm{x}^{\alpha})^{\beta}$

misal $\mathrm{u} = 1-\mathrm{x}^{\alpha}$

$\mathrm{du} = -\alpha\, \mathrm{x}^{\alpha-1}$

$G(x) = 1-\mathrm{u}^{\beta}$

$G'(x) = -\beta\,(\mathrm{u})^{\beta-1}\, du$

$= -\beta\,(\mathrm{u})^{\beta-1}\,(-\alpha \mathrm{x}^{\alpha-1})\, dx$

$= \beta\,(1-\mathrm{x}^{\alpha})^{\beta-1}\,(\alpha \mathrm{x}^{\alpha-1})\, dx$

$= \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-\mathrm{x}^{\alpha})^{\beta-1}$

$= g(x)$

Setelah diketahui nilai $g(x)$ maka selanjutnya akan dicari nilai fungsi kumulatif dari distribusi *Kumaraswamy-G*, sebagai berikut :

$f(\mathrm{x}) = \alpha\beta g(x) G^{\alpha-1}(x)\{1-G^{\alpha}(x)\}^{\beta-1}$, x ϵ (0,1)

$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(\mathrm{t})dt$

$= \int_0^x \alpha\beta g(x) G^{\alpha-1}(x)\{1-G^{\alpha}(x)\}^{\beta-1}\,\mathrm{dt}$

Misal $u = 1 - Gx^{\alpha}$

$du = -\alpha G x^{\alpha-1} dx$

Batas : $x = 0 \quad u = 1$

$x = 1 \quad y = 0$

$$= \int_0^x \alpha\beta g(x)\, Gx^{\alpha-1}\, (u)^{\beta-1} \frac{du}{-\alpha G x^{\alpha-1}}$$

$$= -\beta \int_0^x g(x)\, (u)^{\beta-1}$$

$$= -\int_0^x \frac{U^{\beta-1+1}}{\beta-1+1}$$

$$= -\int_0^x \frac{U^{\beta}}{\beta}$$

$$= -[\,(u)^b]_0^x$$

$$= -[\,(1 - Gx^{\alpha})^b]_0^x$$

$$== -[\,(1 - x^{a})^b - (1-0)^b]$$

$$F(x) = [1 - [1 - (1 - (1 - x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha}]^{\beta} \quad (4.4)$$

Diketahui sebelumnya bahwa nilai $G(x) = 1 - (1 - x^{\alpha})^{\beta}$ maka nilai kumulatif dari distribusi *Kumaraswamy-G* adalah $1 - [\,1 - G(x)^{\alpha}\,]^{\beta}$

Sehingga fungsi kumulatif dari distribusi Kumaraswamy-G (α, β) adalah

$$F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} [1 - (\,1 - G(x)^{\alpha})^{\beta}, & a > 0, \beta > 0, 0 < x < 1 \\ 0 \quad , & a < 0, \beta < 0, 0 < x < 1 \end{cases}$$

4.4 Fungsi Invers dari Distribusi Kumaraswamy-G

Untuk mencari fungsi invers dari distribusi *Kumaraswamy-G* yaitu dengan menggunakan persamaan (4.4), sebagai berikut:

$F(x) = [\,1-[1-(1-(1-x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha}\,]^{\beta}$

$1-F(x) \;= [1-(1-(1-x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha}\,]^{\beta}$

$[1-F(x)]^{1/\beta} = 1-(1-(1-x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha}$

$1-[1-F(x)]^{1/\beta} = (1-(1-x^{\alpha})^{\beta})^{\alpha}$

$[1-[1-F(x)]^{1/\beta}]^{1/\alpha} = 1-(1-x^{\alpha})^{\beta}$

$1-[1-[1-F(x)]^{1/\beta}]^{1/\alpha} = (1-x^{\alpha})^{\beta}$

$[1-[1-[1-F(x)]^{1/\beta}]^{1/\alpha}]^{1/\beta} = 1-x^{\alpha}$

$$[1-[1-[1-[1-F(x)]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}} = x \qquad (4.5)$$

Maka fungsi invers dari distribusi *Kumaraswamy-G* adalah x = [1– [1– [1– [1– $F(x)]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}$

4.5 Probability Weighted Moment untuk Distribusi Kumaraswamy-G

Untuk mendapatkan penduga dari distribusi *Kumaraswamy-G*, maka setelah diperoleh fungsi kumulatif dan inversnya, maka selanjutnya adalah mencari momen ke-r dengan menggunakan persamaan sebagai berikut :

$$M_{1,s,0} = \int_0^1 x(F)\,[F(x)]^s\,df$$

$$= \int_0^1 [1-[1-[1-[1-F(\mathrm{x})]^{\frac{1}{b}}]^{\frac{1}{\alpha}}]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}\;[F(x)]^s\,df$$

Karena nilai $F(x) dan\, df$ belum diketahui maka akan dicari terlebih dahulu nilai tersebut.

Misal :

$y = 1- [1- [1- [1- F(x)]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}]^{\frac{1}{\beta}}$

$1 - y = [1- [1- [1- F]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}]^{\frac{1}{\beta}}$

$[1 - y]^{\beta} = 1- [1- [1- F]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}$

$1 - [1 - y]^{\beta} = [1- [1- F]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}}$

$[1 - [1 - y]^{\beta}]^{\alpha} = 1- [1- F]^{\frac{1}{\beta}}$

$1 - [1 - [1 - y]^{\beta}]^{\alpha} = [1- F]^{\frac{1}{\beta}}$

$[1 - [1 - [1 - y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta} = 1- F$

$1 - [1 - [1 - [1 - y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta} = F$

$dF = \alpha\beta^2 [1- y]^{\beta-1} [1- [1- [1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta-1} [1- [1-y]^{\beta}]^{\alpha-1} dy$

Dengan batas – batas integral :

F = 0 maka y = 0

F = 1 maka y = 1

Untuk mempermudah perhitungan $X(F)$ dimisalkan menjadi $y^{\frac{1}{\alpha}}$ maka:

$= \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} [F(x)]^s\, df\, dy$

$= \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} [1 - [1 - [1 - [1 - y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta}]^{S} \alpha\beta^2 [1- y]^{\beta-1} [1- [1- [1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta-1} [1- [1- y]^{\beta}]^{\alpha-1} dy$

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} [1 - [1 - [1 - [1 - y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta}]^{S} [1- [1- [1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta-1} [1- [1-y]^{\beta}]^{\alpha-1} [1- y]^{\beta-1} dy$

(4.6)

Dengan menggunakan persamaan perluasan binomial yaitu sebagai berikut:

$$(1-m)^k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{K}{j} M^j$$

$[1-[1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta}]^{S} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta.k}$

Subsitusikan ke dalam persamaan (4.6) maka diperoleh :

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta.k} [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta-1} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha-1}$

$[1-y]^{\beta-1}\, dy$

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta.k+\beta-1} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha-1} [1-y]^{\beta-1}\, dy$

(4.7)

Dengan menggunakan persamaan perluasan dari binomial maka :

$[1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta.k+\beta-1} = \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1} (-1)^j \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha.j}$

Subsitusikan ke dalam persamaan (4.7) maka diperoleh :

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1} (-1)^j \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha.j} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha-1} [1-y]^{\beta-1}\, dy$

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1} (-1)^j \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha.j+\alpha-1} [1-y]^{\beta-1}\, dy$

(4.8)

Dengan menggunakan persamaan perluasan dari binomial maka :

$[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha.j+\alpha-1} = \sum_{t=0}^{\alpha.j+\alpha-1} (-1)^t \binom{\alpha.j+\alpha-1}{t=0} [1-y]^{\beta.t}$

Subsitusikan ke dalam persamaan (4.8) maka diperoleh :

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \; \sum_{k=0}^{s}(-1)^k \binom{s}{k} \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1}(-1)^j \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} \sum_{t=0}^{\alpha.j+\alpha-1}(-1)^t \binom{\alpha.j+\alpha-1}{t=0} [1-y]^{\beta.t}\,[1-y]^{\beta-1}\, dy$$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \; \sum_{k=0}^{s}(-1)^k \binom{s}{k} \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1}(-1)^j \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} \sum_{t=0}^{\alpha.j+\alpha-1}(-1)^t \binom{\alpha.j+\alpha-1}{t=0} [1-y]^{\beta.t+\beta-1}\, dy$$

$$= \alpha\beta^2 \sum_{k=0}^{s}(-1)^k \binom{s}{k} \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1}(-1)^j \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} \sum_{t=0}^{\alpha.j+\alpha-1}(-1)^t \binom{\alpha.j+\alpha-1}{t=0} \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} [1-y]^{\beta.t+\beta-1}\, dy$$

$$= \alpha\beta^2 \sum_{k=0}^{s}(-1)^k \binom{s}{k} \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1}(-1)^j \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} \sum_{t=0}^{\alpha.j+\alpha-1}(-1)^t \binom{\alpha.j+\alpha-1}{t=0} \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}+1-1} [1-y]^{\beta.t+\beta-1}\, dy$$

$$= \alpha\beta^2 \; \sum_{k=0}^{s}(-1)^k \binom{s}{k} \; \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1}(-1)^j \; \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} \sum_{t=0}^{\alpha.j+\alpha-1} \; (-1)^t \; \binom{\alpha.j+\alpha-1}{t=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta t+\beta\right)$$

Sehingga diperoleh :

$$M_S = M_{1,s,0} = \alpha\beta^2 \; \sum_{k=0}^{s}(-1)^k \binom{s}{k} \; \sum_{j=0}^{\beta.k+\beta-1}(-1)^j \; \binom{\beta.k+\beta-1}{j=0} \sum_{t=0}^{\alpha.j+\alpha-1} \; (-1)^t \binom{\alpha.j+\alpha-1}{t=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta t+\beta\right) \qquad (4.9)$$

Kemudian akan dicari nilai Mk sebagai berikut :

$$M_k = M_{1,0,k} \quad = \int_0^1 x(F)\; [1-F(x)]^k \, df$$

$$= \int_0^1 [1-[1-[1-[1-F(\mathrm{x})]^{\frac{1}{b}}]^{\frac{1}{\alpha}}]^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{1}{\alpha}} \; [1-F(x)]^k \, df$$

Untuk mempermudah perhitungan *X(F)* dimisalkan menjadi $y^{\frac{1}{\alpha}}$ maka:

$=\int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}}\ [1-F(x)]^k\, df$

$= \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}}\ [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta}]^{k}\ \alpha\beta^2\ [1-y]^{\beta-1}\ [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta-1}\ [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha-1}$

dy

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}}\ [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta k}\ [1-y]^{\beta-1}\ [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta-1}\ [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha-1}$

dy

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}}\ [1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta k+\beta-1}\ [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha-1}\ [1-y]^{\beta-1}\, dy$

(4.10)

Dengan menggunakan persamaan perluasan binomial yaitu sebagai berikut:

$(1-m)^k = \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{K}{j} M^j$ (4.11)

$[1-[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha}]^{\beta k+\beta-1} = \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1}\ (-1)^j \binom{\beta k+\beta-1}{j} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha j}$

Subsitusikan ke dalam persamaan (4.10) maka diperoleh :

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1}\ (-1)^j \binom{\beta k+\beta-1}{j} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha j}\ [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha-1}\ [1-y]^{\beta-1}$

dy

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1}\ (-1)^j \binom{\beta k+\beta-1}{j} [1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha j+\alpha-1\ \ 1}\ [1-y]^{\beta-1}\, dy$

(4.12)

Dengan menggunakan persamaan perluasan dari binomial maka :

$[1-[1-y]^{\beta}]^{\alpha j+\alpha-1} = \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} [1-y]^{\beta l}$

Subsitusikan ke dalam persamaan (4.12) maka diperoleh :

$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1}\ (-1)^j \binom{\beta k+\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} [1-y]^{\beta L}$
$[1-y]^{\beta-1}\, dy$

$$= \alpha\beta^2 \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1} (-1)^j \binom{\beta k + \beta - 1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1} (-1)^l \binom{\alpha j + \alpha - 1}{l = 0} [1-y]^{\beta L+\beta-1} \, dy$$

$$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1} (-1)^j \binom{\beta k + \beta - 1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1} (-1)^l \binom{\alpha j + \alpha - 1}{l = 0} \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}+1-1} [1-y]^{\beta L+\beta-1} \, dy$$

$$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1} (-1)^j \binom{\beta k + \beta - 1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1} (-1)^l \binom{\alpha j + \alpha - 1}{l = 0} \beta\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta l + \beta\right)$$

Sehingga diperoleh :

$$Mk = M_{1,0,k} = \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1} (-1)^j \binom{\beta k + \beta - 1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1} (-1)^l \binom{\alpha j + \alpha - 1}{l = 0} = \beta\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta l + \beta\right) \tag{4.13}$$

Pendugaan yang baik adalah pendugaan yang memiliki sifat tak bias, konsisten dan varians minimum. Namun dalam menduga parameter α dan β masih terdapat nilai parameter maka pendugaan distribusi Kumaraswamy-G dengan metode Probability Weighted Moment tidak bisa diselesaikan secara analitik sehingga akan diselesaikan menggunakan metode numeric. Dalam penggunaan metode numeric menggunakan nilai M_K dimana akan dicari momen pertama dan momen kedua. Selanjutnya moment pertama dan kedua akan dicari turunan pertama menggunakan software R 3.3.2. Langkah-langkah nya sebagai berikut :

akan dicari nilai M_1 dan M_2 yaitu nilai k =1 dan k=2 dengan menggunakan rumus:

$M_{1,0,k} = M_K$

dimana

$M_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\binom{n-i}{k}}{\binom{n-1}{k}}$

Akan dicari nilai moment pertama atau M_1 diperoleh sebagai berikut :

$M_{1,0,k} = M_K$

$M_{1,0,1} = M_1$

$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1}(-1)^j \binom{\beta k+\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} = \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right)$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\binom{n-i}{k}}{\binom{n-1}{k}}$

$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{\beta.1+\beta-1}(-1)^j \binom{\beta.1+\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} = \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\right.$
$\left.\beta\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\binom{n-i}{1}}{\binom{n-1}{1}}$

$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{2\beta-1}(-1)^j \binom{2\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} = \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right) =$
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{n-i}{n-i}$ (4.14)

Setelah diketahui moment pertama M_1, selanjutnya akan dicari moment kedua atau M_2 sebagai berikut :

$M_{1,0,K} = M_K$

$M_{1,0,2} = M_2$

$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{\beta k+\beta-1}(-1)^j \binom{\beta k+\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} = \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right)$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\binom{n-i}{k}}{\binom{n-1}{k}}$

$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{\beta.2+\beta-1}(-1)^j \binom{\beta.2+\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} = \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\right.$
$\left.\beta\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\binom{n-i}{2}}{\binom{n-1}{2}}$

$$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{3\beta-1}(-1)^j \binom{3\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} = \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\binom{n-i}{2}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$= \alpha\beta^2 \sum_{j=0}^{3\beta-1}(-1)^j \binom{3\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)^l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{2\binom{n-i}{2}}{(n-1)(n-2)} \quad (4.15)$$

Selanjutnya persamaan (4.14) dan persamaan (4.15) akan dijumlahkan untuk mencari nilai berikutnya.

$$= \alpha\beta^2 \left[\sum_{j=0}^{2\beta-1}(-1)j \binom{2\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)\,l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right) + \sum_{j=0}^{3\beta-1}(-1)j \binom{3\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)\,l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \left[\frac{n-i}{n-i} + \frac{2\binom{n-i}{2}}{(n-1)(n-2)}\right]$$

$$= \alpha\beta^2 \left[\sum_{j=0}^{2\beta-1}(-1)j \binom{2\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)\,l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right) + \sum_{j=0}^{3\beta-1}(-1)j \binom{3\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)\,l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \left[\frac{n-i}{n-i} + \frac{2\binom{n-i}{2}}{(n-1)(n-2)}\right]\right] = 0$$

$$M_K = \left[\sum_{j=0}^{2\beta-1}(-1)j \binom{2\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)\,l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right) + \sum_{j=0}^{3\beta-1}(-1)j \binom{3\beta-1}{j} \sum_{l=0}^{\alpha j+\alpha-1}(-1)\,l \binom{\alpha j+\alpha-1}{l=0} \beta\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta l+\beta\right) - \frac{1}{n(\alpha\beta^2)}\sum_{i=1}^{n} x_i \left[\frac{n-i}{n-i} + \frac{2\binom{n-i}{2}}{(n-1)(n-2)}\right]\right] = 0 \quad (4.16)$$

Setelah diketahui nilai M_K maka selanjutnya akan dicari turunan pertama yang akan dicari menggunakan software R 3.3.2 . Adapun simulasi dengan menggunakan program R 3.3.2 sebagai berikut :

4.6. Nilai Penduga Parameter α dan β dengan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) Menggunakan Software R versi 3.3.2

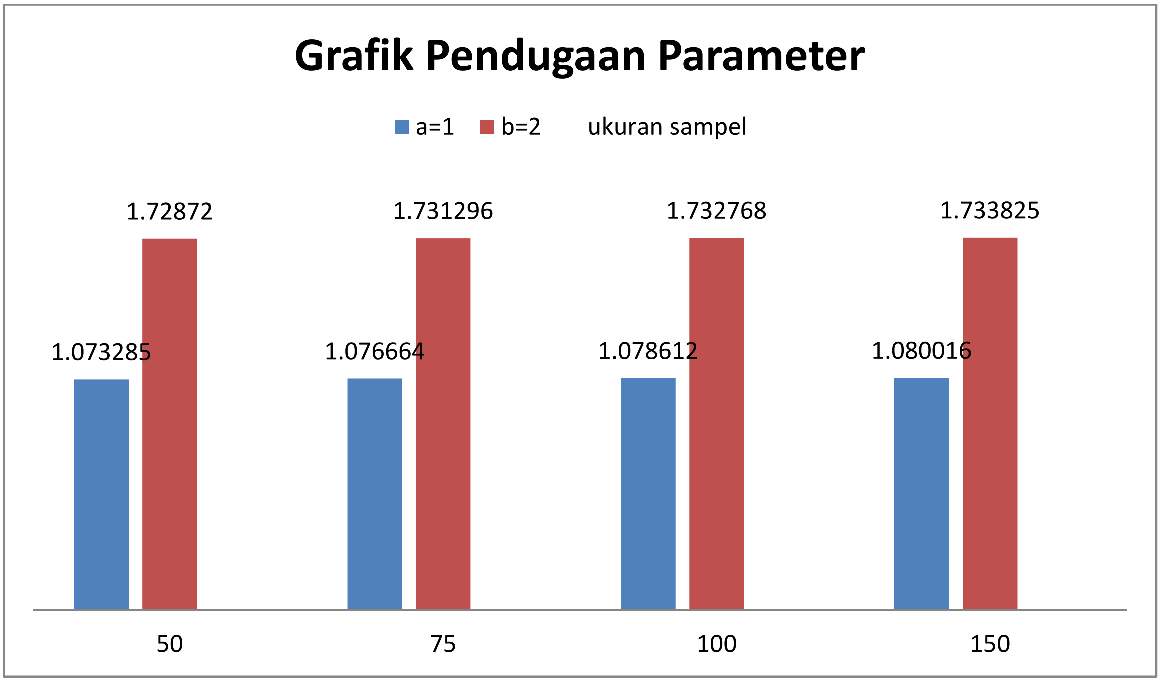
Simulasi dari distribusi Kumaraswamy-G dengan parameter α dan β yang akan dilakukan dengan membangkitkan data 50, 75, 100 dan 150. Dalam menentukan nilai dugaan parameter diambil nilai dugaan parameter a=1 dan b=2, sehingga akan didapatkan nilai α duga dan β duga sebagai berikut:

Tabel 1. Nilai Dugaan Parameter a =1 dan b = 2 dengan Metode *Probability Weighted Moment* (PWM)

Ukuran Sampel	**Parameter**	
	a = 1 b=2	
	a_duga	**b_duga**
50	1.073285	1.728720
75	1.076664	1.731296
100	1.078612	1.732768
150	1.080016	1.733825

Dari table diatas dapat dilihat bahwa ukuran sampel yang semakin kecil lebih mendekati nilai parameter.

Berdasarkan tabel di atas dapat dilihat nilai duga parameter untuk metode PWM dengan nilai a = 1 dan nilai b = 2 yaitu dapat disajikan dalam bentuk grafik batang dibawah ini.



Berdasarkan grafik diatas dapat dilihat ukuran sampel yang semakin kecil lebih mendekati nilai parameter. Berarti, dalam pendugaan distribusi Kumaraswamy-G dengan menggunakan metode Probability Weighted Moment dapat disimpulkan bahwa baik untuk ukuran sampel kecil.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Berdasarkan kurva fungsi kepekatan peluang distribusi Kumaraswamy-G dengan menggunakan software R versi 3.3.2 yaitu dimana jika nilai α dan β meningkat maka bentuk kurvanya runcing serta lebar kurva semakin kecil. Sedangkan untuk nilai parameter α dan β menurun bentuk kurvanya melandai dan lebar kurvanya semakin besar. Jadi, Perubahan nilai parameter pada α dan β mempengaruhi bentuk dari grafik distribusi Kumaraswamy-G.

2. Penduga parameter distribusi Kumaraswamy-G (α,β) dengan menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) menghasilkan penduga yang tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga perlu diselesaikan dengan cara numeric.

3. Semakin kecil ukuran sampel yang digunakan maka nilai dugaan parameter akan semakin mendekati parameter sebenernya.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, I.J. and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* Brooks / Cole. Duxbury.

Cassela, G. And Berger, R. L. 2002. *Statistical Inference.* Second Edition. Thomsom Learning Inc., USA.

Clarke, R. T., Mathematical Models in Hydrology, *Irrig. Drain. Pap. 19,* Food and Agr. Organ. Of the U. N. C. Rome, 1973.

Cordeiro, G.M. & de Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions. *Journal of Statistical Computation & Simulation*, 00(00), 1-17.

Greenwood, J.A., *et al*. 1979. Probability Weighted Moments: definition and relation to parameters of several distributions expresable in inverse form, *Water Reseourses Researh,* **15,** 1049-1054.

Hogg, R.V. and Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Fifth Edition. Prentice hall International Inc, New Jersey.

Kumaraswamy, P.1980. A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*. 46 (1-2): 79–88.

Larsen, Richard.J., Marx, Morris.L. 2012. *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*, Fifth Edition. Pearson Education, Inc., United States of America.

Nadarajah, S. 2008. On the Distribution of Kumaraswamy. *Journal Hydrol*. vol.348, pp. 567-569.