METODE *BOOTSTRAP* UNTUK MENDAPATKAN NILAI *MEAN SQUARED ERROR* MODEL BETA-BERNOULLI

(Skripsi)

Oleh

NOVILIA ADITYAWATI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

BOOTSTRAP METHOD IN ESTIMATION MEAN SQUARED ERROR OF BETA-BERNOULLI MODEL

By

NOVILIA ADITYAWATI

Small area estimation is defined as a statistical technique to estimate a small subpopulation of a certain area. The purpose of this research is to determine Empirical Bayes (EB) estimator of small area estimation for Beta-Bernoulli model and to evaluate Mean Squared Error (MSE) with bootstrap method. The result shows that EB estimator is produces a biased estimator with a small MSE bootstrap value.

Keyword: Small Area Estimation, Empirical Bayes (EB), Beta-Bernoulli Model, Bootstrap

ABSTRAK

METODE *BOOTSTRAP* PADA PENDUGAAN *MEAN SQUARED ERROR* MODEL BETA-BERNOULLI

Oleh

NOVILIA ADITYAWATI

Pendugaan area kecil didefinisikan sebagai teknik statistika untuk menduga paramater subpopulasi yang ukuran sampelnya kecil. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan penduga *Empirical Bayes* (EB) pada pendugaan area kecil untuk model Beta-Bernoulli dan mengevaluasi *Mean Squared Error* (MSE) menggunakan metode *bootstrap*. Hasil menunjukkan penduga yang bias dengan nilai MSE *bootstrap* yang kecil.

Kata Kunci: Pendugaan Area Kecil, *Empirical Bayes* (EB), Model Beta-Bernoulli, *Bootstrap*

METODE *BOOTSTRAP* UNTUK MENDAPATKAN NILAI *MEAN SQUARED ERROR* MODEL BETA-BERNOULLI

Oleh

NOVILIA ADITYAWATI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2018

Judul Skripsi : **METODE *BOOTSTRAP* PADA PENDUGAAN *MEAN SQUARED ERROR* MODEL BETA-BERNOULLI**

Nama Mahasiswa : Novilia Adityawati

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031088

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.	**Nusyirwan, S.Si., M.Si.**
NIP 19800502 200501 2 003	NIP 19661010 199205 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Widiarti, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Nusyirwan, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 September 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Novilia Adityawati**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031088**
Judul	: **Metode *Bootstrap* untuk Mendapatkan Nilai *Mean Squared Error* pada Model Beta-Bernoulli**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, September 2018

Penulis,

METERAI TEMPEL AF89AAFF335197341 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Novilia Adityawati
NPM. 1417031088

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Novilia Adityawati, putri dari Bapak Wagino dan Ibu Musinah serta adik dari Fernandes Aditya Saputra dan kakak dari Dinda Meilani Aditya Wati. Penulis dilahirkan di Gula Putih Mataram pada tanggal 20 November 1995.

Penulis menempuh Pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) Gula Putih Mataram pada tahun 2000-2002, Sekolah Dasar Negeri (SDN) 02 Sri Basuki diselesaikan pada tahun 2002-2008, Sekolah Menegah Pertama Swasta (SMPS) Gula Putih Mataram diselesaikan pada tahun 2008-2011, dan Sekolah Menengah Atas Swasta (SMAS) Sugar Group diselesaikan pada tahun 2011-2014.

Tahun 2014 penulis terdaftar sebagai mahasiswi Jurusan Matematika FMIPA. Selama menjadi mahasiswi penulis aktif dalam organisasi pada periode 2016-2017 sebagai staff ahli kementrian Eksternal Badan Eksekutif Mahasiswa Universitas (BEM U). Pada tahun 2016 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Fajar Bulan, Kecamatan Gunung Sugih, Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung. Pada tahun 2017 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Direktorat Jendral Pajak Kanwil Bengkulu dan Lampung.

KATA INSPIRASI

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Al-Insyirahayat 5-6)

"Raihlah Ilmu, dan untuk meraih ilmu belajarlah untuk tenang dan sabar"
(Khalifah 'Umar)

"Make it simple, take it easy"
(anonim)

PERSEMBAHAN

Puji syukur kepada Allah SWT, karena atas limpahan berkah dan rahmad-Nya skripsi ini dapat diselesaikan.

Aku persembahkan karya sederhana penuh perjuangan dan kesabaran ini sebagai ungkapan rasa sayang dan bakti kepada:

Bapak dan Ibu tercinta yang selalu mecurahkan kasih sayang, memberi semangat dan selalu memotivasi, serta dalam doa dan sujud yang selalu menantikan keberhasilanku dengan sabar dan penuh pengertian.

Almamater yang kucintai, Universitas Lampung.

SANWACANA

Penulis mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, karena dengan ridho dan karunia-Nya serta atas berkah dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Metode *Bootstrap* untuk Mendapatkan Nilai *Mean Squared Error* Model Beta-Bernoulli”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Selesainya penulisan skripsi ini adalah berkat motivasi, pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Dengan segala kerendahan dan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku pembimbing pertama dan pembimbing akademik atas saran, pengarahan, motivasi, dan kesabaran dalam membimbing penulis selama penelitian hingga penyelesaian skripsi dan memberi arahan kepada penulis selama menuntut ilmu di Universitas Lampung.
2. Bapak Nusyirwan, S.Si., M.Si., selaku pembimbing kedua atas kesediaannya memberikan bimbingan, pengarahan, semangat, motivasi, waktu, saran, nasehat, dan bantuan selama penulis menyelesaikan skripsi.
3. Ibu Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D., selaku penguji bukan pembimbing

yang telah memberikan saran, pengarahan, nasehat, kesabaran, dan bantuan yang sangat berharga untuk perbaikan penulisan skripsi.

4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D. selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung
6. Para Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Ibu, Bapak, kakak, dan adik tercinta yang selalu memberikan motivasi, semangat, dan doa kepada penulis.
8. Rahmad Riyanto, Zulfikar, dan Darmawansyah yang telah membantu dan memberi pengarahan kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat Vindi, Indah, Hizkia, Camel, Rose yang telah membantu, memberikan semangat, dan kecerian pada penulis.
10. Teman-teman sepembimbingan Margareta, Nourma, Nia, Raka, Shindy, Yunika, Kadek, dan Ketut terima kasih atas dukungan dan kebersamaan selama ini.
11. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika Angkatan 2014.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari sempurna sehingga saran, dan kritik untuk pengembangan lebih lanjut sangatlah penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan kita semua

Bandar Lampung,   September 2018
Penulis

Novilia Adityawati

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Otonomi daerah menuntut pemerintah daerah lebih berperan aktif dalam pelaksanaan pembangunan untuk mengatur dirinya sendiri pada pemerintah kabupaten/kota. Dengan demikian kebutuhan statistik sampai pada level desa/kelurahan menjadi suatu kebutuhan dasar. Persoalan muncul ketika survei untuk mendapatkan informasi daerah yang lebih kecil terbatas, misalnya informasi pada level desa/kelurahan. Salah satu cara untuk mendapatkan informasi tersebut adalah dengan menambah sampel yang dapat memperbaiki reliabilitas dari estimasi secara langsung. Penambahan ukuran sampel menyebabkan biaya yang diperlukan menjadi mahal dan waktu yang diperlukan untuk survei menjadi lama. Salah satu upaya untuk mengoptimalkan penggunaan data yang tersedia dan memperoleh estimasi wilayah kecil adalah dengan mengaplikasikan metode pendugaan area kecil *(small area estimation).*

Pendugaan area kecil *(small area estimation)* merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter subpopulasi yang ukuran sampelnya kecil. Teknik pendugaan ini memanfaatkan data dari domain besar seperti data sensus atau data survei sosial ekonomi nasional, untuk menduga peubah yang menjadi perhatian pada domain yang lebih kecil. Pendugaan area kecil yang didasarkan pada penerapan model rancangan penarikan sampel *(design-based)* disebut sebagai penduga langsung *(direct estimation)*. Pendugaan ini tidak mampu memberikan ketelitian yang cukup bila ukuran sampel kecil, sehingga statistik yang diperoleh akan memiliki ragam yang besar atau bahkan pendugaan tidak dapat dilakukan karena tidak terwakili dalam survei. Oleh karena itu, dikembangkan teknik pendugaan alternatif untuk meningkatkan keefektifan ukuran sampel dan menurunkan galat baku yakni pendugaan tak langsung *(indirect estimation).* Pendugaan tak langsung bersifat meminjam kekuatan dari pengamatan sampel area yang berdekatan dengan memanfaatkan informasi tambahan yakni dari sensus dan catatan administratif (Rao, 2003).

Berbagai metode pendugaan tidak langsung telah dikembangkan untuk memperoleh penduga area kecil. Metode tersebut adalah penduga prediksi tak bias linear terbaik empirik atau *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) untuk data kontinu sedangkan untuk data biner atau cacahan yaitu bayes empirik atau *Empirical Bayes* (EB) dan bayes hierarkhi atau *Hierarchical Bayes* (HB).

Pendugaan pada metode EB didasarkan pada distribusi posterior untuk menduga paramaternya. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menduga parameter adalah metode momen. Konsep pada pendugaan area kecil yaitu memanfaatkan informasi tambahan yang dikenal sebagai distribusi prior. Dengan demikian diperlukan distribusi prior yang mengakomodir informasi tambahan ini. Pada penelitian ini, distribusi prior yang digunakan adalah distribusi Beta. Sedangkan distribusi sampel yang digunakan adalah distribusi Bernoulli yang termasuk keluarga eksponensial. Jika distribusi sampel yang digunakan berasal dari keluarga eksponensial, maka salah satu cara menentukan prior dengan menggunakan prior konjugat (Bolstad, 2007). Fungsi densitas peluang distribusi Beta memiliki kesamaan bentuk fungsional dengan likelihood distribusi Bernoulli atau prior konjugat dan berasal dari keluarga eksponensial.

Penduga Bayes biasanya bersifat bias (Bolstad, 2007), maka dalam penelitian ini kualitas EB yang diperoleh akan dievaluasi melalui kriteria *Mean Squared Error* (MSE). MSE merupakan suatu besaran untuk mengukur keragaman penduga area kecil. Semakin kecil MSE suatu penduga maka penduga semakin akurat. Menurut Efron dan Tibshirani (1993) salah satu metode yang dapat mengoreksi bias adalah *bootstrap*. Penelitian tentang penggunaan metode *bootstrap* telah dilakukan pada kasus pendugaan area kecil oleh Rao (2007). Dalam penelitian tersebut, Rao menjelaskan mengenai estimasi galat baku untuk metode *jackniffe* dan *bootstrap* dalam kasus area kecil. Sebelumnya, Efron dan Tibshirani (1993) telah menerangkan keakuratan estimasi titik dan interval dengan menggunakan sampel *bootstrap*. Hal ini dikarenakan estimasi *bootstrap* lebih mendekati populasinya dibandingkan dengan pengambilan sampel lainnya. Keakuratan dari sampel *bootstrap* untuk estimasi titik dan intervalnya dievaluasi menggunakan galat baku. Berdasarkan uraian tersebut, dalam penelitian ini akan digunakan metode *bootstrap* untuk mengevaluasi MSE pada model Beta-Bernoulli.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk

1. Menentukan penduga *Empirical Bayes* pada pendugaan area kecil dengan model Beta-Bernoulli.
2. Menduga parameter pada model Beta-Bernoulli dengan metode momen dan mengevaluasi *Mean Squared Error (MSE)* menggunakan metode *bootstrap.*

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah memberikan informasi tentang penduga *Empirical Bayes* pada pendugaan area kecil untuk model Beta-Bernoulli dengan metode momen dan mengevaluasi *Mean Squared Error* menggunakan metode *bootstrap.*

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendugaan Area Kecil

Pendugaan area kecil *(small area estimation*) adalah salah satu teknik statistik yang digunakan untuk menduga parameter subpopulasi dengan ukuran sampel yang relatif kecil. Istilah area kecil biasanya menandakan suatu area geografis kecil, seperti suatu daerah kecamatan, maupun kelurahan atau desa. Suatu area disebut kecil apabila sampel yang diambil tidak mencukupi untuk melakukan pendugaan langsung dengan hasil dugaan yang akurat (Rao, 2003).

Pendugaan area kecil adalah metode estimasi tidak langsung yang menduga area yang lebih kecil dan memberikan tingkat akurasi yang lebih baik. Model pendugaan area kecil dikelompokkan menjadi dua yaitu model level area (*basic area level model)* dan model level unit (*basic unit level model).*

2.1.1 Model Berbasis Area

Model berbasis area merupakan model yang didasarkan pada ketersedian variabel penyerta yang hanya ada untuk level area tertentu. Paramater yang diamati pada model ini adalah p_i. dengan y_i merupakan variabel respon. Sehingga model level area dasar yang menjelaskan hubungan tersebut adalah

$$y_i = p_i + e_i \text{ ; i=1,2,…,m} \quad (2.1)$$

dengan e_i adalah galat sampel diasumsikan $e_i \sim iid\ N(0, \sigma^2{}_{ei})$.

2.1.2 Model Berbasis Unit

Pada model berbasis unit diasumsikan bahwa data variabel penyerta unit $x^T{}_{ij}=(x_{ij1}, x_{ij2}, \ldots, x_{ijp})^T$ tersedia untuk setiap elemen ke-*j* pada area ke-*i* selanjutnya variabel respon y_{ij} diasumsikan berkaitan dengan x_{ij} sehingga bentuk persamaan model area kecil berbasis level unit sebagai berikut:

$$y_{ij} = x^T{}_{ij}\beta + e_{ij} + v_i\text{; j=1,2,…, m; i=1,2,…,n} \quad (2.2)$$

dengan v_i merupakan pengaruh acak area, β merupakan koefesien regresi dan diasumsikan galat sama dengan 0. Namun kadang cukup dengan rata-rata populasi $\bar{x}_{ij}$ yang diketahui (Rao, 2003).

2.2 Model Beta-Bernoulli

Model dasar pendugaan area kecil yang digunakan dalam penelitian ini adalah model berbasis area yang dituliskan sebagai berikut:

$$y_i = p_i + ei \quad (2.3)$$

dengan:

y_i = penduga langsung area ke-i

p_i = parameter yang ingin diduga ; y_i ~ Bernoulli (p_i) dan p_i ~ Beta (α,β), i=1,2,3,…,m

e_i = pengaruh acak di dalam area

Dengan y_i menyatakan banyaknya pengamatan suatu kasus pada area ke-i, p_i adalah peluang keberhasilan suatu kasus pada area ke-i yang tidak diketahui dan m menyatakan jumlah area, sedangkan α dan β merupakan parameter yang belum diketahui. Tahap pertama diasumsikan bahwa y_i ~ Bernoulli (p_i) dan pada tahap kedua diasumsikan bahwa p_i ~ Beta (α,β).

Menurut Hogg and Craig (1990), distribusi Beta dengan parameter α dan β memiliki fungsi kepekatan peluang untuk p_i yaitu :

$$\pi(p_i) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\tau(\beta)} p_i^{\alpha-1}(1-p_i)^{\beta-1}; & \alpha > 0,\ \beta > 0 \text{ untuk } 0 \le p_i \le 1 \\ 0 & ;\text{ selainnya} \end{cases} \quad (2.4)$$

Menurut Berger (1990), nilai mean dan variansi dari distribusi Beta dengan parameter α dan β masing-masing adalah

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta,} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \quad (2.5)$$

Diketahui distribusi Bernoulli mempunyai fungsi kepekatan peluang yaitu :

$$f(Y_i = y_i | p_i) = \begin{cases} p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i} & ;\ y_i = 0{,}1 \text{untuk } 0 \le p_i \le 1 \\ 0 & ;\text{ selainnya} \end{cases} \quad (2.6)$$

2.3 Metode *Empirical Bayes*

Metode bayes ditemukan oleh Thomas Bayes dan kemudian dikembangkan oleh Richard Price pada tahun 1763 dua tahun setalah wafatnya Bayes, kemudian

Laplace pada tahun 1774 dan 1781 yang memberikan analisis secara rinci, merupakan metode yang lebih baik untuk statistik bayes sekarang (Gill, 2002). Bila penduga bayes ini akan digunakan maka harus terlebih dahulu diketahui nilai parameter sebaran priornya. Namun seringkali informasi mengenai parameter prior belum diketahui. Pendekatan lain yang dapat digunakan adalah *Empirical Bayes*. *Empirical Bayes* (EB) merupakan metode yang menggunakan inferensia dari estimasi posterior untuk menduga parameter. Metode EB merupakan metode yang cocok digunakan dalam menangani data biner dan data cacahan pada pendugaan area kecil. Misalkan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang berbentuk $f(y_1, y_2, \ldots, y_n/p_i)$ dan sebaran dari peubah acak p yaitu $\pi(p_i)$ sebaran prior. Metode EB dalam konteks pendugaan area kecil secara ringkas sebagai berikut :

1. Mendapatkan fungsi kepekatan peluang akhir (posterior) dari $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dengan $f(y_1, y_2, \ldots, y_n/p_i)$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n/p_i) = \frac{f(y_1, y_2, \ldots, y_n/p_i)\ .\pi(p_i)}{f(y_1, y_2, \ldots, y_n/p_i).\pi(p_i)dp_i} \qquad (2.7)$$

2. Menduga parameter model dari fungsi kepekatan peluang marginal.
3. Menggunakan fungsi kepekatan peluang akhir (posterior) dugaan untuk membuat inferensia parameter area kecil yang menjadi perhatian.

2.4 Metode Momen

Menurut Berger (1990), metode momen diciptakan oleh Karl Pearson pada tahun 1800 merupakan metode tertua dalam menentukan estimator titik. Metode momen merupakan metode pendugaan dengan cara menyamakan momen ke- *k* sampel dengan momen ke-*k* populasi dan menyelesaikan sistem persamaan yang dihasilkan secara bersama atau simultan yang ditulis sebagai berikut :

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^1, \qquad \mu_1 = E(Y^1)$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2, \qquad \mu_2 = E(Y^2)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^k, \qquad \mu_1 = E(y^k) \tag{2.8}$$

Meskipun metode momen terkenal sebagai metode yang mudah, namun terkadang terdapat kesulitan dalam mencari bentuk rumus penduganya.

2.5 Ketakbiasan

Menurut Larsen dan Marx (2012), sifat penduga yang baik salah satunya adalah takbias. Suatu penduga dikatakan takbias apabila asumsi yang telah ditentukan terpenuhi, yaitu apabila $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ merupakan sampel acak dari fungsi kepekatan peluang kontinu $f_y(y; p)$, dimana p merupakan parameter yang tidak diketahui. Penduga $\hat{p}$=[h($Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$)] dikatakan takbias bagi p, jika

$$E(\hat{p}) = p \tag{2.9}$$

2.6 Ragam Minimum dari Penduga *Empirical Bayes*

Menurut Hogg dan Craig (1995), selain sifat ketakbiasan, penduga parameter dikatakan baik apabila memenuhi sifat penduga ragam minimum. Bila U(Y) merupakan penduga bagi g(p), maka $U_1(Y)$ dikatakan sebagai penduga ragam minimum, jika

$$e^2_{U1(y)} \leq e^2_{U(y)} \tag{2.10}$$

dimana U(Y) merupakan sebarang penduga bagi g(p). Untuk estimator tak bias, nilai varian U(Y) akan sama dengan MSE U(Y) tetapi pada pendugaan *Empirical Bayes* penduga yang dihasilkan bersifat bias maka performa dari penduga akan dievaluasi melalui MSE.

2.7 Metode *Bootstrap*

Metode *bootstrap* pertama kali diperkenalkan Bradley Efron pada tahun 1979. Menurut Efron dan Tibshirani (1993) metode *bootstrap* digunakan dengan melakukan suatu resampling atau pengambilan data sampel yang dilakukan secara berulang-ulang, sehingga akan diketahui berapa besar tingkat kesalahannya dengan menyatakan ukuran sampel *bootstrap* B sebesar 50-200 telah cukup untuk melakukan pendugaan terhadap galat baku. Ada dua cara yang digunakan dalam proses resampling yaitu sampel diambil dengan pengembalian dan sampel diambil tanpa pengembalian. Sampling dengan pengembalian mengambil dari sampel dan kemudian meletakkan kembali dalam sampel untuk kemungkinan dijadikan sampel lagi. Sampel tanpa pengembalian mengambil dari sampel, tetapi sekali diambil tidak dapat dijadikan sampel lagi.

Menurut Butar dan Lahiri (2003), dalam pendugaan area kecil metode *bootstrap* merupakan salah satu metode altenatif untuk mendapatkan nilai *Mean Square Error* (MSE). MSE merupakan suatu besaran untuk mengukur keragaman penduga area kecil. Penentuan MSE dengan metode *bootstrap* untuk penduga EB yaitu dengan resampling penduga ragam bayes empirik dan penduga bayes sehingga

$$\mathrm{MSE}(\widehat{p}_i^{\,EB}) = \widehat{M}_{1i} + \widehat{M}_{2i} \tag{2.12}$$

dimana

$$\widehat{M}_{1i} = 2g_{1i}(\hat{\sigma}_v^2) - \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} g_{1i}\,(\hat{\sigma}_v^2(b))$$

$2g_{1i}(\hat{\sigma}_v^2)$ merupakan penduga ragam bayes empirik dan $\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} g_{1i}\,(\hat{\sigma}_v^2(b))$ merupakan penduga empirik hasil resampling sebanyak B kali

dan

$$\widehat{M}_{2i} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\left\{\widehat{p}_i^{\,EB}(b) - \widehat{p}_i^{\,EB}\right\}^2$$

dengan $\widehat{p}_i^{\,EB}$ merupakan penduga bayes empirik dan $\widehat{p}_i^{\,EB}(b)$ merupakan penduga bayes empirik hasil resampling *bootstrap* sebanyak B kali.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018, bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data simulasi yang dibangkitkan dengan menggunakan *software* Ri386. Pembangkitan data dalam simulasi diasumsikan menggunakan distribusi Beta-Bernoulli, yaitu y_i ~ Bernoulli (p_i) dan tahap kedua diasumsikan p_i ~ Beta (α,1/ α).

3.3 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan fungsi kepekatan akhir (posterior) dari model Beta-Bernoulli
2. Menentukan penduga *Empirical Bayes* bagi p_i dari model Beta-Bernoulli
3. Menentukan penduga $\propto$ dengan menggunakan metode momen berdasarkan fungsi kepekatan peluang marginal y_i

3. Membuktikan ketakbiasan bagi penduga *Empirical Bayes*

4. Menentukkan ragam bagi penduga *Empirical Bayes*

6. Mengevaluasi *Mean Squared Error* bagi penduga *Empirical Bayes* dengan metode *bootstrap*

Mengevaluasi bias dan *Mean Squared Error* (MSE) secara empiris dilakukan melalui kajian simulasi dengan tahapan sebagai berikut :

1. Menetapkan ragam antararea untuk model Beta-Bernoulli masing-masing 1,5, dan 10 sebagai representasi ragam antararea besar, sedang, dan kecil. Nilai ragam antararea ditetapkan demikian karena untuk nilai kurang dari 1 akan menyebabkan nilai-nilai y_i yang dibangkitkan dengan distribusi Bernoulli akan banyak bernilai nol
2. Menetapkan jumlah area yaitu 10, 50, dan 100 sebagai representasi jumlah area yang berukuran kecil, sedang, dan besar
3. Membangkitkan data p_i dengan p_i~Beta $(\alpha, 1/\alpha)$
4. Membangkitkan data y_i dengan y_i~Bernoulli (p_i)
5. Menghitung nilai dugaan bagi $\hat{\alpha}$ dengan metode momen
6. Menghitung nilai dugaan bagi pi dengan metode *Emprical Bayes* ($\hat{p}_i^{EB}$)
7. Menghitung nilai bias
8. Menghitung MSE $\hat{p}_i^{EB}$ dengan metode *bootstrap.*

V. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian ini dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Penduga EB pada pendugaan area kecil dengan model Beta-Bernoulli adalah $\hat{p}_i^{EB} = \frac{(\hat{\alpha} y_i + \hat{\alpha}^2)}{(\hat{\alpha}^2 + \hat{\alpha} + 1)}$.
2. Nilai duga parameter pada model Beta-Bernoulli dengan metode momen adalah $\hat{\alpha} = \frac{\bar{y}_i}{(1 - \bar{y}_i)}$ dan MSE *bootstrap* nilainya juga semakin kecil dengan semakin besarnya jumlah area. Dengan demikian, metode *bootstrap* mampu mengoreksi bias pada pendugaan dengan metode EB.

DAFTAR PUSTAKA

Berger, C. 1990. *Statistical Inference.* Pasific Grove, New York.

Bolstad, W.M. 2007. *Introduction to Bayesian Statistics.* Ed ke-2. John Wiley & Sons Inc., America.

Butar, F.B. and Lahiri, P. 2003. On Measure of Uncertaint of Empirical Bayes Small Area Estimators. Model selection, Model Diagnostics, Empirical Bayes and Hierarchical Bayes. *Journal of Statistical Planning and Inference*. **112**: 63-67.

Efron, B. 1979. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistic*. **7**: 1-26.

Efron, B. and Tibshirani, R.J. 1993. *An Introduction to the Bootstrap.* Chapman and Hall, New York.

Gill, J. 2002. *Bayesian Methods: A social and Behavariol Science Approch.* Chapman and Hall, Boca Raton.

Hogg, R.V. and Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Ed. ke-5. Prentice hall International Inc., New Jersey.

Larsen, R.J. and Marx, M.L. 2012. *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications.* Ed. ke-5. Pearson Education, Inc., United States of America.

Martinez, E.Z., Achcar, J.A., and Aragon, D.C. 2015. Paramater estimation of the beta-binomial distribution: an apllication using the SAS software. *Cienciae Natural*, **37** (4):12-19.

Rao, J.N. 2003. *Small Area Estimation.* John Willey and Sons, New York.