BAB II
LANDASAN TEORI

Setiap permasalahan yang akan dicari cara penyelesaiannya terlebih dahulu dibuat rumusan masalah, demikian pula dengan matematika. Untuk mengetahui lebih lanjut tentang pembahasan masalah dalam skripsi ini terlebih dahulu diberikan definisi, teorema, serta istilah yang diperlukan dalam penelitian ini. Pada bab ini akan didiskusikan tentang definisi, teorema, serta istilah yang akan digunakan untuk pembahasan selanjutnya.

2.1 Konsep dasar Teori Graf

Berikut akan diberikan pengertian graf secara umum, baik definisi, teorema, dan istilah yang mendukung dalam penelitian ini antara lain sebagai berikut:

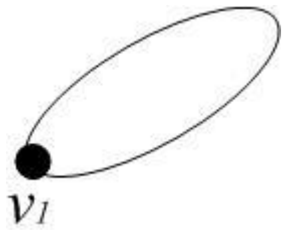
Graf $G\ (V, E)$ adalah suatu himpunan yang terdiri dari himpunan titik V dengan garis E dengan : V adalah himpunan berhingga dan tidak kosong dari titik-titik, dan E adalah himpunan dari sisi/garis yang menghubungkan sepasang titik (Deo, 1989).

Setelah menegetahui definisi graf secara umum, maka untuk selanjutnya membahas tentang jenis-jenis graf yang akan didefinisikan sebagai berikut:

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokkan graf dapat dipandang dari ada tidaknya garis ganda, dan berdasarkan pada orientasi arah pada garis. Garis ganda pada graf adalah garis yang berawal dan berakhir pada titik yang sama (Munir, 2010).

Berdasarkan ada tidaknya garis ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu:

1. Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak memuat garis ganda dan *loop*. *Loop* adalah graf dengan garis yang dari titik *v* membentuk lingkaran dan kembali lagi ke titik tersebut.



Gambar 2.1 Contoh *loop*

2. Graf tak sederhana (*unsimple graph*) adalah graf yang memuat garis ganda atau *loop*.

Berdasarkan banyaknya titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga (*limited graph*)

   Graf berhingga adalah graf yang jumlah titik-nya *n*, dengan *n* berhingga.

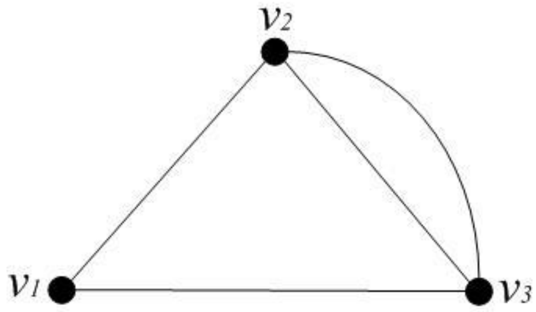
2. Graf tak-berhingga (*unlimited graph*)

   Graf yang jumlah titik-nya tidak berhingga banyaknya disebut graf tak-berhingga (Munir, 2010).

Berdasarkan orientasi arah, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*)

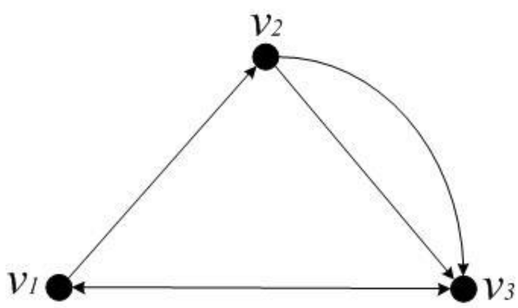
   Graf yang garisnya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah (Munir, 2010). Berikut adalah contoh graf tak-berarah.



Gambar 2.2 Contoh graf tak berarah

2. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)

   Graf yang setiap garisnya diberikan orientasi arah disebut graf berarah (Munir, 2010). Berikut adalah contoh graf berarah

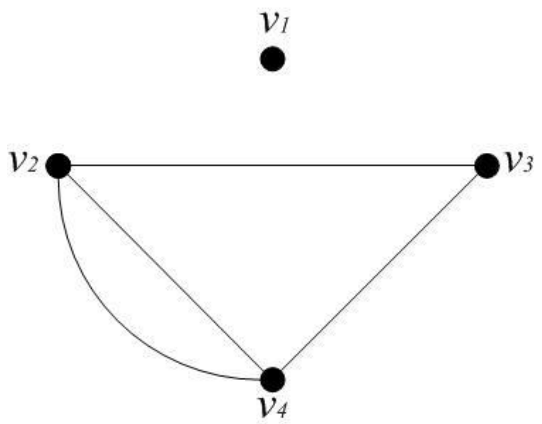


Gambar 2.3 Contoh graf berarah

Setiap titik pada graf dapat dihubungkan ke setiap titik lainnya atau tidak dihubungkan sama sekali. Karena itu, masing - masing titik akan mempunyai sejumlah garis tertentu yang menempel pada titik tersebut.

Selain jenis-jenis graf, terdapat pula pengertian tentang derajat (*degree*) yang akan dijelaskan sebagai berikut.

Derajat atau *degree* dari suatu titik *v* pada graf *G*, dinotasikan dengan *deg* (*v*), adalah banyaknya garis yang menempel pada titik *v* dengan *loop* dihitung dua kali (Deo, 1989).



Gambar 2.4 Contoh derajat pada graf

Berdasarkan Gambar 2.4 dapat ditentukan derajat dari setiap titik sebagai berikut :

$\deg\ (v_1) = 0$ $\deg(v_2) = 3$

$\deg\ (v_3) = 2$ $\deg(v_4) = 3$

Jumlah derajat pada suatu graf dapat digunakan untuk menentukan banyaknya garis pada graf tersebut dengan menggunakan rumus umum berikut.

Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ merupakan titik pada suatu graf, dan e menyatakan banyaknya garis pada graf tersebut, maka jumlah derajat pada suatu graf G adalah:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 2e$$

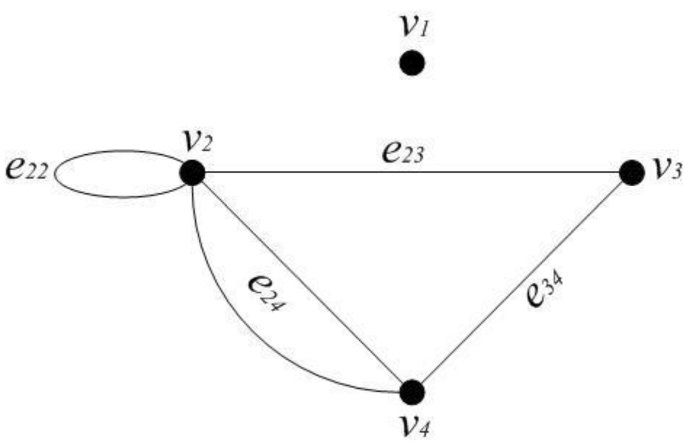
dengan v_i = banyaknya titik pada graf

e = banyaknya garis pada graf

(Deo, 1989)

Letak suatu titik atau garis antara satu dengan lainnya akan berhubungan dengan istilah bertetangga atau terhubung yang akan dijelaskan selanjutnya.

Jika $e = \{u, v\}$ adalah suatu garis yang menghubungkan titik u dan v pada graf G, maka titik u dikatakan tetangga (*adjacent*) terhadap titik v dan garis e_{uv} dikatakan terhubung (*incidence*) pada u dan v (Deo, 1989).



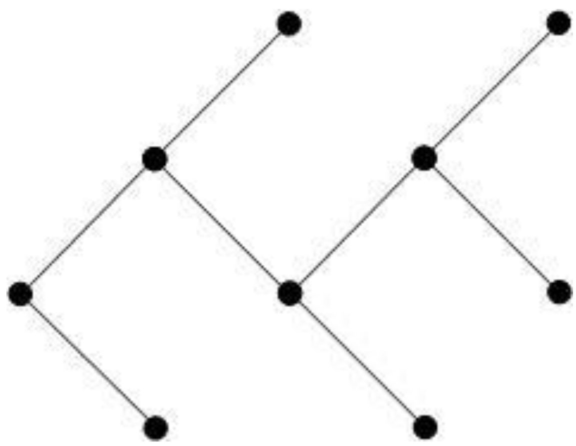
Gambar 2.5 Contoh *adjacency* dan *incidence* pada graf

Garis e_{23} terhubung pada titik v_2 dan v_3 serta titik v_2 dan v_3 bertetangga. Garis e_{24} terhubung pada titik v_2 dan v_4 serta titik v_2 dan v_4 bertetangga. Titik v_1 tidak terhubung dengan titik manapun atau terisolasi.

Pada graf, terdapat suatu struktur yang sangat banyak terapannya pada dunia nyata. Struktur itu disebut dengan pohon (*tree*).

2.2 Pohon (*Tree*)

Pohon (*Tree*) adalah graf terhubung yang tidak memuat sirkuit (Deo, 1989). Berikut ini contoh dari pohon:



Gambar 2.6 Contoh pohon (*tree*)

Teorema :

Jika diberikan sebarang graf G dengan n titik, $n - 1$ garis, terhubung, dan tanpa ada sirkuit, maka G adalah pohon (Deo, 1989).

Pembahasan selanjutnya yaitu tentang prinsip *pigeonhole* sebagai berikut:

2.3 Teorema prinsip *pigeonhole*

Teorema prinsip *pigeonhole* bentuk pertama (Johnsonbaugh, 1997)

Jika n merpati ditempatkan pada m rumah merpati, dengan $n > m$, maka terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati.

Teorema prinsip *pigeonhole* bentuk kedua (Johnsonbaugh, 1997)

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y dan $|X| > |Y|$, maka $f(x_1) = f(x_2)$ untuk suatu $x_1, x_2 \in X$, dengan $x_1 \neq x_2$.

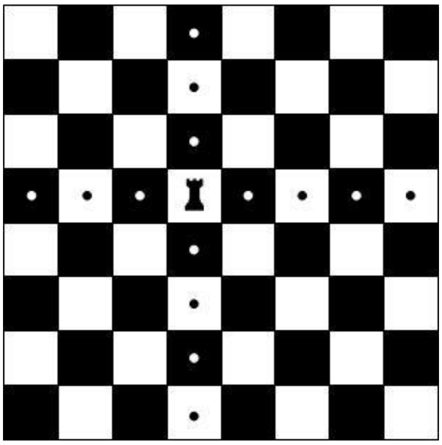
Teorema prinsip *pigeonhole* bentuk ketiga (Johnsonbaugh, 1997)

Jika f merupakan suatu fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y , dengan $|X| = n, |Y| = m$ dan $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = k$, maka terdapat paling sedikit k anggota $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ sedemikian hingga

$$f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_k).$$

2.4 Sejarah catur dan perkembangannya

Sejarah permainan catur berasal dari India dan mulai ada pada abad ke-6. Di India catur dikenal dengan nama *chaturanga*, yang artinya empat unsur yang terpisah.



Gambar 2.7 Papan catur langkah benteng (*rook*)

Menurut mistisisme India kuno, catur dianggap mewakili alam semesta ini sehingga sering dihubungkan dengan empat unsur kehidupan, yaitu api, udara, tanah, dan air. karena dalam permainannya, catur menyimbolkan cara-cara hidup manusia (Murray, 1913).

Peluang banyak cara penempatan k benteng pada papan catur dapat dirumuskan ke dalam polinomial yang disebut polinomial benteng yang akan dijelaskan selanjutnya.

2.5 Polinomial benteng

Misalkan B adalah papan catur ukuran $n \times n$ dan semua petaknya dapat ditempatkan benteng, maka banyaknya cara penempatan k benteng tersebut adalah :

$$R(x, B) = r_0(B) + r_1(B)x + r_2(B)x^2 + r_3(B)x^3 + \cdots + r_n(B)x^n$$

dengan r_k adalah banyak cara untuk menempatkan k benteng yang tidak saling sebaris atau sekolom pada papan catur.

Misalkan pula B adalah papan catur $n \times n$ yang dibentuk oleh beberapa sub papan catur yang tak terhubung maka banyak cara menempatan k benteng tersebut adalah :

$$R(x,B) = R(x,B_1)R(x,B_2) \dots R(x,B_n)$$

(Zindle, B. 2003)

Untuk menghitung banyak cara penempatan k benteng pada papan catur berbeda dengan sub papan catur. Untuk k benteng pada papan catur dapat langsung dihitung dari polinomial yang terbentuk.