II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dijelaskan beberapa tinjauan pustaka yang digunakan penulis pada penelitian ini, antara lain :

2.1 Distribusi Logistik

Distribusi logistik merupakan distribusi yang memiliki fungsi kepekatan peluang kontinu. Bentuk kurva distribusi logistik adalah simetri dan uni-modal. Bentuk kurva ini mirip dengan bentuk kurva distribusi normal. Namun, kedua distribusi ini tidak dapat dibandingkan antara satu dengan yang lainnya. Fungsi kepekatan peluang distribusi logistik memiliki bentuk umum sebagai berikut :

Definisi 2.1

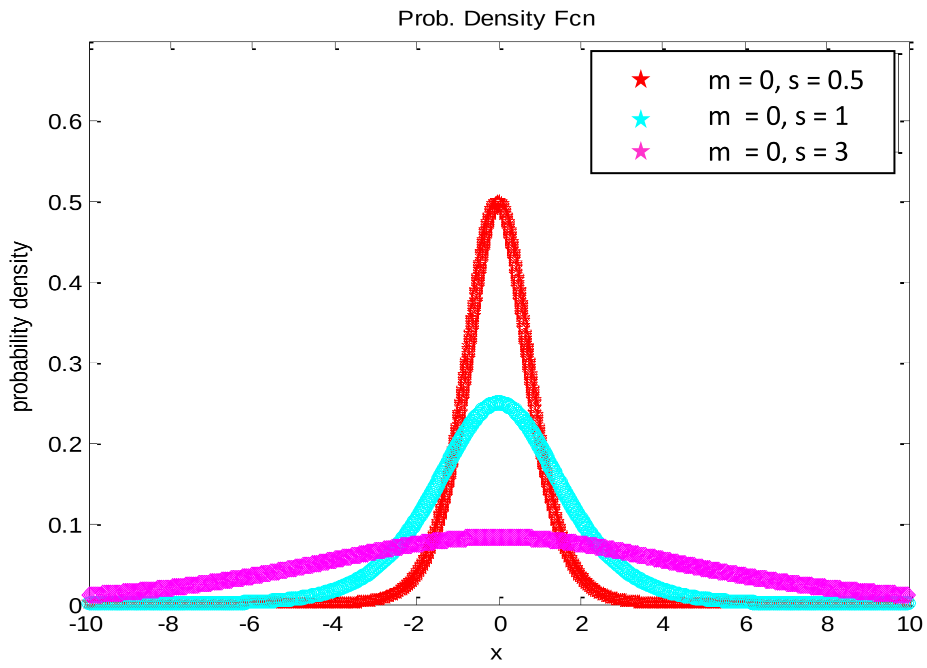
Suatu variabel acak X dikatakan mengikuti distribusi logistik jika dan hanya jika fungsi densitasnya didefinisikan :

$$f(x) = \frac{e^{-\{(x-\mu)/s\}}}{s[1 + e^{-\{(x-\mu)/s\}}]^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, s > 0$$

dengan μ = parameter lokasi

s = parameter skala

Dari fungsi kepekatan peluang dari distribusi logistik umum diperoleh betuk kurva sebagai berikut :



Gambar 1 Plot Distribusi Logistik Umum

(Stockute et al,2013)

Setelah menjelaskan tentang distribusi logistik, selanjutnya akan dijelaskan tentang distribusi *generalized* logistik tipe IV yang menjadi pokok pembahasan yang akan ditentukan karakteristik dari distribusi ini.

2.2 Distribusi *Generalized* Logistik Tipe IV

Distribusi *generalized* logistik tipe IV merupakan generalisasi dari distribusi logistik standar. Distribusi logistik standar diperoleh dari distribusi logistik umum dengan nilai μ=0 dan s=1 (standar baku) atau dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2:

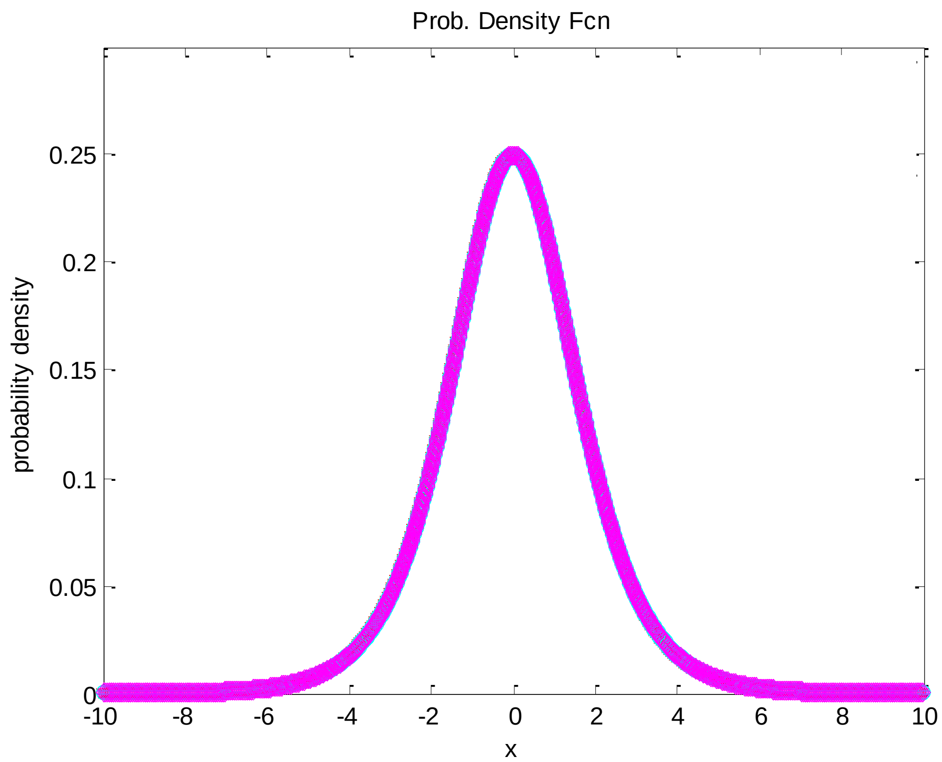
Suatu variabel acak X merupakan dikatakan mengikuti distribusi logistik standar jika dan hanya jika fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, -\infty < x < \infty$$

Yang diperoleh dari hasil turunan dari fungsi kumulatif dari distribusi standar logistik yang dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$F(x) = (1+e^{-x})^{-1}$$

Dari fungsi kepekatan peluang distribusi logistik standar dengan menggunakan program matlab diperoleh bentuk kurva sebagai berikut:



Gambar 2 Plot Distribusi Logistik Standar

(El-Saidi,Mohammed,et al,1993)

Dari distribusi logistik standar ini selanjutnya ditambahkan dua parameter bentuk (α,β) sehingga menjadi distribusi *generalized* logistik type IV yang dapat dituliskan secara sistematis sebagai berikut :

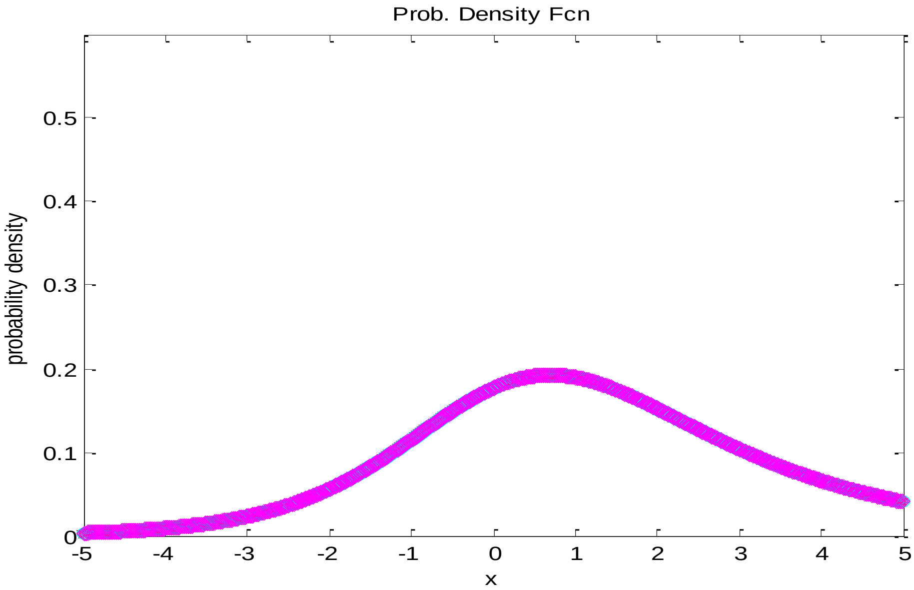
Definisi 2.3

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized* logistik tipe IV dengan parameter (α,β), jika fungsi kepadatannya adalah :

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{e^{-x\beta}}{(1+e^{x})^{\alpha+\beta}} \text{ , } -\infty < x < \infty, \alpha > 0, \beta > 0$$

Dengan B(α,β) merupakan fungsi Beta.

Dari fungsi kepekatan peluang distribusi *generalized* logistik tipe IV dengam menggunakan program matlab maka diperoleh bentuk kurva sebagai berikut :



Gambar 3 Plot Distribusi *Generalized* Logistik Type IV

(Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. 1995)

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang fungsi Gamma yang akan digunakan untuk menyelesaikan integral khusus,

2.3 Fungsi Gamma

Fungsi Gamma merupakan salah satu dari beberapa fungsi khusus di dalam matematika. Fungsi Gamma merupakan perluasan dari transformasi laplace yang sangat penting dalam matematika dan sebagai dasar dalam perkembangan teknologi dan sains modern.

Definisi 2.4

Fungsi Gamma yang dinotasikan oleh $\Gamma(n)$ didefinisikan oleh

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx \;, n > 0$$

(Satya N Mirsah,Edward J dudewicz,1995)

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang fungsi digamma yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan pada persamaan yang nantinya akan didapat pada saat mencari momen dan kumulan dari distribusi *generalized* logistik tipe IV.

2.4 Fungsi Digamma

Fungsi digamma merupakan hasil turunan (derivatif) pertama dari fungsi Gamma.

Definisi 2.5

Fungsi Digamma didefinisikan sebagai berikut :

$$\psi(z) = \frac{d[\ln \Gamma(z)]}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

(Abramowitz, M. and Stegun,1972)

Sub-bab berikutnya akan dijelaskan tentang fungsi polygamma yang juga akan digunakan pada saat mencari momen dan kumulan dari distribusi *generalized* logistik tipe IV.

2.5 Fungsi Polygamma

Fungsi polygamma merupakan fungsi yang diperoleh dari turunan ke-n fungsi Gamma.

Definisi 2.6

Fungsi polygamma didefinisikan sebagai berikut :

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\psi(z) = \frac{d^{(n+1)}}{dz^{(n+1)}} \ln \Gamma(z)$$

(Abramowitz, M. and Stegun,1972)

Selain fungsi Gamma, digamma maupun polygamma pada penelitian ini juga menggunakan fungsi Beta yang digunakan untuk menyelesaikan integral khusus .

2.6 Fungsi Beta

Fungsi Beta juga merupakam salah satu fungsi khusus yang ada di dalam matematika. Fungsi Beta digunakan untuk mengevaluasi integral tentu.

Definisi 2.7

Fungsi Beta adalah suatu fungsi bernilai real dengan dua peubah, didefinisikan oleh suatu bentuk integral, yaitu :

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}\ (1-t)^{n-1} dt\ , m > 0\ , n > 0$$

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}} dt, m > 0, n > 0$$

Fungsi Beta dapat dinyatakan melalui fungsi Gamma dengan cara berikut ini :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(Andrews, G. E.; Askey, R.; and Roy,1999)

Tahap pertama dalam menentukan karakteristik dari distribusi *generalized* logistik tipe IV yaitu dengan menentukan fungsi pembangkit momen yang nantinya dari fungsi pembangkit momen ini dapat menentukan karakteristik lainnya.

2.7 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen digunakan untuk menghitung momen dari variabel acak X. Fungsi pembangkit momen disimbolkan dengan $M_X(t)$, definisinya sebagai berikut:

Definisi 2.8

Misalkan ada sejumlah angka positif h sehingga untuk $-h < t < h$ ekspektasi $E(e^{tX})$ ada. Sehingga

$$E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x) dx,$$

Jika X merupakan variabel acak kontinu, atau

$$E(e^{tX}) = \sum_{x} e^{tx}\, f(x)$$

Jika X merupakan variabel acak diskrit. Ekspektasi ini disebut fungsi pembangkit momen (FPM) dari *x* (atau dari distribusi) dan dilambangkan dengan $M_X(t)$ yaitu

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

(Hogg and Craig, 1965)

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang momen yang juga merupakan salah satu karakterik dari distribusi *generalized* logistik tipe IV yang akan dicari dengan menggunakan fungsi pembangkit momen.

2.8 Momen

Rataan dan varians sebenarnya merupakan hal istimewa dari kelompok ukuran lainnya yang disebut momen. Dari momen ini beberapa ukuran lain dapat diturunkan. Momen itu sendiri didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.9

Momen ke-r tentang asal-usul dari suatu variabel acak *X*, dilambangkan dengan μ'_r, adalah nilai harapan dari X^r dituliskan,

$$\mu'_r = E(X') = \sum_x x^r\, f(x)$$

Untuk $r = 0,1,2,\cdots$ pada saat *X* diskrit

$$\mu'_r = E(X') = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, f(x)\, dx$$

Pada saat *X* kontinu.

Momen juga dapat diperoleh dengan menurunkan fungsi pembangkit momen, yang dapat dinyatakan dengan

$$\frac{d}{dt} M_x(t)|_{t=0} = \mu_r{}'$$

(Irwin Miller, Marrylees Miller, 1999)

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang fungsi pembangkit kumulan yang akan digunakan untuk menentukan kumulan dari distribusi *generalized* logistik tipe IV.

2.9 Fungsi Pembangkit Kumulan

Fungsi pembangkit kumulan merupakan fungsi yang dapat digunakan untuk mencari kumulan dari peubah acak X. Fungsi pembangkit kumulan disimbolkan dengan $Q_X(t)$ dan didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.10

Fungsi Pembangkit kumulan dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut :

$$Q_X(t) \ = ln\, M_X(t)$$

Dimana $M_X(t)$ merupakan fungsi pembangkit momen dari peubah acak X.

(Breno de Andrade P.N & Rio de Janeiro,2005)

Setelah fungsi pembangkit kumulan, pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang kumulan yang akan diperoleh dengan menggunakan fungsi pembangkit kumulan.

2.10 Kumulan

Dalam teori probabilitas dan statistik, kumulan dari distribusi probabilitas adalah seperangkat kuantitas yang memberikan alternatif untuk momen-momen dari suatu distribusi. Momen-momen menentukan kumulan dalam arti bahwa setiap dua distribusi probabilitas yang memiliki momen identik akan memiliki kumulan identik juga, dan demikian pula kumulan menentukan momen. Dalam beberapa kasus perlakuan teoritis masalah dalam hal kumulan lebih sederhana dibandingkan dengan menggunakan momen.

Definisi 2.11 :

Kumulan dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut :

$$K_r = \frac{d^r}{dt^r} Q_X(t)|_{t=0}$$

Dimana $Q_X(t)$ merupakan fungsi pembangkit kumulan.

(Breno de Andrade P.N & Rio de Janeiro,2005)

Setelah kumulan diketahui, dalam sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang kemencengan atau *skewness* yang dapat dicari setelah kumulan ke-2 dan ke-3 diperoleh.

2.11 Kemencengan

Kemencengan atau kecondongan (*skewness*) adalah tingkat ketidaksimetrisan atau kejauhan simetri dari sebuah distribusi. Sebuah distribusi yang tidak simetris akan memiliki rata-rata, median, dan modus yang tidak sama besarnya.

S*kewness* dari suatu variable random X yang dinotasikan dengan Skew[X] didefinisikan sebagai:

$$Skew[X] = \frac{E[(X-\mu)^3]}{E[(X-\mu)^2])^{\frac{3}{2}}} = \frac{K_3}{(K_2)^{\frac{3}{2}}}$$

Skewness ini juga dinamakan *skewness* populasi. *Skewness* merupakan ukuran dari kesimetrisan atau lebih tepatnya kekurang-simetrisan. Suatu distribusi dikatakan simetris jika distribusi tersebut nampak sama antara sebelah kanan dan sebelah kiri titik.pusatnya. Distribusi yang simetris misalnya distribusi normal, distribusi *t* dan distribusi seragam. Distribusi yang mempunyai *skewness* positif misalnya distribusi eksponensial, distribusi Chi-kuadrat, distribusi Poisson dan distribusi Binomial dengan $p > 0.5$ sedangkan distribusi yang mempunyai *skewness* negatif misalnya distribusi Binomial dengan p < 0.5.

(deGunst dan van der Vaart, 1993)

Selain *skewness*, pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang kurtosis atau tingkat keruncingan dari distribusi data yang dapat diperoleh setelah kumulan ke-2 dan kumulan ke-4 didapatkan.

2.12 Kurtosis

Kurtosis (keruncingan distribusi data) adalah ukuran tinggi rendahnya puncak dari suatu ditribusi. Kurtosis dilambangkan dengan α_4

Definisi 2.12 :

Momen keempat terhadap rataan, $\mu_4 = K_4 = E(X - EX)^4$, bila dibagi dengan σ^4, disebut dengan kurtosis distribusi X, dan sering dinyatakan dengan α_4

$$\alpha_4 = \frac{K_4}{s^4} = \frac{K_4}{(s^2)^2} = \frac{K_4}{(K_2)^2}$$

(Satya N Mirsah, Edward J dudewicz, 1995)

Sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang fungsi karakteristik yang secara sistematis memiliki bentuk yang sama dengan fungsi pembangkit momen,

2.13 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dan statistika.

Definisi 2.12

Fungsi karakteristik (Φ_X) dari peubah acak X, didefinisikan sebagai nilai ekspetasi dari e^{itX}, dimana i adalah unit imaginer dan t ∈ R dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\Phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

Dimana $\Phi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = E(cos(tX) + isin(tX))$

$$= E\left(cos(tX)\right) + E\left(i\ sin(tX)\right)$$

dan f_x merupakan fungsi kepakatan peluang dari distribusi X.

(E.Lukacs & R.G Laha, 1964)