II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan konsep dasar yang akan digunakan dalam pembahasan hasil penelitian ini, antara lain :

2.1 Fungsi Gamma

Fungsi gamma merupakan suatu fungsi khusus. Fungsi ini dapat digunakan untuk menyederhanakan integral-integral khusus.

Definisi 2.1

Fungsi gamma yang dinotasikan dengan $\Gamma(n)$ didefinisikn sebagai:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \qquad ; n > 0 \tag{2.1}$$

Rumus rekursi untuk fungsi gamma adalah:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

(Abramowitz dan Stegun, 1972)

Sub-bab selanjutnya akan membahas mengenai fungsi digamma yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan yang nantinya akan diperoleh dalam penelitian ini.

2.2 Fungsi digamma

Fungsi digamma merupakan hasil turunan (derivatif) pertama dari fungsi gamma.

Definisi 2.2 :

Fungsi Digamma didefinisikan sebagai berikut :

$$\psi(z) = \frac{d[ln\,\Gamma(z)]}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{2.2}$$

(Abramowitz, M. And Stegun,1972)

Berikutnya akan dijelaskan tentang fungsi polygamma yang juga merupakan landasan teori yang akan digunakan pada penelitian ini.

2.3 Fungsi Polygamma

Fungsi polygamma merupakan fungsi yang diperoleh dari turunan ke-n fungsi gamma.

Definisi 2.3:

Fungsi polygamma didefinisikan sebagai berikut :

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\psi(z) = \frac{d^{(n+1)}}{dz^{(n+1)}} ln\,\Gamma(z) \tag{2.3}$$

(Abramowitz, M. andStegun,1972)

Selain fungsi gamma, digamma maupun polygamma pada penelitian ini juga menggunakan fungsi beta yang digunakan untuk menyelesaikan integral khusus.

2.4 Fungsi Beta

Fungsi beta merupakan suatu fungsi khusus. Fungsi ini dapat digunakan untuk menyederhanakan integral-integral khusus.

Definisi 2.4

Fungsi beta yang dinotasikan dengan $\mathrm{B}(a,b)$ didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad ; a > 0 \ , b > 0 \tag{2.4}$$

Rumus rekursi untuk fungsi beta adalah:

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{2.5}$$

(James B. McDonald, Yexio J.Xu,1993)

Selanjutnya akan dibahas mengenai distribusi eksponensial sebagai pembanding dengan distribusi *generalized* eksponensial.

2.5 Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial merupakan salah satu distribusi kontinu dan salah satu kasus khusus dari distribusi gamma. Didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.5

Misalkan X adalah peubah acak, menyebar menurut distribusi eksponensial dengan parameter $\lambda > 0$ dimana fungsi densitasnya adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x > 0; \ \lambda > 0 \\ 0 & ; x \ lainnya \end{cases} \tag{2.6}$$

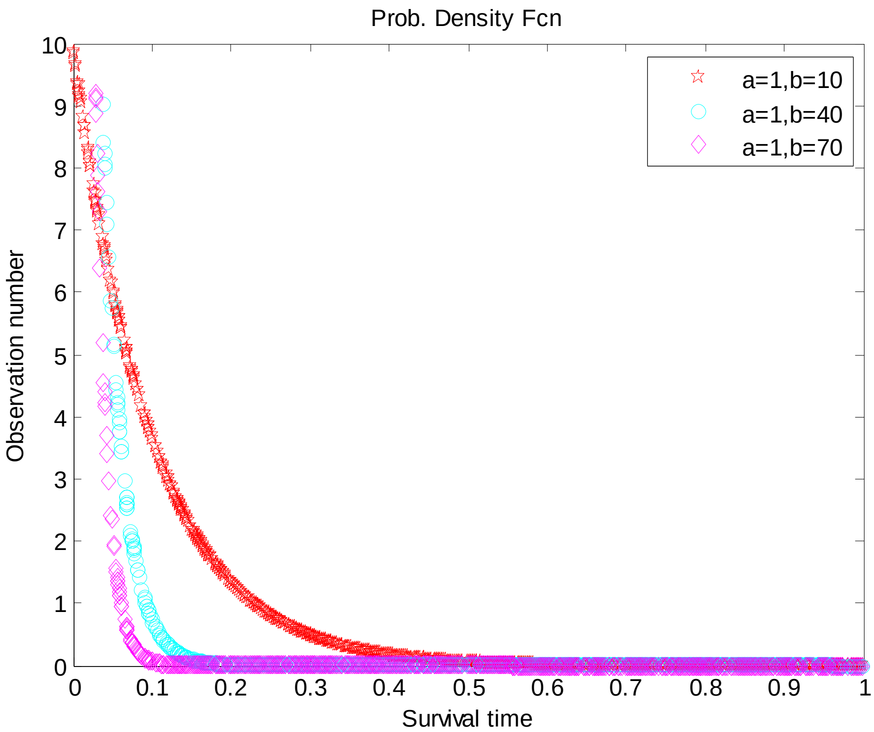
s

dimana:

X: Peubah acak

λ: Paramater skala

Berikut ini adalah bentuk grafik dari distribusi eksponensial.



Gambar 1 Grafik fungsi kepekatan peluang distribusi eksponensial

(Gupta dan Kundu, 1999)

Pokok kajian dalam penilitian ini yaitu distribusi *generalized eksponensial* yang akan dibahas pada sub-bab selanjutnya

2.6 Distribusi *Generalized* Eksponensial

Distribusi *Generalized* Eksponensial pertama kali diperkenalkan oleh Gupta dan Kundu pada tahun 1999. Distribusi ini diambil dari salah satu fungsi kepadatan kumulatif yang digunakan pada pertengahan abad 19 (Gompertz-Verhulst) untuk membandingkan tabel kematian dan menghasilkan laju pertumbuhan penduduk. Yang didefinisikan sebagai berikut :

$$G(t) = \left(1 - \rho e^{-t\lambda}\right)^{\alpha} \tag{2.7}$$

Kemudian dengan menstandarisasikan $\rho = 1$ dan $x = t$, maka didapat *Univariate Generalized Exponential distribution* dengan fungsi kepadatan kumulatif (fkk) dan x > 0, adalah sebagai berikut :

$$F(x; \alpha, \lambda) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\alpha} \tag{2.8}$$

dari turunan fungsi kepadatan kumulatif di atas, juga didapat fungsi kepadatan peluangnya (fkp) dari distribusi *generalized* eksponensial.

Definisi 2.6

Misalkan X adalah peubah acak dari distribusi *generalized* eksponensial dengan dua parameter, maka menurut Gupta dan Kundu (1999), fungsi kepekatan peluang dari peubah acak tersebut adalah

$$f(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \alpha\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\alpha - 1}; & \alpha > 0,\ \lambda > 0,\ x > 0 \\ 0 & ; x\ lainnya \end{cases} \tag{2.9}$$

dengan :

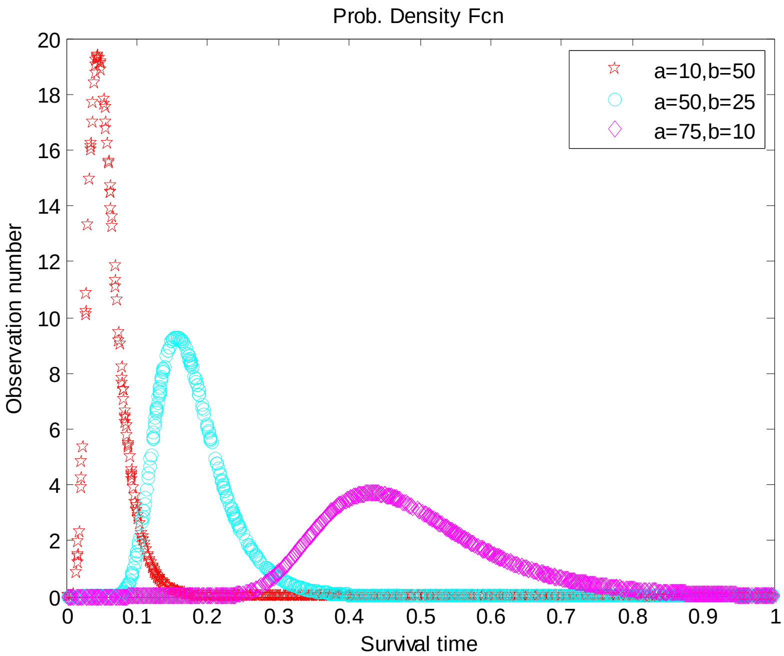
X = peubah acak

α = parameter bentuk

λ = parameter skala

e = 2,7183

Dimana α dan λ masing – masing adalah parameter bentuk dan parameter skala. Ini jelas bila α = 1, maka distribusi diatas merupakan distribusi eksponensial. Berikut ini merupakan bentuk grafik dari distribusi *generalized* eksponensial.



Gambar 2 Grafik fungsi kepekatan peluang dari
distribusi *generalized* eksponensial

(Gupta dan Kundu, 1999)

Pada sub-bab selanjutnya akan diuraikan definisi fungsi pembangkit momen yang akan digunakan untuk mencari momen dari distribusi generalized exponential.

2.7 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari suatu distribusi digunakan untuk mencari momen dari suatu distribusi tersebut. Fungsi pembangkit momen dapat diperoleh dari ekspetasi e^{tX} dari suatu distribusi tersebut.

Definisi 2.7

Fungsi Pembangkit Momen peubah acak X diperoleh dari $E(e^{tX})$ dan dinyatakan dengan $M_X(t) = E(e^{tX})$.

Bila X merupakan peubah acak diskrit, maka

$$E(e^{tX}) = \sum_{x} e^{tx} f\,(x) \tag{2.10}$$

dan bila X merupakan peubah acak kontinu, maka

$$E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f\,(x) dx \tag{2.11}$$

(Hogg dan craig, 1965)

Teorema 2.1 :

Bila fungsi pembangkit momen dari peubah acak *X* ada untuk $|t| \leq T$, untuk $T > 0$, maka $E(X^r)$ dengan ($n = 1,2,3,\ldots$), maka $E(X^r) = M_X^r(0)$.

$$E(X^r) = M_X^r(0) = \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)\Big|_{t=0} \tag{2.12}$$

(Edward J. Dudewicz & Satya N.Mishra, 1995)

Bukti :

Diketahui bahwa $M_X(t) = E(e^{tX})$, dengan menggunakan deret Maclaurin :

$$e^Y = 1 + Y + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + \cdots + \frac{Y^r}{r!} \tag{2.13}$$

Jika *y* diganti *tX* maka :

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tX)^r}{r!}$$

Sehingga diperoleh :

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$= E\left(1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tX)^r}{r!}\right)$$

$$= E(1) + E(tX) + E\left(\frac{(tX)^2}{2!}\right) + E\left(\frac{(tX)^3}{3!}\right) + \cdots + E\left(\frac{(tX)^r}{r!}\right)$$

$$M_X(t) = E(1) + tE(X) + \frac{(t)^2}{2!}E(X^2) + \frac{(t)^3}{3!}E(X^3) + \cdots + \frac{(t)^r}{r!}E(X^r)$$

$$= 1 + tE(X) + \frac{(t)^2}{2!}E(X^2) + \frac{(t)^3}{3!}E(X^3) + \cdots + \frac{(t)^r}{r!}E(X^r)$$

Jika $M_X(t)$ diturunkan terhadap *t*, kemudian harganya sama dengan nol, maka akan diperoleh:

$$M_X'(t) = E(X) + \frac{2t}{2!}E(X^2) + \frac{3t^2}{3!}E(X^3) + \cdots + \frac{rt^{r-1}}{r!}E(X^r)$$

$M_X'(0) = E(X) = \mu_1'$; momen ke-1 di sekitar titik asal

$$M_X''(t) = E(X^2) + \frac{6t}{3!}E(X^3) + \cdots + \frac{r(r-1)t^{r-2}}{r!}E(X^r)$$

$M_X''(0) = E(X^2) = \mu_2'$; momen ke-2 di sekitar titik asal

$$M_X'''(t) = E(X^3) + \cdots + \frac{r(r-1)(r-2)t^{r-3}}{r!}E(X^r)$$

$M_X'''(0) = E(X^3) = \mu_3'$; momen ke-3 di sekitar titik asal

Sampai turunan ke-r

$M_X^r(0) = E(X^r) = \mu_r'$; momen ke-r di sekitar titik asal

Jadi untuk mendapatkan momen ke-*r* dari suatu peubah acak *X* adalah dengan menurunkan fungsi pembangkit momen sebanyak *r* kali dan memasukkan nilai *t* = 0, sehingga terbukti bahwa:

$$E(X^r) = \frac{d^r}{dt^r}M_X(t)\Big|_{t=0} \quad (2.14)$$

(Walck, 2007)

Dan pada sub-bab selanjutnya akan dibahas mengenai definisi momen yang merupakan karakteristik dari suatu distribusi.

2.8 Momen

Karakterisasi terhadap suatu distribusi dapat dilakukan dengan mengkaji momen dari distribusi tersebut. Momen memiliki peran penting dalam statistika karena mampu menjelaskan sebaran dari peubah acak. Momen didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.8

Momen ke-r di sekitar titik asal dari peubah acak didefinisikan oleh $\mu_r' = E(X^r)$.

Jika X peubah acak diskrit, maka

$$\mu_r' = E(X^r) = \sum_x x^r f(x) \tag{2.15}$$

Dan jika X peubah acak kontinu, maka

$$\mu_r' = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx \tag{2.16}$$

Bila momen pertama dan kedua di sekitar titik asal dinyatakan dengan $\mu_1' = E(X)$ dan $\mu_2' = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$, maka rataan dan variansi suatu peubah acak dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mu = E(X) = \mu'_1 \quad \text{dan} \quad Var(X) = \mu_2' - \mu^2$$

(Walck, 2007)

Pada sub-bab selanjutnya akan diuraikan mengenai fungsi pembangkit kumulan dari distribusi *generalized* eksponensial.

2.9 Fungsi Pembangkit Kumulan

Fungsi pembangkit kumulan digunakan untuk menghitung kumulan dari variabel acak X. Fungsi pembangkit kumulan disimbolkan dengan $\varphi(t)$, didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.9

Fungsi Pembangkit Kumulan didefinisikan sebagai

$$ln\ \varphi_X(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{(it)^n}{n!}\ atau \ln\ M_X(t) = \ln E(e^{tX}) \quad (2.17)$$

Dimana

$\varphi_X(t)$: Fungsi Karakteristik

$M_X(t)$: Fungsi Pembangkit momen

(Walck, 2007)

Karakteristik lain dari distribusi *generalized* eksponensial yang akan dicari dalam penelitian ini adalah kumulan. Definisi kumulan akan diuraikan pada sub-bab selanjutnya.

2.10 Kumulan

Kumulan merupakan suatu karakteristik dari suatu distribusi peluang. Kumulan dapat dicari menggunakan cara langsung atau dengan penurunan fungsi pembangkit kumulan.

Definisi 2.10

Kumulan k_r didefinisikan sebagai berikut:

$$ln \ \ \varphi_X(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{(it)^n}{n!} \tag{2.18}$$

Dengan menggunakan deret *Maclaurin* maka didapat :

$$ln \ \ \varphi_X(t) = (it)\mu_1' + \frac{1}{2}(it)^2\left(\mu_2' - \mu_1'^2\right) + \frac{1}{3!}(it)^3(2\mu_1'^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3')$$

$$+\frac{1}{4!}(it)^4\left(-6\mu_1'^4 + 12\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1'^2 - 4\mu_1'\mu_3' + \mu_4'\right)$$

$$+\frac{1}{5!}(it)^5\left[24\mu_1'^5 - 60\mu_1'^3\mu_2' + 20\mu_1'^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3'\right]$$

$$+5\mu_1'\left(6\mu_2'^2 - \mu_4'\right) + \mu_5' + \cdots$$

Dimana μ_r' momen baku, maka dapat dituis kembali sebagai berikut:

$$k_1 = \mu_1'$$

$$k_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$k_3 = 2\mu_1'^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3'$$

$$k_4 = -6\mu_1'^4 + 12\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_2'^2 - 4\mu_1'\mu_3' + \mu_4'$$

$$Sampai\ kumulan\ ke - r\ sebagai\ berikut$$

$$k_r = \mu_r' - \sum_{n=1}^{r-1}\binom{r-1}{n-1}k_n\mu_{r-n}'$$

(Kendall & Stuart, 1977)

Kemudian, kumulan-kumulan diatas dapat digunakan untuk mencari skewness yang akan dijelaskan pada sub-bab selanjutnya.

2.11 *Skewness*

Kemencengan atau kecondongan (*skewness*) adalah tingkat ketidaksimetrisan atau kejauhan simetri dari sebuah distribusi. Sebuah distribusi yang tidak simetris akan memiliki rata-rata, median, dan modus yang tidak sama besarnya.

Definisi 2.11

S*kewness* dari suatu variable random X yang dinotasikan dengan Skew$[X]$ didefinisikan sebagai:

$$Skew[X] = \frac{E[(X-\mu)^3]}{E[(X-\mu)^2])^{\frac{3}{2}}} = \frac{K_3}{(K_2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.19)$$

Skewness merupakan ukuran dari kesimetrisan atau lebih tepatnya kekurang-simetrisan. Suatu distribusi dikatakan simetris jika distribusi tersebut nampak sama antara sebelah kanan dan sebelah kiri titik.pusatnya. Distribusi - distribusi yang simetris misalnya distribusi normal, distribusi *t* dan distribusi seragam. Distribusi–distribusi yang mempunyai *skewness* positif misalnya distribusi eksponensial, distribusi Chi-kuadrat, distribusi Poisson dan distribusi Binomial dengan $p > 0.5$ sedangkan distribusi yang mempunyai *skewness* negatif misalnya distribusi Binomial dengan $p < 0.5$.

(deGunst dan van der Vaart, 1993)

Selain itu, kumulan juga dapat digunakan untuk mencari kurtosis yang akan dijelaskan definisinya pada sub-bab selanjutnya.

2.12 Kurtosis

Kurtosis (keruncingan distribusi data) adalah ukuran tinggi rendahnya puncak dari suatu ditribusi. Kurtosis dilambangkan dengan α_4 dan dapat diperoleh dengan rumus :

$$\alpha_3 = \frac{K_4}{s^4} \tag{2.20}$$

Dimana s merupakan simpangan baku yang dapat diperoleh dari $\sqrt{K_2}$.

(Edward J. Dudewicz & Satya N.Mishra, 1995)

Kemudian pada sub-bab terakhir akan dijelaskan mengenai fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* eksponensial.

2.13 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi *generalized* eksponential dengan menambahkan i sebagai bagian imaginer atau momen dari (itX) atau ekspektasi dari e^{itX}.

Definisi 2.9

Fungsi karakteristik (φ_X) dari peubah acak X, didefinisikan sebagai nilai ekspektasi dari e^{itX}, dimana i adalah unit imaginer dan $t \in R$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \tag{2.21}$$

dimana $\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = E\{\cos(tX) + i\sin(tX)$

$$= E\,[\cos(tX)] + i[E\sin(tX)]$$

Dan $F(x)$ merupakan fungsi kumulatif dari distribusi X, sedangkan $f(x)$ merupakan fungsi kepakatan peluang dari distribusi X.

(Kendall & Stuart, 1977)

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan mengenai fungsi eksponensial yang juga akan digunakan dalam penelitian ini.

2.14 Fungsi Eksponensial

Rumus Euler, dinamakan untuk Leonhard Euler, adalah rumus matematika dalam analisis kompleks yang menunjukkan hubungan mendalam antara fungsi trigonometri dan fungsi eksponensial. (Identitas Euler adalah kasus spesial dari rumus Euler.)

Rumus Euler menyatakan bahwa, untuk setiap bilangan real *x*,

$$e^{it} = cos(t) + i\ sin(t) \tag{2.22}$$

Dimana

e adalah basis logaritma natural

i adalah unit imajiner

Dan fungsi sekawannya

$$e^{-it} = cos(t) - i\ sin(t) \tag{2.23}$$

yang diperoleh dari $cos(-t) = cos(t)$, $sin(-t) = -sin(t)$ dengan $t = nx$, sehingga

$$e^{inx} = cos(nx) + i\ sin(nx) \tag{2.24}$$

$$e^{-inx} = cos(nx) - i\ sin(nx) \quad (2.25)$$

Persamaan (2.24) dan (2.25) dijumlahkan kemudian dibagi dengan 2 sehingga diperoleh

$$cos(nx) = \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2} \quad (2.26)$$

Persamaan (2.24) dan (2.25) dikurangkan kemudian dibagi dengan $2i$ sehingga diperoleh

$$sin(nx) = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2i} \quad (2.27)$$

(Kreyszig, 1993)