BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijabarkan mengenai literatur yang digunakan pada penelitian. Pertama akan dijabarkan mengenai fungsi gamma dimana fungsi gamma digunakan untuk menyederhanakan hasil pencarian fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* gamma.

2.1 Fungsi Gamma

Fungsi gamma merupakan suatu fungsi khusus. Fungsi ini dapat digunakan untuk menyederhanakan integral-integral khusus.

Definisi 2.1

Fungsi gamma dinotasikan dengan $\Gamma(\alpha)$ didefinisikan sebagai :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ , untuk } \alpha > 0$$

(Irwin Miller, Jhon E. Freund, dan Richard A. Johnson, 1990).

Pada definisi selanjutnya akan dijabarkan mengenai distribusi gamma dimana distribusi gamma merupakan kasus khusus dari distribusi *generalized* gamma dengan $p = 1$.

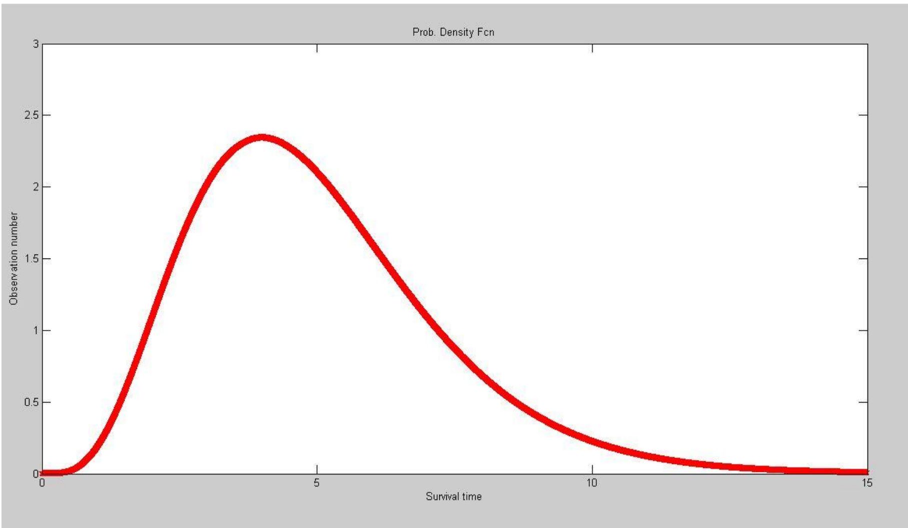
2.2 Distribusi Gamma

Distribusi gamma merupakan salah satu keluarga distribusi peluang kontinu yang biasa digunakan dalam pemodelan data kelangsungan hidup. Distribusi ini mempunyai dua parameter yaitu a yang disebut parameter skala dan d yang disebut parameter bentuk.

Definisi 2.2

Suatu variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi gamma dengan parameter d dan p, jika fungsi kepekatannya adalah :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^d \Gamma(d)} x^{d-1} e^{-\frac{x}{a}} & ; x, a, d > 0 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$



Gambar 2.1 Grafik Fungsi Kepekatan Peluang dari Distribusi Gamma dengan $a = 1$ dan $d = 3$

(Edward J. Dudewicz dan Satya N. Mishra, 1988).

Selanjutnya akan dijabarkan mengenai fungsi kepekatan peluang dari distribusi *generalized* gamma yang akan dibahas dalam penelitian ini, kemudian akan ditentukan momen, kumulan, serta fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* gamma.

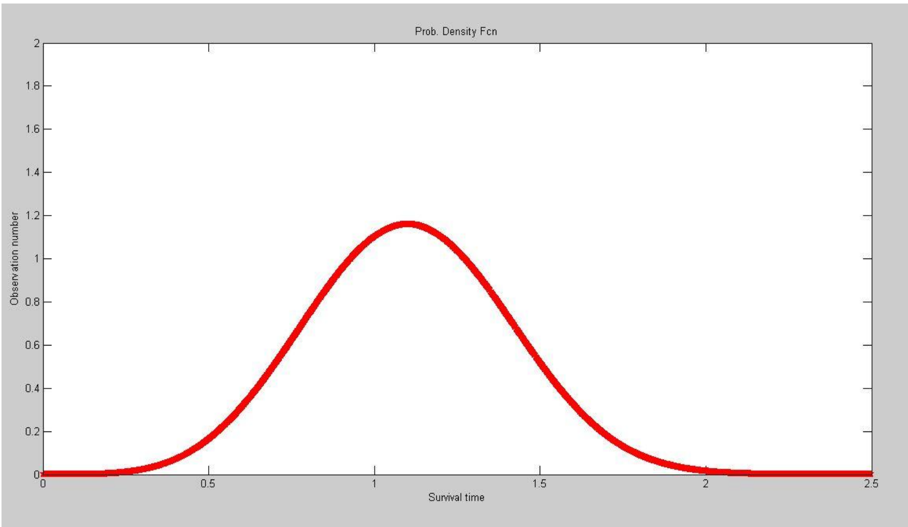
2.3 Distribusi *Generalized* Gamma

Distribusi *generalized* gamma merupakan perumuman dari distribusi gamma. Distribusi *generalized* gamma memiliki tiga parameter yaitu parameter bentuk (d, p) dan parameter skala (a).

Definisi 2.3

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized* gamma dengan parameter a, d dan p jika fungsi kepekatannya adalah :

$$f(x; a, d, p) = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{p}{a^d}\right) x^{d-1} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^p}}{\Gamma\left(\dfrac{d}{p}\right)} & ; x > 0; a, d, p > 0 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$



Gambar 2.2 Grafik Fungsi Kepekatan Peluang dari Distribusi *Generalized* Gamma dengan $a = 1$, $d = 3$ dan $p = 3$

(Stacy, E.W, 1962).

Pada bagian selanjutnya akan dijabarkan mengenai ekspansi deret MacLaurin, deret ini akan digunakan pada ekspansi e^{tX} untuk menentukan momen dan fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* gamma.

2.4 Ekspansi Deret Maclaurin

Deret Maclaurin digunakan untuk membantu menyelesaikan suatu persamaan dengan mengekspansikannya sehingga dapat lebih mudah menyelesaikannya.

Definisi 2.4

Jika f fungsi yang didefinisikan oleh :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Penurunan berturut dari fungsi tersebut adalah :

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2\,.\,3c_3 x + \cdots + (n-1)nx_n x^{n-2} + \cdots$$

Dan seterusnya sampai ke-n, untuk setiap n anggota bilangan bulat positif. Jika $x = 0$ maka persamaan tersebut menjadi :

$$f(0) = c_0,$$

$$f'(0) = c_1,$$

$$f''(0) = 2c_2 \iff c_2 = \frac{f''(0)}{2!},$$

$$f'''(0) = 3c_3 \iff c_3 = \frac{f'''(0)}{3!},$$

Sehingga bentuk umumnya adalah :

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ ; untuk setiap bilangan bulat positif } n$$

Jadi, deret pangkat dari fungsi f dalam x dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Dalam hal khusus, bila $a = 0$ deret tersebut menjadi deret MacLaurin, yaitu sebagai berikut :

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!} x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!}$$

(Leithold, 1986).

Selanjutnya akan dibahas mengenai kemencengan/kemiringan *(skewness)*, yang mana pada penelitian ini akan digunakan untuk mengetahui kemencengan/kemiringan *(skewness)* dari distribusi *generalized* gamma dengan melakukan simulasi grafik.

2.5 *Skewness* (Kemiringan)

Kemiringan *(skewness)* adalah derajat ketaksimetrian dari suatu distribusi. Jika kurva frekuensi (polygon frekuensi termuluskan) suatu distribusi mempunyai ekor yang lebih panjang kekanan dari maksimum pusat dibandingkan yang kiri, distribusi tersebut melenceng ke kanan atau mempunyai kemiringan positif. Jika sebaliknya yang terjadi dikatakan melenceng ke kiri atau mempunyai kemiringan negatif.

Untuk distribusi yang melenceng, nilai tengah cenderung terletak pada sisi yang sama dari modus sebagai ekor yang lebih panjang jadi suatu ukuran tak simetri diperlihatkan oleh selisih (nilai tengah-modus).

Koefisien *skewness* berdasarkan nilai kumulan, yaitu sebagai berikut :

$$\text{Koefisien } skewness = \frac{K_3}{s^3} = \frac{K_3}{(\sqrt{K_2})^3} = \frac{K_3}{\sqrt{K_2^3}} = \frac{K^3}{K^{3/2}}$$

(Murray R Spiegel, 1988).

Kemudian akan dibahas mengenai *kurtosis*, yang mana pada penelitian ini akan ditentukan *kurtosis* dari distribusi *generalized* gamma untuk mengetahui kelandaian dari distribusi *generalized* gamma dengan melakukan simulasi grafik.

2.6 ***Kurtosis*** **(Kelandaian)**

Kurtosis adalah derajat puncak dari suatu distribusi, biasanya diambil secara relative terhadap suatu distribusi normal.

$$\text{Koefisien } kurtosis = \frac{K_4}{s^4} = \frac{K_4}{K_2^2}$$

(Murray R Spiegel, 1988).

Pada bagian berikutnya akan dijabarkan mengenai momen, yang mana pada penelitian ini akan ditentukan momen dari distribusi *generalized* gamma dengan menggunakan definisi.

2.7 Momen

Momen merupakan suatu karakteristik dari suatu distribusi peluang. Momen dapat ditentukan menggunakan definisi atau penurunan fungsi pembangkit momen. Momen dapat ditentukan dari momen pertama sampai momen ke-r.

Definisi 2.5

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka momen ke-r (dinotasikan dengan μ'_r) didefinisikan sebagai :

$$\mu'_r = E(X^r)\,, \qquad r = 1,2,3,\ldots$$

Definisi 2.6

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka momen ke-r (dinotasikan dengan μ'_r) didefinisikan sebagai :

$$\mu'_r = \sum_x x^r \,.\, p(x)$$

Definisi 2.7

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka momen ke-r (dinotasikan dengan μ'_r) didefinisikan sebagai :

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \,.\, f(x)dx$$

(Hogg dan Craig, 1997).

Selanjutnya akan dijabarkan mengenai fungsi pembangkit momen dimana pada penelitian ini akan ditentukan fungsi pembangkit momen dari distribusi *generalized* gamma dengan menurunkan fungsi pembangkit momennya yang dievaluasi pada $t = 0$.

2.8 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari suatu distribusi digunakan untuk menentukan momen dari suatu distribusi tersebut. Fungsi pembangkit momen dapat diperoleh dari ekspetasi e^{tX} dari suatu distribusi tersebut.

Definisi 2.8

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu maka fungsi pembangkit momen dari X (X dinotasikan dengan $M_X(t)$) didefinisikan sebagai :

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Definisi 2.9

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai :

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx}.p\ (x)$$

Definisi 2.10

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai :

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.f(x)dx$$

(Hogg dan Craig, 1997).

Pada bagian selanjutnya akan dijabarkan mengenai kumulan, yang mana pada penelitian ini akan ditentukan kumulan dari distribusi *generalized* gamma dengan menggunakan definisi seperti yang akan dijabarkan di bawah ini.

2.9 Kumulan

Kumulan merupakan suatu karakteristik dari suatu distribusi peluang. Kumulan dapat ditentukan menggunakan definisi atau dengan penurunan fungsi pembangkit kumulan.

Definisi 2.11

Kumulan k_r didefinisikan sebagai :

$$ln\phi_X(t) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} k_r \frac{(it)^r}{r!}$$

Dengan menggunakan deret Maclaurin maka diperoleh :

$$ln\phi_X(t) = (it)\mu_1^{'} + \frac{1}{2}(it)^2\left(\mu_2^{'} - \mu_1^{'\,2}\right) + \frac{1}{3!}(it)^3(2\mu_1^{'\,3} - 3\mu_1^{'}\mu_2^{'}+\mu_3^{'}) +$$

$$\frac{1}{4!}(it)^4(-6\mu_1'^4 + 12\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1'^2 - 4\mu_1'\mu_3' + \mu_4') + \frac{1}{5!}(it)^5$$

$$\left[24\mu_1'^5 - 60\mu_1'^3\mu_2' + 20\mu_1'^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3' + 5\mu_1'\left(6\mu_2'^2 - \mu_4'\right) + \mu_5'\right] + \cdots$$

Dimana μ_n' momen baku, maka dapat ditulis kembali sebagai :

$$k_1 = \mu_1'$$

$$k_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$k_3 = 2\mu_1'^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3'$$

$$k_4 = -6\mu_1'^4 + 12\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_2'^2 - 4\mu_1'\mu_3' + \mu_4'$$

$$k_5 = 24\mu_1'^5 - 60\mu_1'^3\mu_2' + 20\mu_1'^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3' + 5\mu_1'\left(6\mu_2'^2 - \mu_4'\right) + \mu_5'$$

Sehingga rumus dari kumulan dapat ditulis sebagai berikut :

$$K_r = \mu_r' - \sum_{n=1}^{r-1} \binom{r-1}{n-1} k_n \mu_{r-n}'$$

(Abramowitz dan Stegun, 1972).

Pada bagian selanjutnya akan dijabarkan mengenai fungsi karakteristik, yang mana pada penelitian ini akan ditentukan fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* gamma dengan menggunakan definisi seperti yang akan dijabarkan di bawah ini.

2.10 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi *generalized* gamma dengan menambahkan i sebagai bagian imaginer atau momen dari (itX) atau ekspetasi dari e^{itX}.

Definisi 2.12

Fungsi karakteristik $\left(\phi_X(t)\right)$ dari peubah acak X, didefinisikan sebagai nilai ekspetasi dari e^{itX} sebagai berikut :

$$\left(\phi_X(t)\right) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Dimana $f(x)$ merupakan fungsi kepakatan peluang dari distribusi X, (Kendall dan Stuart, 1958).