II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai teori-teori yang mendukung dalam menentukan momen, kumulan, dan fungsi karakteristik dari distribusi log-logistik (α,β).

2.1 Distribusi Log-Logistik

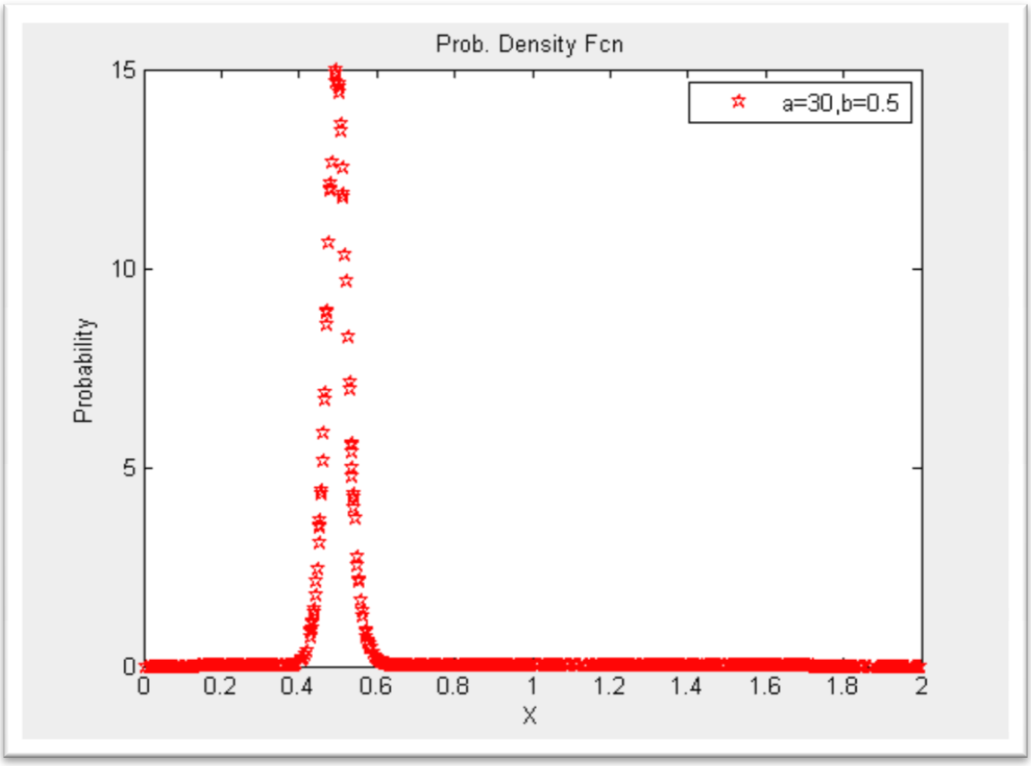
Distribusi log-logistik adalah distribusi peluang dari variabel acak yang logaritmanya memiliki distribusi logistik. Distribusi log logistik dengan 2 parameter yaitu α sebagai parameter bentuk dan β sebagai parameter skala

Definisi 2.1

Variabel acak *X* dikatakan mengikuti distribusi log-logistik dengan parameter bentuk α dan parameter skala β, dilambangkan dengan $X \sim L_L(\alpha,\beta)$, jika fungsi kepekatan peluang (fkp) diberikan sebagai berikut :

$$f(x;\alpha;\ \beta) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}\left(1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{-2}$$

Dimana, $\beta > 0$ dan $\alpha > 0$.



Gambar 1. Grafik Fungsi Kepekatan Peluang Distribusi Log-logistik

(Asha Dixit, 2008)

Sub-bab selanjutnya akan membahas tentang fungsi Beta yang akan digunakan dalam penelitian ini untuk menyelesaikan bentuk integral tertentu dalam mencari karakteristik dari distribusi log-logistik.

2.2 Fungsi Beta

Fungsi Beta digunakan untuk mengevaluasi integral tentu, sehingga dalam penelitian ini sangat diperlukan untuk mengevaluasi integral tentu yang terbentuk dalam mencari momen. Fungsi Beta disimbolkan dengan $B(a, b)$.

Definisi 2.2

Fungsi Beta dengan parameter a dan b

$$B(a,b) = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy$$

Dengan $R_a > 0, R_b > 0$.

(Milton Abramowitz dan Irene A. Stegun, 1972)

Selain fungsi Beta untuk mengevaluasi integral tentu yang terbentuk, selanjutnya diperlukan ekspansi deret Maclaurin dalam menemukan momen dari distribusi log-logistik yang akan dibahas pada sub-bab selanjutnya.

2.3 Ekspansi Deret Maclaurin

Deret Maclaurin merupakan deret Taylor yang berpusat di titik nol. Deret ini digunakan untuk meleburkan bentuk e^{tx} dalam persamaan momen yang akan dicari dalam penelitian ini.

Teorema Deret Maclaurin

Misalkan f adalah fungsi di mana turunan ke (*n*+1).$f^{(n+1)}$(x), ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka l yang mengandung a. Jadi, untuk setiap x di dalam l berlaku : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$ (2.1)

Persamaan (2.1) disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi $f(x)$. Jika $a = 0$, maka bentuk deret pada persamaan (2.1) menjadi :

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots \quad (2.2)$$

Dan bentuk deret pada persamaan (2.2) disebut sebagai ekspansi deret Maclaurin bagi fungsi $f(x)$.

Dengan mengandung persamaan (2.2) maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$f(x) = e^{tx}$ $\qquad$ $f(0) = e^{t(0)} = 1$

$f'(x) = te^{tx}$ $\qquad$ $f'(0) = te^{t(0)} = t$

$f''(x) = t^2 e^{tx}$ $\qquad$ $f''(0) = t^2 e^{t(0)} = t^2$

Sehigga diperoleh:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.3)$$

Fungsi $f(x) = sin\ (tX)$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$$sin\ (tX) = tx - \frac{t^3x^3}{3!} + \frac{t^5x^5}{5!} - \frac{t^7x^7}{7!} + \cdots\cdots\cdots \qquad (2.4)$$

Fungsi $f(x) = cos\ (tX)$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret seperti berikut:

$$cos\ (tX) = 1 - \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^4x^4}{4!} - \frac{t^6x^6}{6!} + \cdots\cdots\cdots \qquad (2.5)$$

(Leithold,1978)

Sub-bab selanjutnya akan membahas ekspektasi matematika yang akan digunakan untuk membuktikan momen yang didapat dengan fungsi pembangkit momen adalah benar.

2.4 Ekspektasi dari Variabel Acak

Sifat-sifat dari suatu distribusi dapat dikaji dengan bantuan ekspektasi matematika atau nilai harapan.

Definisi 2.3

Misal X variabel acak yang mempunyai fungsi kepekatan peluang $f(x)$ sedemikian sehingga memiliki konvergensi mutlak tertentu, yaitu dalam kasus diskrit,

$$\sum_x |x|\, f(x) \text{ ada,}$$

Atau, dalam kasus kontinu,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx \text{ ada,}$$

Ekspektasi dari variabel acak adalah

$$E(X) = \sum_x |x|\, f(x), \text{ dalam kasus diskrit}$$

Atau

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx, \text{ dalam kasus kontinu}$$

(Hogg and Craig, 1965)

Terkadang ekspektasi *E(X)* disebut ekspektasi matematika dari X atau nilai harapan dari *X*. Ekspektasi matematika dapat menentukan momen dan ada banyak cara lain untuk menentukan momen dari suatu distribusi, salah satunya dengan menggunakan fungsi pembangkit momen yang akan dibahas selanjutnya.

2.5 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen digunakan untuk menghitung momen dari variabel acak *X*. Fungsi pembangkit momen disimpulkan dengan $M(t)$, definisinya sebagai berikut:

Definisi 2.4

Misalkan ada sejumlah angka positif h sehingga untuk $-h < t < h$ ekspektasi $E(e^{tx})$ ada. Sehingga

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x)dx,$$

Jika *x* merupakan variabel acak kontinu, atau

$$E(e^{tx}) = \sum_{x} e^{tx}\, f(x)$$

Jika *x* merupakan variabel acak diskrit. Ekspektasi ini disebut fungsi pembangkit momen (FPM) dari *X* (atau dari distribusi) dan dilambangkan dengan *M(t),* yaitu

$$MX(t) = E(e^{tX})$$

(Hogg and Craig, 1965)

Selanjutnya dari fungsi pembangkit akan ditentukan momen-momen dari distribusi log logistik (α,β) dan pada sub-bab setelah ini akan dijelaskan tentang definisi momen.

2.6 Momen

Rataan dan varians sebenarnya merupakan hal istimewa dari kelompok ukuran lainnya yang disebut momen. Dari momen ini beberapa ukuran lain dapat diturunkan. Momen itu sendiri didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.5

Momen ke-r tentang asal-usul dari suatu variabel acak X, dilambangkan dengan μ'_r, adalah nilai harapan dari X^r dituliskan,

$$\mu'_r = E(X') = \sum_x x^r\, f(x)$$

Untuk $r = 0,1,2,\cdots$ pada saat X diskrit

$$\mu'_r = E(X') = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, f(x)\, dx$$

Pada saat X kontinu.

(Irwin Miller, Marrylees Miller, 1999)

Selain momen terdapat karakteristik lainnya dari suatu distribusi, dalam penelitian ini karakteristik lain yang akan dicari yaitu kumulan. Definisi dari kumulan akan di uraikan pada sub-bab selanjutnya.

2.7 Kumulan

Karakteristik lainnya yang dapat dicari dari suatu distribusi yaitu kumulan. Dalam perhitungan untuk menemukan kumulan ini menggunakan momen yang telah ditentukan sebelumnya. Adapun definisi dari kumulan akan dijelaskan di bawah ini:

Definisi 2.6

Kumulan k_r didefinisikan sebagai

$$\ln \varphi(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{(it)^n}{n!}$$

Dengan menggunakan deret Maclaurin maka didapat :

$$\ln \varphi(t) = (it)\mu_1' + \frac{1}{2}(it)^2\left(\mu_2' - {\mu_1'}^2\right) + \frac{1}{3!}(it)^3$$

$$(2{\mu_1'}^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3') + \frac{1}{4!}(it)^4(-6{\mu_1'}^4 + 12{\mu_1'}^2\mu_2' - 3{\mu_1'}^2 - 4\mu_1'\mu_3' +$$

$$\mu_4') + \frac{1}{5!}(it)^5\left[24{\mu_1'}^5 - 60{\mu_1'}^3\mu_2' + 20{\mu_1'}^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3' +\right.$$

$$\left.5\mu_1'\left(6{\mu_2'}^2 - \mu_4'\right) + \mu_5'\right] + \cdots$$

Dimana μ_n' momen baku, maka dapat dituis kembali sebagai ;

$$k_1 = \mu_1'$$

$$k_2 = \mu_2' - {\mu_1'}^2$$

$$k_3 = 2{\mu_1'}^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3'$$

$$k_4 = -6{\mu_1'}^4 + 12{\mu_1'}^2\mu_2' - 3{\mu_2'}^2 - 4\mu_1'\mu_3' + \mu_4'$$

$$k_5 = 24{\mu_1'}^5 - 60{\mu_1'}^3\mu_2' + 20{\mu_1'}^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3' + 5\mu_1'\left(6{\mu_2'}^2 - \mu_4'\right) + \mu_5'$$

.

.

$$k_r = \mu_r' - \sum_{n=1}^{r-1} \binom{r-1}{n-1} k_n \mu_{r-n}'$$

(Kendall,M.G, 1977)

Rata-rata dan ukuran penyebaran dapat menggambarkan distribusi data tetapi tidak cukup untuk menggambarkan sifat distribusi. Untuk dapat menggambarkan karakteristik dari suatu distribusi data digunakan konsep lain yang dikenal sebagai kemiringan dan keruncingan. Dua sub-bab selanjutnya akan membahas tentang kemiringan dan keruncingan.

2.8 Kemiringan

Kemiringan atau kecondongan (*skewness*) adalah tingkat ketidaksimetrisan atau kejauhan simetri dari sebuah distribusi. Sebuah distribusi yang tidak simetris akan memiliki rata-rata, median, dan modus yang tidak sama besarnya.

S*kewness* dari suatu variabel random X yang dinotasikan dengan Skew[X] didefinisikan sebagai:

$$Skew[X] = \frac{E[(X-\mu)^3]}{E[(X-\mu)^2])^{\frac{3}{2}}} = \frac{K_3}{(K_2)^{\frac{3}{2}}}$$

Skewness ini juga dinamakan *skewness* populasi. *Skewness* merupakan ukuran dari kesimetrisan atau lebih tepatnya kekurang-simetrisan. Suatu distribusi dikatakan simetris jika distribusi tersebut nampak sama antara sebelah kanan dan sebelah kiri titik pusatnya. Distribusi yang simetris misalnya distribusi normal, distribusi *t* dan distribusi seragam. Distribusi yang mempunyai *skewness* positif misalnya distribusi eksponensial, distribusi Chi-kuadrat, distribusi Poisson dan distribusi Binomial dengan $p > 0.5$ sedangkan distribusi yang mempunyai *skewness* negatif misalnya distribusi Binomial dengan $p < 0.5$.

(deGunst dan van der Vaart, 1993)

Selanjutnya akan dibahas mengenai keruncingan kurva yang nantinya akan dilakukan simulasi dengan aplikasi program Matlab terhadap formula keruncingan yang didapat.

2.9 Kurtosis

Kurtosis (keruncingan distribusi data) adalah ukuran tinggi rendahnya puncak dari suatu ditribusi.

Definisi 2.7

Momen keempat terhadap rataan, $\mu_4 = E(X - EX)^4$, bila dibagi dengan σ^4 disebut kurtosis distribusi X dan sering dinyatakan dengan α_4:

$$\alpha_4 = \frac{\mu^4}{\sigma^4} = \frac{E(X - EX)^4}{\sigma^4}$$

(Dudewicz, J. Edward, 1995)

Pada sub-bab terakhir akan dijelaskan tentang fungsi karakteristik dari suatu distribusi peluang.

2.10 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dan statistika. Sama halnya dengan fungsi pembangkit momen, fungsi karakteristik dapat digunakan untuk menghitung momen dari variabel acak X, selain itu fungsi karakteristik juga digunakan untuk menentukan fungsi distribusi dari suatu variabel acak yang dikenal sebagai teorema inversi fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik merupakan salah satu sifat yang menjadi ciri khas dari suatu distribusi. Fungsi karakteristik dari suatu variabel acak X, dinotasikan dengan $\Phi_X(t)$, didefinisikan sebagai berikut:

Diperkenalkan fungsi karakteristik

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\ dF$$

sebagai fungsi pembangkit momen.

Ingat, ditingkat pertama bahwa $\Phi_X(t)$ selalu ada, karena

$$|\Phi_X(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itx}\right| dF = \int_{-\infty}^{\infty} dF = 1$$

Jadi, mendefinisikan terpisah konvergensi mutlak. Selanjutnya, F adalah kontinu seragam dalam t dan waktu j terdiferensialkan di bawah tanda integral jika ekspresi yang dihasilkan ada dan konvergen seragam, yang sudah cukup bahwa v_j ada. Untuk itu,

$$\left|\Phi^{j}(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x^{j} e^{itx}\, dF\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|x^{j}\right| dF = v_j$$

$\Phi_X(t)$ adalah nyata jika dan hanya jika f simetris.

(Kendall M.G, 1977)

Berdasarkan Lukacs. E and Laha, R.G, 1963 definisi mengenai fungsi karakteristik dari suatu distribusi peluang adalah sebagai berikut:

Definisi 2.7

Misalkan X variabel acak dan t sembarang bilangan asli. Maka,

$$e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$$

Merupakan variabel acak kompleks.

$$E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \; dPx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \; dF(x).$$

Ekspektasi $E\left(e^{itX}\right)$ ada untuk setiap t dan untuk setiap variabel acak dan ini disebut fungsi karakteristik dari variabel acak X, atau alternatif fungsi karakteristik $F(x)$ (fungsi peluang P_X).