II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan penelitian penulis. Dalam menyelesaikan momen, kumulan dan fungsi karakteristik dari *generalized Weibull distribution* dibutuhkan beberapa fungsi khusus seperti fungsi gamma dan deret MacLaurin serta beberapa teori yang mendukung penelitian seperti definisi *generalized Weibull distribution*, fungsi pembangkit momen, momen, kumulan, *skewness*, kurtosis, dan fungsi karakteristik.

2.1 Fungsi Gamma

Definisi 2.1

Pada bagian ini akan diperkenalkan fungsi gamma, dimana integral:

$$\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x} dx$$

untuk $n > 0$ dan nilai dari integral tersebut adalah positif. Integral tersebut disebut fungsi gamma dari n yang dinotasikan dengan $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \tag{2.1}$$

Jika $n = 1$, jelas

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$$

Sehingga untuk $n = r$, maka:

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} = (r-1)!$$

(Hogg and Craig, 1978)

Sub-bab selanjutnya akan membahas tentang distribusi Weibull yang digunakan dalam penelitian ini sebagai pembanding dengan distribusi *generalized* Weibull.

2.2 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull diperkenalkan oleh seorang matematikawan yang bernama Wallodi Weibull. Distribusi Weibull sering digunakan dalam permodelan analisis kelangsungan hidup yang memiliki daerah fungsi peluang densitas positif dengan peubah acak kontinu. Distribusi Weibul memiliki dua parameter, yaitu:

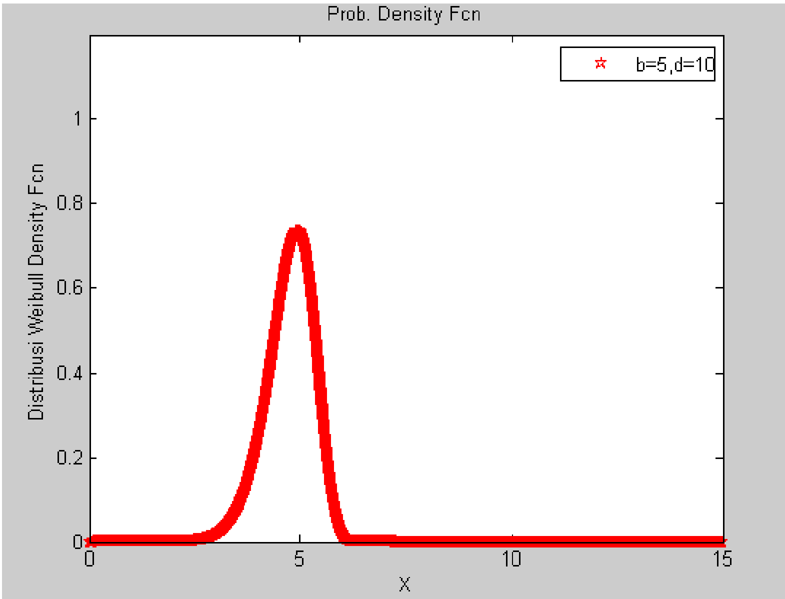
β : Paramater skala yang menunjukan besarnya keragaman data distribusi weibull.

δ : Parameter bentuk yang menunjukan laju kematian/kerusakan data distribusi weibull.

Definisi 2.2

Misalkan X adalah peubah acak dari distribusi Weibull dengan dua parameter, maka menurut Kungdu dan Mangalick (2004), fungsi kepekatan peluang dari peubah acak weibull (β, δ) adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\delta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\delta}} & ; x \geq 0, \delta > 0, \beta > 0 \\ 0 & ; lainnya \end{cases}$$



Gambar 2.1 Fungsi Kepekatan Peluang Distribusi Weibull

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull didefinisikan sebagai:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)}$$

Rata-rata (*mean*) dari distribusi weibull adalah:

$$E(X) = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)$$

Ragam (*variance*) distribusi weibull adalah:

$$Var(X) = \beta^2 \left\{ \Gamma\left[1 + \left(\frac{2}{\delta}\right)\right] - \Gamma^2\left[1 + \left(\frac{1}{\delta}\right)\right] \right\}$$

(Kungdu dan Mangalick, 2004)

Sub-bab selanjutnya akan membahas tentang distribusi *generalized* Weibull yang merupakan perluasan dari distribusi Weibull dengan penambahan satu parameter lokasi.

2.3 *Generalized Weibull Distribution*

Distribusi *generalized* Weibull (*Generalized Weibull Distribution*) merupakan perluasan dari distribusi Weibull dengan menambahkan satu parameter lokasi, sehingga distribusi *generalized* Weibull memiliki tiga parameter yaitu parameter lokasi, parameter skala dan parameter bentuk.

Definisi 2.3

Misalkan *X* adalah peubah acak dari *generalized Weibull distribution* dengan tiga parameter, maka menurut Jhonson dan Kotz (1970), fungsi kepekatan peluang dari peubah acak tersebut adalah

$$f(x) = \frac{\delta}{\beta}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\delta}};\ \alpha < x < \infty, \alpha \geq 0, \beta > 0, \delta > 0$$

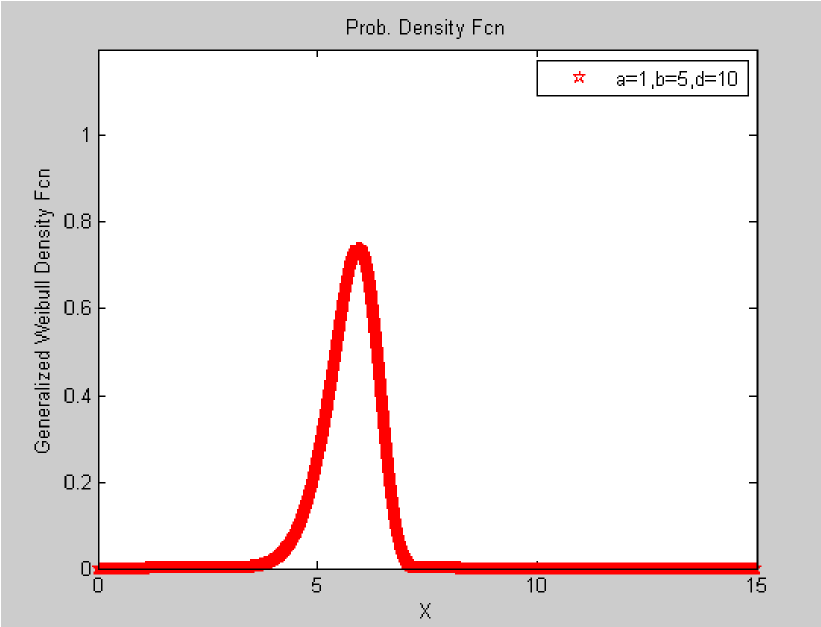
dengan

X : Peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu gagal (*failure time*).

α : Parameter lokasi yang menunjukan lokasi waktu, dimana pada saat lokasi waktu tersebut belum ada obek pengamatan yang gagal maupun hilang.

β : Paramater skala yang menunjukan besarnya keragaman data distribusi weibull.

δ : Parameter bentuk yang menunjukan laju kegagalan data distribusi weibull.



Gambar 2.2 Fungsi Kepekatan Peluang *Generalized Weibull Distribution*

(Jhonson dan Kotz, 1970)

Pada sub bab selanjutnya akan dibahas ekspansi deret Maclaurin yang digunakan dalam menyelesaikan fungsi pembangkit momen, momen dan fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* Weibull.

2.4 Ekspansi Deret Maclaurin

Deret Maclaurin merupakan deret Taylor yang berpusat di titik nol. Deret ini digunakan untuk meleburkan bentuk e^{tx} dalam Persamaan momen yang akan dicari dalam penelitian ini.

Teorema Deret Maclaurin

Misalkan f adalah fungsi di mana turunan ke (n+1).$f^{(n+1)}$(x), ada untuk setiap X pada suatu selang terbuka l yang mengandung a. Jadi, untuk setiap X di dalam l berlaku : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$ (2.2)

Persamaan (2.2) disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi $f(x)$. Jika $a = 0$, maka bentuk deret pada Persamaan (2.2) menjadi :

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots \tag{2.3}$$

Dan bentuk deret pada Persamaan (2.3) disebut sebagai ekspansi deret Maclaurin bagi fungsi $f(x)$. Subtitusikan Persamaan (2.3) maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$f(x) = e^{tx}$ $\qquad$ $f(0) = e^{t(0)}$ =1

$f'(x) = te^{tx}$ $\qquad$ $f'(0) = te^{t(0)} = t$

$f''(x) = t^2 e^{tx}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $f''(0) = t^2 e^{t(0)} = t^2$

Sehigga diperoleh:

$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!}$ ……………..

Fungsi $f(x) = sin\ (tx)$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$sin\ (tx) = tx - \frac{t^3x^3}{3!} + \frac{t^5x^5}{5!} - \frac{t^7x^7}{7!} + \cdots\cdots\cdots$

Fungsi $f(x) = cos\ (tx)$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret seperti berikut:

$cos\ (tx) = 1 - \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^4x^4}{4!} - \frac{t^6x^6}{6!} + \cdots\cdots\cdots$

(Leithold,1978)

Ada banyak cara untuk menentukan momen dari suatu distribusi, salah satunya dengan menggunakan fungsi pembangkit momen yang akan dibahas selanjutnya.

2.5 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen digunakan untuk menghitung momen dari variabel acak X. Fungsi pembangkit momen disimpulkan dengan $M(t)$, definisinya sebagai berikut:

Definisi 2.5

Misalkan ada sejumlah angka positif h sehingga untuk $-h < t < h$ ekspektasi $E(e^{tX})$ ada. Sehingga

$$E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx,$$

Jika *x* merupakan variabel acak kontinu, atau

$$E(e^{tX}) = \sum_{x} e^{tx} f(x)$$

Jika *X* merupakan variabel acak diskrit. Ekspektasi ini disebut fungsi pembangkit momen (FPM) dari *X* (atau dari distribusi) dan dilambangkan dengan M_X *(t)*, yaitu

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

(Hogg and Craig, 1978)

Dari fungsi pembangkit momen akan ditentukan momen-momen dari distribusi *generalized* Weibull dan pada sub bab selanjutnya akan dijelaskan tentang definisi momen.

2.6 Momen

Rataan dan varians sebenarnya merupakan hal istimewa dari kelompok ukuran lainnya yang disebut momen. Dari momen ini beberapa ukuran lain dapat diturunkan. Momen itu sendiri didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6

Momen ke-r tentang asal-usul dari suatu variabel acak *X*, dilambangkan dengan μ'_r, adalah nilai harapan dari X^r dituliskan,

$$\mu'_r = E(X') = \sum_{x} x^r f(x)$$

Untuk $r = 0,1,2,\cdots$ pada saat *X* diskrit

$$\mu'_r = E(X') = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, f(x) \, dx$$

Pada saat X kontinu.

(Irwin Miller, Marrylees Miller, 1999)

Selain momen terdapat karakteristik lainnya dari suatu distribusi, dalam penelitian ini karakteristik lain yang akan dicari yaitu kumulan. Definisi dari kumulan akan diuraikan pada sub bab selanjutnya.

2.7 Kumulan (*Cumulant*)

Karakteristik lainnya yang dapat dicari dari suatu distribusi yaitu kumulan. Dalam perhitungan untuk menemukan kumulan ini menggunakan momen yang telah ditentukan sebelumnya. Adapun definisi dari kumulan akan dijelaskan di bawah ini:

Definisi 2.7

Cumulant k_r didefinisikan sebagai

$$ln \ \varphi_X(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{(it)^n}{n!}$$

Dengan menggunakan deret *maclaurin* maka didapat :

$$ln \, \varphi_X(t) = (it)\mu'_1 + \tfrac{1}{2}(it)^2\left(\mu'_2 - {\mu'_1}^2\right) + \tfrac{1}{3!}(it)^3(2{\mu'_1}^3 - 3\mu'_1\mu'_2 + \mu'_3)$$

$$+\frac{1}{4!}(it)^4\left(-6{\mu'_1}^4 + 12{\mu'_1}^2\mu'_2 - 3{\mu'_1}^2 - 4\mu'_1\mu'_3 + \mu'_4\right)$$

$$+\frac{1}{5!}(it)^5\left[24{\mu'_1}^5 - 60{\mu'_1}^3\mu'_2 + 20{\mu'_1}^2\mu'_3 - 10\mu'_2\mu'_3\right]$$

$$+5\mu'_1\left(6{\mu'_2}^2 - \mu'_4\right) + \mu'_5 + \cdots \tag{2.4}$$

Dimana μ'_n merupakan momen baku, dengan demikian Persamaan (2.4) dapat ditulis menjadi:

$$k_1 = \mu'_1$$

$$k_2 = \mu'_2 - {\mu'_1}^2$$

$$k_3 = 2{\mu'_1}^3 - 3\mu'_1\mu'_2 + \mu'_3$$

$$k_4 = -6{\mu'_1}^4 + 12{\mu'_1}^2\mu'_2 - 3{\mu'_2}^2 - 4\mu'_1\mu'_3 + \mu'_4$$

$$k_5 = 24{\mu'_1}^5 - 60{\mu'_1}^3\mu'_2 + 20{\mu'_1}^2\mu'_3 - 10\mu'_2\mu'_3 + 5\mu'_1\left(6{\mu'_2}^2 - \mu'_4\right) + \mu'_5$$

$$\vdots$$

$$k_r = \mu'_r - \sum_{n=1}^{r-1}\binom{r-1}{n-1}k_n\mu'_{r-n}$$

(Abramowitz dan Stegun, 1972)

Rata-rata dan ukuran penyebaran dapat menggambarkan distribusi data tetapi tidak cukup untuk menggambarkan sifat distribusi. Untuk dapat menggambarkan karakteristik dari suatu distribusi data digunakan konsep lain yang dikenal sebagai kemiringan dan keruncingan. Dua sub bab selanjutnya akan membahas tentang kemiringan dan keruncingan.

2.8 *Skewness*

Kemencengan atau kemiringan (*skewness*) adalah tingkat ketidaksimetrian dari sebuah distribusi. Sebuah distribusi yang tidak simetris akan memiliki rata-rata, median, dan modus yang tidak sama besarnya.

Definisi 2.8

Skewness dari suatu variabel acak X yang dinotasikan dengan $skew[X]$ didefinisikan sebagai:

$$skew[X] = \frac{E[(X-\mu)^3]}{E[(X-\mu)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{k_3}{(k_2)^{\frac{3}{2}}}$$

Skewness ini juga dinamakan *skewness* populasi. *Skewness* merupakan ukuran dari kesimetrisan atau lebih tepatnya kekurang simetrisan. Suatu distribusi dikatakan simetris jika distribusi tersebut tampak sama antara sebelah kanan dan sebelah kiri titik pusatnya. Distribusi yang simetris misalnya distribusi normal, distribusi *t* dan distribusi seragam. Distribusi yang memiliki *skewness* positif misalnya distribusi eksponensial, distribusi chi-kuadrat, distribusi Poisson dan dan distribusi Binomial dengan $p > 0.5$ sedangkan distribusi yang mempunyai *skewness* negative misalnya distribusi Binomial dengan $p < 0.5$.

(deGunst dan van der Vaart, 1993)

Selanjutnya akan dibahas mengenai keruncingan kurva yang nantinya akan dilakukan simulasi dengan *software* matlab terhadap formula keruncingan yang didapat.

2.9 Kurtosis

Kurtosis (keruncingan distribusi data) adalah ukuran tinggi rendahnya puncak dari suatu distribusi.

Definisi 2.9

Momen keempat terhadap rataan, $\mu_4 = E(X - EX)^4$, bila dibagi dengan σ^4 disebut kurtosis distribusi X dan sering dinyatakan dengan α_4:

$$\alpha_4 = \frac{\mu^4}{\sigma^4} = \frac{E(X - EX)^4}{\sigma^4}$$

(Edward J. Dudewicz & Satya N.Mishra, 1995)

Pada sub-bab terakhir akan dijelaskan tentang fungsi karakteristik dari suatu distribusi peluang.

2.10 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dan statistika. Sama halnya dengan fungsi pembangkit momen, fungsi karakteristik dapat digunakan untuk menghitung momen dari variabel acak X, selain itu fungsi karakteristik juga digunakan untuk menentukan fungsi distribusi dari suatu variabel acak yang dikenal sebagai teorema inversi fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik merupakan salah satu sifat yang menjadi ciri khas dari suatu distribusi. Fungsi karakteristik dari suatu variabel acak X, dinotasikan dengan $\varphi_X(t)$, didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.10

Fungsi karakteristik (φ_X) dari peubah acak X, didefinisikan sebagai nilai ekspetasi dari e^{itX}, dimana i adalah unit imaginer dan $t \in R$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \varphi_X \quad : R \to C \\ \varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} dF(X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \end{cases}$$

dimana $\varphi_X(t) \ = E\left(e^{itX}\right) = E\{\cos(tx) + i \sin(tx)$

$$= E \cos(tx) + Ei \sin(tx)$$

$F(x)$ merupakan fungsi kumulatif dari distribusi X, sedangkan $f(x)$ merupakan fungsi kepekatan peluang dari distribusi X.

(Edward J. Dudewicz & Satya N.Mishra, 1995)