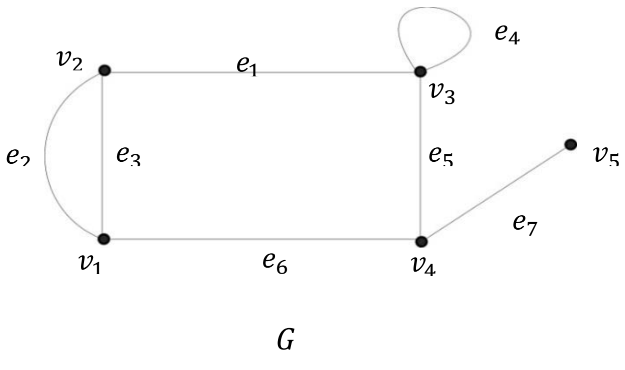
II. LANDASAN TEORI

2.1 Konsep Dasar Graf

Pada bagian ini akan diberikan konsep dasar graf dan dimensi partisi graf yang digunakan sebagai landasan teori pada penelitian ini. Teori dasar mengenai graf yang akan digunakan dalam penelitian diambil dari Deo (1989).

Garf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ menyatakan himpunan titik, dengan $V(G) \neq \emptyset$. Sedangkan, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ menyatakan himpunan sisi yakni menyatakan pasangan tak terurut dari $V(G)$.

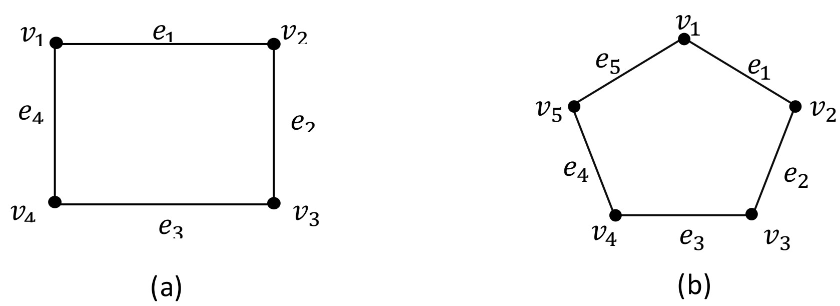


Gambar 1. Contoh graf G dengan 5 titik dan 7 sisi

Dua titik dikatakan bertetangga jika ada sisi yang menghubungkan keduanya. Suatu garis dikatakan menempel dengan suatu titik u, jika titik u merupakan salah satu ujung dari garis tersebut. Pada Gambar 1, titik v_1 bertetangga dengan titik v_4 dan v_2 ; sisi e_6 menempel pada titik v_1 dan v_4.

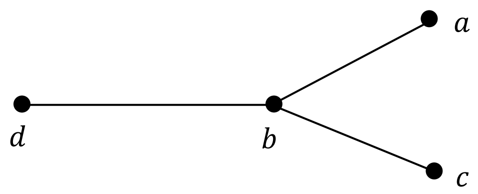
Derajat suatu titik v adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v dan dinotasikan dengan $d(v)$. Pada Gambar 1, $d(v_1) = 3, d(v_2) = 3, d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 3$ dan $d(v_5) = 1$. Pada graf G titik v_3 merupakan *loop*, yaitu sisi yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama. Sedangkan, sisi paralel pada graf G ialah sisi e_2 dan e_3 yang mempunyai dua titik ujung yang sama yaitu v_1 dan v_2. Graf yang tidak memiliki $loop$ dan sisi paralel disebut graf sederhana.

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga titik dan garis, dimulai dan diakhiri oleh titik, sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Jalan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut jalan tertutup. Lintasan (*path*) adalah jalan yang semua titiknya berbeda. Sirkuit adalah lintasan tertutup. Sirkuit genap adalah lintasan yang dimulai dan diakhiri dengan titik yang sama dan banyak titiknya genap. Sedangkan, jika banyak titiknya ganjil, maka disebut sirkuit ganjil. Pada Gambar 1 contoh jalan adalah $v_1, e_2, v_2, e_1, v_3, e_5, v_4, e_6, v_1, e_3, v_2$; contoh lintasan adalah v_1, v_2, v_3, v_4, v_5; contoh sirkuit adalah $v_1, e_2, v_2, e_1, v_3, e_5, v_4, e_6, v_1$.



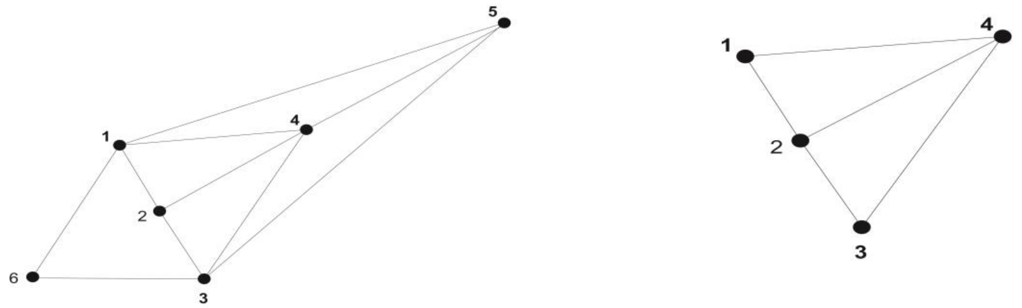
Gambar 2. (a) Sirkuit genap dengan n = 4 dan (b) Sirkuit ganjil dengan n = 5

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung, $x \in V$ dan $S \subseteq V$. Jarak titik v terhadap S didefinisikan sebagai $(v, S) = min\{d(v, x) | x \in S\}$.



Gambar 3. Jarak $d(a, b) = 1, d(a, c) = 2$ dan $d(c, b) = 1$

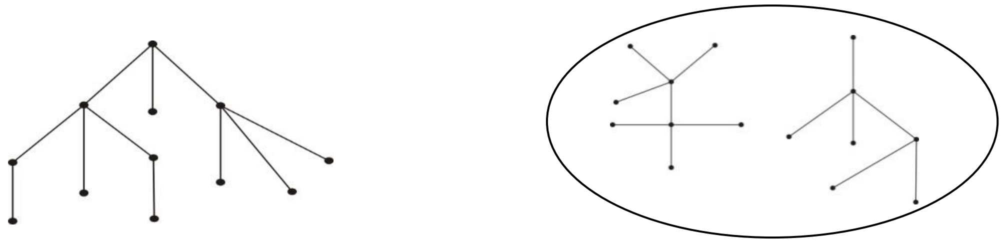
Graf H dikatakan subgraf G jika dan hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$



G H

Gambar 4. Graf H adalah subgraf G

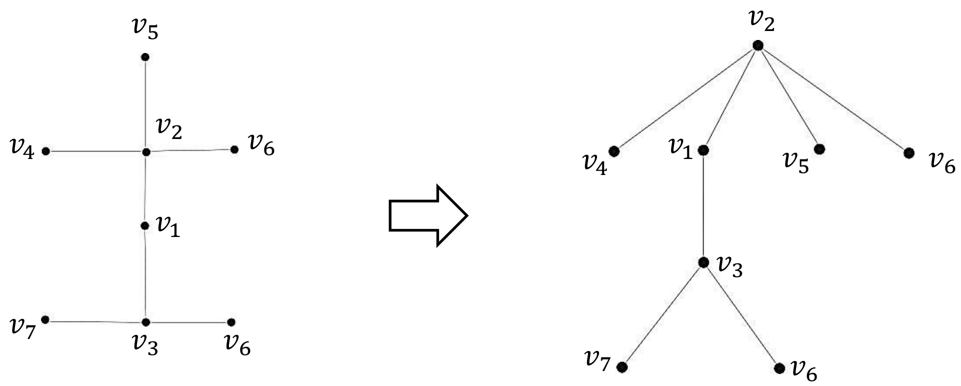
Berikut ini diberikan beberapa kelas graf pohon yang berkaitan dengan penelitian ini. Pohon adalah graf terhubung yang tidak memuat sirkuit. Pohon yang hanya memiliki sebuah titik disebut pohon semu, sedangkan gabungan dari beberapa pohon disebut hutan (Siang, 2009).



T P

Gambar 5. Contoh pohon T dan hutan P.

Pohon berakar (*rooted tree)* adalah pohon dengan satu titik yang dikhususkan dari titik yang lain (Siang, 2009)



Gambar 6. Pohon berakar dengan titik v_2 sebagai akar.

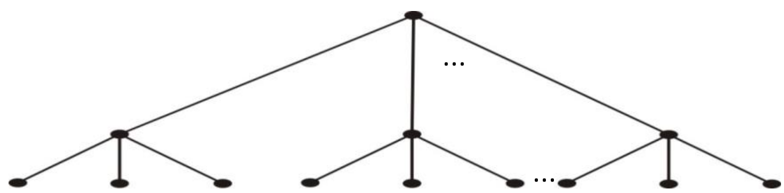
Pohon biner (*binary tree)* merupakan pohon berakar yang setiap titiknya memiliki paling banyak dua daun yang disebut daun kiri dan daun kanan (Siang, 2009).

Pohon biner penuh adalah pohon biner yang setiap titiknya memiliki tepat dua anak.

(a) (b)

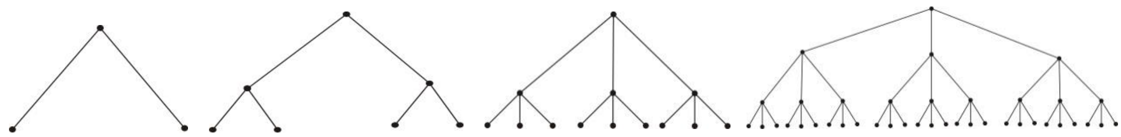
Gambar 7. (a) Pohon biner; (b) pohon biner penuh

Pohon *n-ary* adalah pohon berakar yang setiap titiknya mempunyai paling banyak n buah daun (Welyyanti, 2000)



Gambar 8. Graf *n-ary*

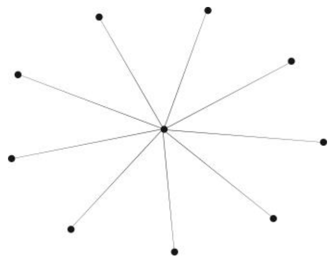
Graf $T(n, k)$ untuk n, k bilangan asli adalah graf n- ary lengkap dengan kedalaman k dan setiap titik mempunyai n anak kecuali pada daun-daunnya. Kedalaman dari $T(n, k)$ adalah panjang lintasan dari titik akar ke daun-daunya. Jelas bahwa $T(n, 1)$ adalah graf bintang dan $T(n, 2)$ adalah graf lobster (Welyyanti, 2000).



(a) (b) (c) (d)

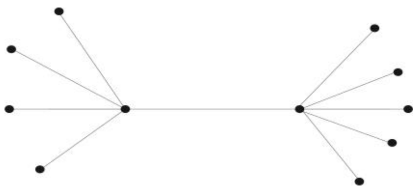
Gambar 9. (a) $T(2,1)$; (b) $T(2,2)$; (c) $T(3,2)$ dan (d) $T(3,3)$

Graf bintang (*star*) S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n-1$ yang disebut dengan pusat, dan $n-1$ titik lain yang berderajat satu yang disebut daun (Chartrand, 2000).



Gambar 10. Graf bintang S_{10}

Sebuah graf pohon disebut graf bintang ganda jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. Jika x dan y, berturut-turut berderajat $a+1$ dan $b+1$ maka graf bintang ganda dinotasikan dengan $S_{a,b}$ (Chartrand, 1998).



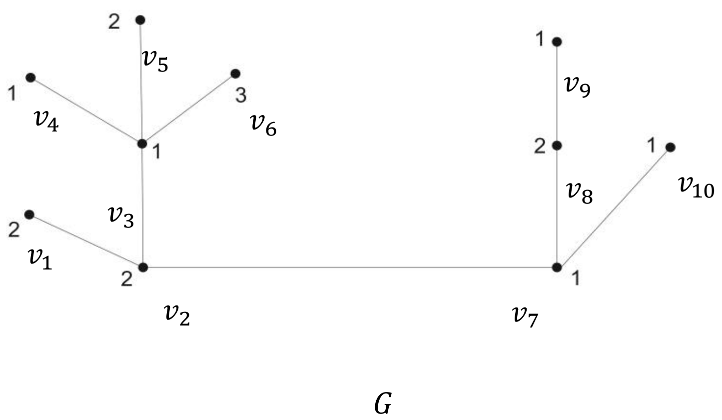
Gambar 11. Graf bintang ganda $S_{4,5}$.

2.2 Dimensi partisi Graf

Pada bagian ini akan diberikan definisi dimensi partisi, sifat-sifatnya dan beberapa kelas graf yang sudah diperoleh dimensi partisinya.

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, $v \in V(G)$, dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v,S)$ adalah $min\{d(v,x), x \in S\}$ dengan $d(v,x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan $\{S_{1,} S_2, \ldots\ldots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan $S_{1,} S_2, \ldots\ldots, S_k$ kelas-kelas dari Π. Representasi v terhadap Π, dinotasikan dengan $r(v|\Pi)$, adalah k-tupel terurut $(d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_k))$. Selanjutnya, Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G, dinotasikan $pd(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas (Chartrand, 1998).

Berikut ini diberikan graf G dan akan ditentukan dimensi partisi dari graf G tersebut.



Gambar 12. Dimensi partisi graf G

Graf G dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_3, v_4, v_7, v_9, v_{10}\}$, $S_2 = \{v_1, v_2, v_5, v_8\}$ dan $S_3 = \{v_6\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi) = (2,0,3)$; $r(v_2|\ \Pi) = (1,0,2)$; $r(v_3|\Pi) = (0,1,1)$; $r(v_4|\Pi) = (0,2,2)$; $r(v_5|\Pi) = (1,0,2)$; $r(v_6|\Pi) = (1,2,0)$; $r(v_7|\Pi) = (0,1,3)$; $r(v_8|\Pi) = (1,0,4)$; $r(v_9|\Pi) = (0,1,5)$; $r(v_{10}|\Pi) = (0,2,4)$. Karena representasi dari semua titik adalah berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari G dan $pd(G) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(G) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dari G. Perhatikan bahwa v_3 mempunyai 3 daun, yaitu $\{v_4, v_5, v_6,\}$. Karena hanya terdapat dua kelas partisi pembeda, maka dua dari tiga daun tersebut harus berada pada kelas partisi yang sama. Akibatnya, representasi kedua daun itu akan sama, karena mempunyai jarak yang sama terhadap titik-titik yang lain. Jadi, $|\Pi| \geq 3$. Akibatnya, $pd(G) = 3$.

Berikut ini adalah sifat penting dimensi partisi yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk (1998).

Lemma 2.2.1

Diberikan G graf terhubung yang tidak trivial dengan partisi pembeda Π dari $V(G)$. Untuk $u, v \in V(G)$, jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v merupakan elemen yang berbeda dari Π.

Berikut ini adalah teorema yang digunakan untuk menentukan dimensi partisi pada graf bintang ganda.

Teorema 2.2.2

Jika T adalah graf bintang ganda berorde $n \geq 6$, dengan x dan y dua titik yang bukan daun, maka, $pd(T) = \max\{\deg(x), \deg(y)\} - 1$.

Bukti : Misalkan $r = \deg(x) - 1$ dan $s = \deg(y) - 1$, dengan $r \geq s$. Misalkan $u_1, u_2, \ldots u_r$ adalah daun dari T yang bertetangga dengan x dan $v_1, v_2, \ldots v_s$ adalah yang daun bertetangga dengan y. Untuk membuktikannya dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1. Jika $r = s$. Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots., S_r\}$, dengan $S_1 = \{u_1, v_1, x\}$, $S_2 = \{u_2, v_2, y\}$ dan $S_i = \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i \leq$ r.

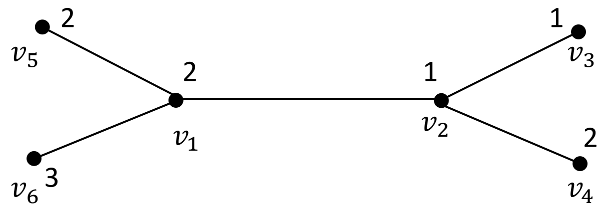
Perhatikan bahwa $r(u_1|\Pi) = (0,2,2,2,\ldots,2)$; $r(u_2|\Pi) = (1,0,2,2,\ldots,2)$; $r(v_1|\Pi) = (0,1,2,2,\ldots 2)$; $r(v_2|\Pi) = (2,0,2,2,\ldots.2)$; $r(x|\Pi) = (0,1,1,\ldots,1)$; $r(y|\Pi) = (1,0,1,1,\ldots,1)$ untuk $3 \leq i \leq r$, $r(u_i|\Pi) = (1,2,\ldots,0,\ldots)$ dan $r(v_i|\Pi) = (2,1,\ldots 0,\ldots)$, komponen ke$-i$ bernilai 0. Akibatnya semua titik mempunyai representasi yang berbeda. Jadi, $pd(T) \leq r$.

Kasus 2. Jika $r > s$. Pada kasus 2 ini, dapat dipecah lagi menjadi sub kasus.
Bagian 2.1. Jika $s = 1$. Maka $r \geq 3$. Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots S_r\}$ dengan $S_1 = \{u_1, x\}$, $S_2 = \{u_2, y\}$,$S_3 = \{u_3, v_1\}$, dan $S_i = \{u_i\}$ untuk $2 \leq i \leq r$. Karena $r(u_2|\Pi)$ = (1,0,2,*,*,….,*); $r(u_3|\Pi)$ = (1,2,0,*,*,…,*); $r(y|\Pi)$ = (1,0,1,*,*,…,*); $r(v_1|\Pi)$ = (0,1,0,*,*,….,*). Jadi, Π partisi pembeda dari $V(T)$ dan $pd(T) \leq r$.

Bagian 2.2. Jika $s \geq 2$. Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots S_r\}$ dengan $S_1 = \{u_1, v_1, x\}$; $S_1 = \{u_2, v_2, y\}$,$S_i = \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i \leq s$, dan $S_i = \{u_i\}$ untuk $s + 1 \leq i \leq r$. Pernyataan yang sama yang digunakan bagian 2.1 menunjukkan bahwa Π partisi pembeda dari $V(T)$ dan $pd(T) \leq r$. Jadi, terbukti bahwa

$pd(T) = \max\{\deg(x), \deg(y)\} - 1$. ■

Berikut ini adalah contoh penentuan dimensi partisi dari graf bintang ganda.



Gambar 13. Dimensi pertisi graf bintang ganda $S_{2,2}$

Graf graf bintang ganda $S_{2,2}$ dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_2, v_3\}$, $S_2 = \{v_1, v_4, v_5\}$ dan $S_3 = \{v_6\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi) = (1,0,1)$; $r(v_2|\ \Pi) = (0,1,2)$; $r(v_3|\Pi) = (0,2,3)$; $r(v_4|\Pi) = (1,0,3)$; $r(v_5|\Pi) = (2,0,2)$; $r(v_6|\Pi) = (2,1,0)$. Karena representasi dari semua titik adalah berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari S dan $pd(S_{2,2}) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(S_{2,2}) \geq 3$. Andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dari S. Dengan $S_1 = \{v_2, v_3\}$ dan $S_2 = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$. Representasi setiap titik dari graf bintang ganda $S_{2,2}$ adalah $r(v_1|\Pi) = (1,0)$; $r(v_2|\ \Pi) = (0,1)$; $r(v_3|\Pi) = (0,2)$; $r(v_4|\Pi) = (1,0)$; $r(v_5|\Pi) = (2,0)$; $r(v_6|\Pi) = (2,0)$. Terlihat bahwa $r(v_1|\Pi) = r(v_4|\Pi)$ dan $r(v_5|\Pi) = r(v_6|\Pi)$. Jadi, $|\Pi| \geq 3$. Akibatnya, $pd(S_{2,2}) = 3$.

Berikut ini diberikan teorema untuk menentukan dimensi partisi graf lintasan.

Teorema 2.2.3

Misalkan P_n graf lintasan berorde $n \geq 2$, maka $pd(P_n) = 2$

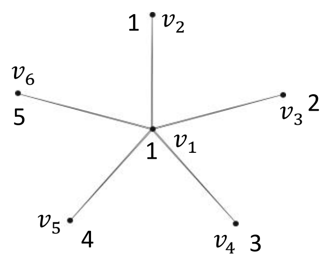
Bukti : Misalkan graf lintasan $P_n = v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots \ldots, v_n$. Asumsikan Π={S_1, S_2} adalah partisi dari $V(P_n)$ dengan $S_1 = \{v_1\}$ dan $S_2 = \{v_2, v_3, \ldots v_n\}$ maka $r(v_1|\Pi)$ = (0,1); $r(v_2|\ \Pi)$ = (1,0); $r(v_3|\Pi)$ = (2,0); $r(v_4|\Pi)$ = (3,0). Secara umum $r(v_i|\Pi)$ =(i-1,0); untuk $2 \leq i \leq n$. Oleh karena itu, $Pd\ (Pn) = 2$. ■

Berikut ini diberikan teorema menentukan dimensi partisi graf bintang ganda.

Teorema 2.2.4

Jika $K_{1,n}$ graf bintang berorde $n \geq 1$, maka $pd(K_{1,n}) = n$.

Berikut ini adalah contoh penentukan dimensi partisi dari graf $K_{1,5}$



Gambar 14. Partisi pembeda pada graf $K_{1,5}$

Misalkan graf $K_{1,5}$ dipartisi dengan lima partisi, asumsikan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_2\}$, $S_2 = \{v_3\}$, $S_3 = \{v_4\}$, $S_4 = \{v_5\}$, dan $S_5 = \{v_6\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi) = (0,1,1,1,1)$; $r(v_2|\Pi) = (0,2,2,2,2)$; $r(v_3|\Pi)$ =(1,0,2,2,2); $r(v_4|\Pi) = (1,2,0,2,2)$; $r(v_5|\Pi) = (1,2,2,0,2)$; $r(v_6|\Pi) = (1,2,2,2,0)$.

Karena representasi dari semua titik adalah berbeda , maka Π adalah partisi pembeda dari $K_{1,5}$ dan $pd(K_{1,5}) \leq 5$.

Untuk menunjukkan $pd\big(K_{1,5}\big) \geq 5$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dari $K_{1,5}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_2\}$, $S_2 = \{v_3\}$, $S_3 = \{v_4\}$, dan $S_4 = \{v_5, v_6\}$. Representasi setiap titik dari graf $K_{1,5}$ adalah $r(v_1|\Pi) = (0,1,1,1)$; $r(v_2|\Pi) = (0,2,2,2)$; $r(v_3|\Pi)$ =(1,0,2,2); $r(v_4|\Pi) = (1,2,0,2)$; $r(v_5|\Pi) = (1,2,2,0)$; $r(v_6|\Pi) = (1,2,2,0)$. Terlihat bahwa $r(v_5|\Pi) = r(v_6|\Pi)$.

Sehingga, Π bukan partisi pembeda dari graf K. Jadi, $|\Pi| \geq 5$.

Akibatnya, $pd(K) = 5$.