# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Sistem Bilangan Kompleks

Sistem bilangan kompleks dapat dinyatakan secara formal dengan menggunakan konsep pasangan terurut *(ordered pair)* bilangan riil *(a,b)*. Himpunan semua pasangan itu dengan operasi-operasi tertentu yang sesuai padanya dapat didefinisikan sebagai system bilangan kompleks (Wibisono, 1975).

**Definisi 2.1.1 (Wibisono, 1975)**

*Himpunan bilangan kompleks adalah keseluruhan besaran yang berbentuk*

$$a + ib \text{ atau } a + bi,$$

*dengan* $a$ *dan* $b$ *bilangan-bilangan riil dan* $i^2 = -1$.

Jika $z = (a,b) = a + ib$ merupakan suatu bilangan kompleks, maka $a$ dinamakan bagian riil *(real part)* dari $z$ dan $b$ dinamakan bagian imajiner *(imaginary part)* dari $z$ yang secara berturut-turut dinyatakan dengan $\mathrm{Re}(z)$ dan $\mathrm{Im}(z)$. Lambang $z$ yang dapat ditempatkan untuk sesuatu dari himpunan bilangan kompleks dinamakan peubah kompleks.

Bilangan riil dapat dipandang sebagai bagian dari himpunan bilangan kompleks dengan $b = 0$. Jika $a = 0$, maka $0 + ib$ atau $ib$ dinamakan bilangan imajiner murni (Spiegel, 1994).

## 2.2 Sifat-sifat Aljabar Bilangan Kompleks

Operasi penjumlahan dan perkalian dua bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.2.1 (Sardi, 2008)**

*Jika* $z_1 = a_1 + ib_1$ *dan* $z_2 = a_2 + ib_2$ *adalah bilangan kompleks, maka:*

*i.* $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

*ii.* $z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Pada bilangan kompleks juga diperkenalkan suatu operasi yang disebut kesekawanan *(conjugation)*, yang didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.2.2 (Sardi, 2008)**

*Jika* $z = (a, b) = a + ib$, *maka bilangan kompleks sekawan dari* $z$ *ditulis* $\bar{z}$ *dan didefinisikan sebagai* $\bar{z} = (a, -b) = a - ib$.

Operasi aljabar bilangan kompleks sekawan di dalam himpunan bilangan kompleks memenuhi sifat-sifat berikut:

**Teorema 2.2.3 (Sardi,2008)**

*i. jika* $z$ *bilangan kompleks, maka*

*1.* $\overline{\overline{z}} = z$

*2.* $z\overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

*ii. Jika* $z_1, z_2$ *bilangan kompleks, maka*

*1.* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

*2.* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

*3.* $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$

Bukti:

i. Misalkan $z = a + ib$, maka $\overline{z} = a - ib$, maka

*1.* $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

*2.* $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$ ■

*ii. Misalkan* $z_1 = a_1 + ib_1$ *dan* $z_2 = a_2 + ib_2$*, maka*

*1.* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)}$

$= \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$

$= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$

$= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2)$

$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$

*2.* $\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)}$

$= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)}$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2)$

$$= \overline{z_1}\ \overline{z_2}$$

3. $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}\right)}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}$$

$$= \frac{(a_1 - ib_1)(a_2 + ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)}$$

$$= \frac{(a_1 - ib_1)}{(a_2 - ib_2)}$$

$$= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0 \qquad \blacksquare$$

## 2.3 Geometri Bilangan Kompleks

Arti geometri dari bilangan kompleks dalam hal ini dapat dipahami sebagai vektor di bidang xy, dengan sumbu x dan sumbu y secara berturut-turut dinamakan sumbu riil dan sumbu imajiner. Bilangan kompleks $a + ib$ pada bidang datar $xy$ dapat diidentifikasikan berpangkal pada titik pusat dan berujung pada titik $(a, b)$ (Wibisono, 1975).

### 2.3.1 Modulus dari Bilangan Kompleks

Untuk sebarang bilangan kompleks $z = a + ib$, modulus (nilai mutlak) dari bilangan kompleks yang merupakan panjang vektor $z$ didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.3.1.1 (Sardi, 2008)**

*Jika $z = a + ib$ bilangan kompleks, maka modulus dari $z$, ditulis $|z|$ didefinisikan sebagai $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Definisi ini menunjukkan bahwa $|z|$ merupakan bilangan riil positif atau nol. Arti geometri $|z|$ menyatakan panjang vektor $(a, b)$, yaitu jarak dari titik asal $O = (0,0)$ terhadap titik $z = (a, b)$.

Berikut ini terdapat teorema yang menjelaskan sifat-sifat dari modulus atau nilai mutlak dari bilangan kompleks, yaitu:

**Teorema 2.3.1.2 (Sardi, 2008)**

*i. jika $z$ bilangan kompleks, maka*

1. $|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$
2. $|z| = |\overline{z}|$
3. $|z|^2 = z\overline{z}$

*ii. Jika $z_1, z_2$ bilangan kompleks, maka*

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

*2.* $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

Bukti:

*i. Misalkan* $z = a + ib$, *maka*

*1.* $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

*2.* $\overline{z} = a - ib$, sehingga $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

*3.* $|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib) = z\overline{z}$ ■

*ii. Misalkan* $z_1, z_2$ *bilangan kompleks, maka*

*1.* $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$

Jadi, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

*2.* $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}\right|$, sehingga:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \left|z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right|^2 = \left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)\overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)}$$

$$= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

$$= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$= \left(\frac{z_1 \overline{z_1}}{z_2 \overline{z_2}}\right)$$

$$= \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

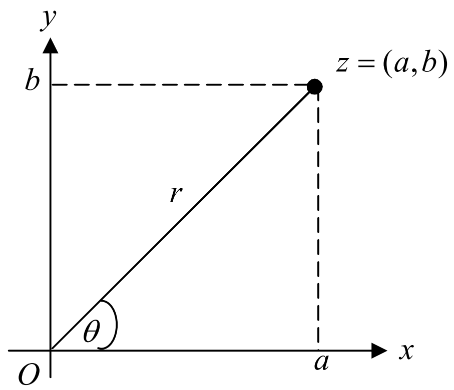
Jadi, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$ ■

### 2.3.2 Bentuk Polar dan Eksponen

Dalam koordinat polar, bilangan kompleks $z = (a, b)$ dinyatakan dalam $r$ dan $\theta$ yaitu $z = (r, \theta)$. Pada gambar 2.1 diperoleh hubungan sebagai berikut:

$a = r\cos\theta$; $b = r\sin\theta$, dengan: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

$\theta$ : sudut antara sumbu $x$ positif dengan $Oz$.




Gambar 2.1

Untuk $z \neq 0$, sudut $\theta$ dihitung dari $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ dan untuk $z = 0$ maka $r = 0$ dan $\theta$ dapat dipilih sebarang. Dengan demikian bilangan kompleks $z = a + ib$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

**Definisi 2.3.2.1 (Sardi, 2008)**

*Diberikan bilangan kompleks* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. *Sudut* $\theta$ *disebut argumen dari* $z$, *ditulis* $\theta = \arg z$. *Sudut* $\theta$ *dengan* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *atau* $-\pi \leq \theta \leq \pi$ *disebut* *argumen utama dari* $z$ *, ditulis* $\theta = \arg z$ *. Pembahasan untuk* $a = r\cos\theta$ *tersebut dipilih salah satu saja.*

Dengan menggunakan rumus Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,,$$

maka bentuk polar bilangan kompleks $z$ dapat diubah menjadi

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Penulisan $z = re^{i\theta}$ merupakan bentuk eksponen dari bilangan kompleks $z$. Selanjutnya bilangan kompleks sekawan dari $z$ adalah:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= r(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))\\ &= re^{-i\theta}\end{aligned}$$

## 2.4 Limit Fungsi Kompleks

Secara formal definisi limit untuk suatu fungsi kompleks $f(z)$ ditulis sebagai berikut:

**Definisi 2.4.1 (Sardi, 2008)**

*Diberikan fungsi* $f : C \rightarrow C$ *dan misalkan fungsi* $w = f(z)$ *terdefinisi pada daerah D kecuali di* $z_0$ *(titik* $z_0$ *di dalam D atau batas D). Limit dari* $f(z)$ *adalah* $w_0$ *untuk* $z$ *menuju* $z_0$*, jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sehingga* $|f(z) - w_0| < \varepsilon$*, apabila* $0 < |z - z_0| < \delta$ *ditulis* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

**Teorema 2.4.2 (Saff, 2003)**

*Diketahui* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ *dan* $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$ *, maka*

*1.* $\lim\limits_{z\to z_0}\big(f(z)+g(z)\big) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) + \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = A + B$

*2.* $\lim\limits_{z\to z_0}\big(f(z)-g(z)\big) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) - \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = A - B$

*3.* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = AB$

*4.* $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} = \dfrac{A}{B}$ *, jika* $B \neq 0$

Bukti:

1. Jika $\varepsilon$ sebarang bilangan positif yang diberikan, maka $\dfrac{\varepsilon}{2}$ adalah positif.

   Karena $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, maka terdapat suatu bilangan positif $\delta_1$ sedemikian sehingga

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Karena $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, maka terdapat suatu bilangan positif $\delta_2$ sedemikian sehingga

$$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; yaitu pilih $\delta$ sebagai yang terkecil di antara $\delta_1$ dan $\delta_2$, maka $0 < |z - z_0| < \delta$ menunjukkan

$$\begin{aligned} |f(z) + g(z) - (A + B)| &= |(f(z) - A) + (g(z) - B)| \\ &\leq |f(z) - A| + |g(z) - B| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi, $\lim\limits_{z \to z_0} \big(f(z) + g(z)\big) = A + B = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$

2. Berdasarkan bukti 1, maka dapat ditunjukkan

$$\lim_{z \to z_0} \big(f(z) - g(z)\big) = \lim_{z \to z_0} \big(f(z) + (-1)g(z)\big)$$

$$= \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} (-1)g(z)$$

dengan sifat bahwa $\lim\limits_{z \to z_0} kg(z) = k \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$; $k$ konstanta yang dapat dibuktikan sebagai berikut:

Jika $\varepsilon$ sebarang bilangan positif yang diberikan, maka $\dfrac{\varepsilon}{|k| + 1}$ adalah positif.

Karena $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$, maka terdapat suatu bilangan positif $\delta_1$ sedemikian sehingga

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{|k| + 1}$$

Dengan demikian terdapat suatu $\delta$ sedemikian sehingga $0 < |z - z_0| < \delta$ yang menunjukkan

$$|kg(z) - kB| = |k(g(z) - B)|$$

$$= |k||(g(z) - B)|$$

$$\leq |k| \frac{\varepsilon}{|k| + 1}$$

$$< \varepsilon$$

Jadi, $\lim\limits_{z \to z_0} kg(z) = kB = k \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$; $k$ konstanta.

Oleh karena itu,

$$\lim_{z\to z_0}\big(f(z)-g(z)\big)=\lim_{z\to z_0} f(z)+(-1)\lim_{z\to z_0} g(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0} f(z)-\lim_{z\to z_0} g(z)$$

$$=A-B$$

3. Jika $\varepsilon$ sebarang bilangan positif yang diberikan, maka $\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon}{|g(z)|+1}$ adalah positif. Karena $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, maka terdapat suatu bilangan positif $\delta_1$ sedemikian sehingga

$$0<|z-z_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(z)-A|<\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|g(z)|+1}$$

Karena $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, maka terdapat suatu bilangan positif $\delta_2$ sedemikian sehingga

$$0<|z-z_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(z)-B|<\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|A|+1}$$

Pilih $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, maka $0<|z-z_0|<\delta$ menunjukkan

$$|f(z)g(z)-AB|=|f(z)g(z)-Ag(z)+Ag(z)-AB|$$

$$=|g(z)\big(f(z)-A\big)+A\big(g(z)-B\big)|$$

$$\leq|g(z)\big(f(z)-A\big)|+|A\big(g(z)-B\big)|$$

$$=|g(z)||f(z)-A|+|A||g(z)-B|$$

$$<\frac{|g(z)|}{2}\frac{\varepsilon}{|g(z)|+1}+\frac{|A|}{2}\frac{\varepsilon}{|A|+1}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Jadi, $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = AB = \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot \lim_{z\to z_0} g(z)$

4. Berdasarkan bukti 3, maka dapat ditunjukkan

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\left(f(z)\frac{1}{g(z)}\right)$$

$$= \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0}\frac{1}{g(z)}$$

Dengan $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\lim_{z\to z_0} g(z)}$, yaitu dengan diberikan bilangan positif $\varepsilon$, maka $\frac{1}{2}|g(z)||B|\varepsilon$ adalah positif. Karena $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$, maka terdapat suatu bilangan positif $\delta_1$ sedemikian sehingga

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(z) - B| < \frac{1}{2}|g(z)||B|\varepsilon$$

Dengan demikian terdapat suatu $\delta$ sedemikian sehingga $0 < |z - z_0| < \delta$ yang menunjukkan

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(z)}{g(z)B}\right| = \left|\frac{-(g(z) - B)}{g(z)B}\right|$$

$$= \left|\frac{g(z) - B}{g(z)B}\right|$$

$$= \frac{|g(z) - B|}{|g(z)B|}$$

$$= \frac{1}{2}|g(z)||B|\varepsilon \cdot \frac{1}{|g(z)||B|}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon$$

Jadi, $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{B} = \frac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$

Oleh karena itu,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} f(z) \frac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$$

$$= \frac{A}{B} \qquad \blacksquare$$

## 2.5 Fungsi Pangkat Bilangan Kompleks

Fungsi pangkat didefinisikan sebagai:

$$w = e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b),$$

dengan $e = 2{,}71828\ldots$ adalah bilangan dasar logaritma natural (asli). Jika $a$ bilangan riil positif, maka didefinisikan $a^z = e^{z \ln a}$, dengan $\ln a$ adalah logaritma natural (asli) dari $a$. jika $a$=$e$ maka direduksi kembali menjadi $w$ (Spiegel,1994).

**Teorema 2.5.1 (Wibisono, 1975)**

*i. Untuk setiap peubah kompleks $z_1$ dan $z_2$ berlaku sifat-sifat berikut:*

*1.* $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

*2.* $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$

*ii. Jika $z = a + ib$, maka*

*1.* $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

*2.* $|e^z| = e^a$ *dan* $\arg(e^z) = b$

Bukti:

i. Misalkan $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$ maka

$e^{z_1} = e^{a_1}(\cos b_1 + i\sin b_1)$ dan $e^{z_2} = e^{a_2}(\cos b_2 + i\sin b_2)$

1. $$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{a_1}e^{a_1}(\cos b_1 + i\sin b_1)(\cos b_2 + i\sin b_2) \\ &= e^{a_1+a_2}(\cos b_1\cos b_2 - \sin b_1\sin b_2) + i(\cos b_1\sin b_2 + \cos b_2\sin b_1) \\ &= e^{a_1+a_2}\left(\cos(b_1+b_2) + i\sin(b_1+b_2)\right) \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

2. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$, maka

$$\begin{aligned} e^{z_1-z_2} &= e^{a_1-a_2}\left(\cos(b_1-b_2) + i\sin(b_1-b_2)\right) \\ &= \frac{e^{a_1}}{e^{a_2}}\left((\cos b_1\cos b_2 + \sin b_1\sin b_2) + i(\cos b_1\sin b_2 - \cos b_1\sin b_2)\right) \\ &= \frac{e^{a_1}}{e^{a_2}}\left((\cos b_1 + i\sin b_1)\cos b_2 - (\cos b_1 + i\sin b_1)i\sin b_2\right) \\ &= \frac{e^{a_1}}{e^{a_2}}(\cos b_1 + i\sin b_1)(\cos b_2 - i\sin b_2) \\ &= \frac{e^{a_1}}{e^{a_2}}\cdot e^{ib_1}e^{-ib_2} \\ &= \frac{e^{a_1}}{e^{a_2}}\cdot\frac{e^{ib_1}}{e^{ib_2}} \\ &= \frac{e^{a_1+ib_1}}{e^{a_2+ib_2}} \\ &= \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

ii. Misalkan $z = a + ib$, maka $e^z = e^a(\cos b + i\sin b) = e^a\cos b + ie^a\sin b$,

sehingga:

1. Karena $z = a + ib$ maka $\overline{z} = a + ib$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
e^{\overline{z}} &= e^{a-ib} \\
&= e^{a} e^{-ib} \\
&= e^{a}(\cos b - i \sin b) \\
&= e^{a}\cos b - ie^{a}\sin b \\
&= \overline{e^{a}\cos b + ie^{a}\sin b} \\
&= \overline{e^{a}(\cos b + i \sin b)} \\
&= \overline{e^{z}}
\end{aligned}
$$

2. $\left|e^{z}\right| = \sqrt{(e^{a}\cos b)^{2} + (e^{a}\sin b)^{2}} = \sqrt{(e^{a})^{2}(\cos^{2} b + \sin^{2} b)} = e^{a}$, dan

$$\arg(e^{\overline{z}}) = \arctan\left(\frac{e^{a}\sin b}{e^{a}\cos b}\right) = \arctan(\tan b) = b \qquad \blacksquare$$

## 2.6 Fungsi Analitik

Jika turunan $f'(z)$ ada di semua titik $z$ dari suatu daerah $\Re$, maka $f(z)$ dikatakan *analitik dalam* $\Re$ dan dinyatakan sebagai *fungsi analitik* dalam $\Re$. Istilah *regular* (teratur) dan *holomorphic* (holomorfik) seringkali digunakan sebagai pengganti istilah analitik.

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan *analitik* di suatu titik $z_0$ jika terdapat suatu lingkungan $|z - z_0| < \delta$ sehingga $f'(z)$ ada di setiap titik pada lingkungan tersebut (Spiegel, 1987).

## 2.7 Persamaan Cauchy Riemann

Suatu syarat perlu agar $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik dalam suatu daerah $\Re$ adalah *u* dan *v* memenuhi *persamaan Cauchy Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jika turunan parsial diatas kontinu dalam $\Re$, maka persamaan Cauchy Riemann adalah syarat cukup agar $f(z)$ analitik dalam $\Re$.

Fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ seringkali dinamakan *fungsi sekawan*. Jika salah satu dari padanya diberikan maka kita dapat menentukan yang lainnya (terlepas dari suatu konstanta penjumlahan sebarang) sehingga $u + iv = f(z)$ analitik (Spiegel, 1987).