PERBANDINGAN PEMBOBOT HUBER, TUKEY BISQUARE, DAN WELSCH PADA REGRESI ROBUST PENDUGA- MM

(Skripsi)

Oleh

ANA TRIANA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

COMPARISON OF HUBER, TUKEY BISQUARE, AND WELSCH ON ROBUST REGRESSION MM-ESTIMATOR

By

Ana Triana

Robust regression is the method used when one of the classical assumptions is not fulfilled. One of the estimation methods in robust regression is the MM-estimator. The MM-estimator has several weights functions, three of them are Huber, Tukey Bisquare, and Welsch. In this study the three weighters will be compared with sample sizes (n) : 30, 60, 100, and 200, contaminated with percentage outliers : 5%, 10%, 15%, 20%, 25%, and 30%. The three weights have different objective functions, but the bias value and Mean Square Error (MSE) obtained from the three weights are not much different. It shows that the three weights produce $\hat{\beta}_s$ of MM-estimator that are equally excellents.

Keyword : MM-Estimation, Huber, Tukey Bisquare, Welsch

ABSTRAK

PERBANDINGAN PEMBOBOT HUBER, TUKEY BISQUARE, DAN WELSCH PADA REGRESI ROBUST PENDUGA- MM

Oleh

Ana Triana

Regresi *robust* merupakan metode regresi yang digunakan ketika salah satu asumsi klasik tidak terpenuhi. Salah satu metode estimasi pada regresi *robust* yaitu penduga-MM. Penduga-MM memiliki beberapa fungsi pembobot diantaranya adalah Huber, Tukey Bisquare, dan Welsch. Pada penelitian ini akan dibandingkan ketiga pembobot tersebut dengan jumlah ukuran data : 30, 60, 100, dan 200, dikontaminasikan pencilan dengan persentase : 5%, 10%, 15%, 20%, 25%, dan 30%. Ketiga pembobot tersebut memiliki fungsi objektif yang berbeda-beda, tetapi nilai bias dan *Mean Square Error* (MSE) yang dihasilkan memiliki nilai yang tidak jauh berbeda. Sehingga ketiga pembobot yang digunakan pada Penduga-MM menghasilkan $\hat{\beta}_S$ yang sama baiknya.

Kata kunci : Penduga-MM, Huber, Tukey Bisquare, Welsch

PERBANDINGAN PEMBOBOT HUBER, TUKEY BISQUARE, DAN WELSCH PADA REGRESI ROBUST PENDUGA- MM

Oleh

ANA TRIANA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN PEMBOBOT HUBER, TUKEY BISQUARE, DAN WELSCH PADA REGRESI ROBUST PENDUGA-MM**

Nama Mahasiswa : *Ana Triana*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031011

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.	**Widiarti, S.Si., M.Si.**
NIP 19740726 200003 2 001	NIP 19800502 200501 2 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **3 Oktober 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Ana Triana**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031011**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Perbandingan Pembobot Huber, Tukey Bisquare, dan Welsch pada Regresi Robust Penduga-MM**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Dan Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar lampung, Oktober 2018

Yang Menyatakan,

Ana Triana

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Ana Triana dilahirkan di Bandarlampung pada tanggal 7 September 1995. Penulis merupakan anak ketiga dari empat bersaudara, dari Bapak Sopian dan Ibu Sumarni.

Penulis memulai pendidikannya di Taman Kanak-kanak (TK) Aisyiyah Bustanul Athfal 1 pada tahun 2000 yang diselesaikan tahun 2002 dan Sekolah Dasar (SD) di SDN 2 Labuhan Ratu pada tahun 2002 sampai 2008. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama di SMPN 2 Bandarlampung pada tahun 2008 sampai 2011 dan pada tahun 2011 melanjutkan pendidikannya ke Sekolah Menengah Atas di SMAN 15 Bandarlampung yang diselesaikan pada tahun 2014.

Pada tahun 2014, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN undangan.

Pada saat dibangku kuliah, penulis mengikuti organisasi di dalam kampus. Penulis aktif di Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA sebagai anggota Departemen Pengembangan Sains dan Lingkungan Hidup (2015/2016).

Sebagai salah satu mata kuliah wajib di awal tahun 2017 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di PT. Bank Rakyat Indonesia Tbk Kantor Wilayah Bandar Lampung pada 18 januari 2017 sampai dengan 24 Februari 2017. Selanjutnya pada bulan Juli-Agustus tahun 2017, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Pematang Pasir, Kecamatan Ketapang, Kabupaten Lampung Selatan, Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

"Barang siapa yang melepaskan satu kesusahan seorang mukmin, pasti Allah akan melepaskan darinya satu kesusahan pada hari kiamat. Barang siapa yang menjadikan mudah urusan orang lain, pasti Allah akan memudahkannya di dunia dan di akhirat."

(HR. Muslim)

"Tidak ada balasan kebaikan kecuali kebaikan(pula)"

(Ar-Rahman : 60)

"Sesungguhnya beserta kesulitan itu ada kemudahan . Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain), dan hanya kepada Tuhanmu lah kamu berharap."

(Al-Insyirah : 6-8)

"Barangsiapa yang menempuh suatu perjalanan untuk menuntut ilmu, maka Allah akan mudahkan baginyan jalan menuju surga."

(HR. Muslim)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,
Puji dan syukur kita ucapkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena atas berkah dan nikmat-Nya kepada kita, Shalawat serta salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya yang sangat sederhana ini untuk:

Papi dan Bunda
Tidak ada kata yang dapat aku sampaikan untuk kalian kecuali terimakasih yang sebesar-besarnya atas semua yang telah kalian berikan untukku. Cinta, dukungan, semangat, kasih sayang, serta doa disetiap sujudnya untuk keberhasilanku dimasa depan.

Kakak Nurma, kakak Isti, dan Adik Rasyid
Terimakasih telah mengajarkan banyak hal, terutama arti kesabaran.

Ibu Dosen Pembimbing dan Pembahas
Terimakasih atas bimbingan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi.

Sahabat-sahabatku

Almamater Tercinta, Universitas Lampung.

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT karena atas rahmat dan ridho-Nya skripsi ini dapat diselesaikan . Skripsi dengan judul **"Perbandingan Pembobot Huber, Tukey Bisquare, Dan Welsch Pada Regresi Robust Penduga- MM"** adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Universitas Lampung. Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis menyadari banyaknya bimbingan, bantuan, dukungan, saran dan do'a dari berbagai pihak. Dalam kesempatan ini dengan segala kerendahan hati, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si., selaku pembimbing I yang senantiasa membimbing, memotivasi dan memberikan saran dalam proses penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku pembimbing II atas kesediaan memberikan bimbingan, saran dan kritik dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Si., selaku penguji utama pada ujian skripsi. Terimakasih untuk masukan dan saran-saran pada seminar proposal dan seminar hasil terdahulu.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku pembimbing akademik yang telah banyak membimbing dalam proses perkuliahan.

5. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Papi, Bunda, Kakak Nurma, Kakak Isti, dan Adik Rasyid yang selalu mendukung, mendo'akan, memotivasi, memberikan semangat dan perhatiannya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman seperjuangan Annisa Anandiya Suryadi, Citra Anggraini Putri, Febi Prahesti Fitriani , dan Jelli Kiki yang telah banyak membantu penulis.
8. Sahabat-sahabat sekolah Anggiya, Salma, Nabila, Annisa Ramadhani, Unggul, Annisa Putri Ambarwati, dan Nurul Azizah yang tidak pernah lelah memberikan semangat kepada penulis.
9. Keluarga Besar Bapak Parlan dan teman-teman KKN, terimakasih atas segala bantuannya selama KKN di desa Pematang Pasir.
10. Teman-teman Matematika 2014 yang telah memberikan pengalaman luar biasa.
11. Dan semua pihak yang terlibat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun guna penelitian selanjutnya agar menjadi lebih baik. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung,   Oktober 2018

Penulis

Ana Triana

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi linier merupakan metode yang digunakan untuk mengetahui hubungan linier antara satu variabel dependen (terikat) dengan satu atau lebih variabel independen (bebas) yang dinyatakan dalam model matematika. Analisis regresi linier dibagi menjadi dua, yaitu analisis regresi linear sederhana dan regresi linear berganda. Analisis regresi linier sederhana adalah analisis regresi yang melibatkan satu variabel independen (X) dengan satu variabel dependen (Y), sedangkan analisis regresi berganda melibatkan lebih dari satu variabel independen. Metode yang paling sering digunakan dalam mengestimasi koefisien regresi pada model regresi yaitu metode kuadrat terkecil (MKT).

Estimasi koefisien regresi dengan MKT dilakukan dengan meminimumkan jumlah kuadrat residual. Koefisien estimasi dari suatu model persamaan regresi yang diperoleh menggunakan MKT menghasilkan estimasi linier tak bias dan ragamnya minimum, jika asumsi-asumsi dari model klasik terpenuhi. Asumsi klasik yang harus terpenuhi yaitu , galat menyebar normal, ragam galat homogen, nilai ε_i adalah bebas satu dengan yang lainnya, X dan Y terkait secara linier. Tetapi ketika asumsi klasik tersebut tidak terpenuhi maka penggunaan MKT kurang baik. Asumsi normalitas seringkali tidak terpenuhi saat data mengandung pencilan (*outlier*). Suatu pencilan dalam data dapat mengakibatkan estimasi koefisien regresi yang diperoleh tidak tepat, sehingga dibutuhkan metode yang resistan terhadap pencilan. Salah satu metode yang digunakan untuk mengatasi pencilan adalah metode regresi *robust*.

Regresi *robust* diperkenalkan oleh Andrews pada tahun 1972, dan merupakan metode regresi yang digunakan ketika galat berdistribusi tidak normal atau terdapat pencilan yang mempengaruhi model. Terdapat lima metode estimasi pada regresi *robust* yaitu, M-*estimator, Least Median Square* (LMS)-*estimator, Least Trimmed Square* (LTS)-*estimator*, S-*estimator* dan MM-*estimator*. MM-*estimator* merupakan metode estimasi yang mempunyai nilai *breakdown point* yang tinggi. *Breakdown point* adalah jumlah maksimum data terkontaminasi pencilan yang dapat ditoleransi oleh suatu metode. MM-*estimator* memiliki beberapa fungsi pembobot yang dapat digunakan diantaranya adalah Huber, Tukey Bisquare dan Welsch. Fungsi pembobot digunakan untuk menghasilkan nilai skala pembobot yang diperoleh dengan cara melakukan iterasi hingga konvergen.

Berbagai penelitian yang berkaitan dengan regresi *robust* penduga-MM telah banyak dilakukan selama beberapa dasawarsa, berikut diantaranya: Herawati, dkk (2011) tentang "Analisis Ketegaran Regresi *Robust* Terhadap Letak Pencilan : Studi Perbandingan", dalam penelitian ini terdapat dua kasus letak pencilan, yaitu pencilan terletak di tengah garis regresi dan pencilan terletak di ujung atas garis regresi. Metode yang digunakan adalah Penduga-MM dan Penduga-M, hasilnya yaitu penduga-MM merupakan metode robust yang lebih baik dibandingkan

Penduga-M dalam menduga nilai koefisien regresi linier baik pada letak pencilan di tengah maupun pada letak pencilan di ujung; Herawati & Nisa (2010) tentang "Analisis Regresi *Robust* Menggunakan Metode Penduga-MM ", metode penduga MM *(MM-Estimator)* merupakan metode *robust* yang cukup baik untuk mengatasi pencilan pada analisis regresi hingga mencapai pencilan sebanyak 20% dari data dan Penduga-MM tidak terlalu terpengaruh oleh pencilan pada berbagai ukuran sampel, dan memiliki nilai yang jauh lebih baik dibandingkan dengan metode MKT; Alma Ozlem Gurunlu (2011) tentang "Perbandingan Metode Regresi Robust pada Regresi Linear", membandingkan empat metode regresi robust yaitu penduga-M, penduga-S, penduga-MM, dan LTS (*Least Trimmed Square*), dari keempat metode penduga tersebut dibandingkan keefektifannya dalam mengatasi pencilan ditinjau dari nilai R-*square* dan diperoleh penduga-MM adalah metode terbaik dibandingkan penduga-M, penduga-S, dan LTS, tetapi kelemahan penduga–MM yaitu kurang baik digunakan untuk data berukuran kecil; Zahari, dkk (2012) tentang "Penduga-MM Ridge Terboboti pada Regresi Ridge Robust terhadap Multikolinieritas", metode penduga-MM ridge terboboti merupakan metode paling efisien ketika multikolinearitas tinggi dan galat tidak berdistribusi normal tetapi jika galat berdistribusi normal maka metode tersebut kurang efisien dibandingkan metode lain yaitu Ridge, Wridge dan RMM.

Berdasarkan uraian diatas penulis tertarik membahas analisis regresi *robust* penduga-MM dengan menggunakan pembobot Huber, Tukey Bisquare, dan Welsch. Selanjutnya dilakukan perbandingan keefektifan ketiganya ditinjau dari nilai bias dan *Mean Square Error* (MSE) dengan berbagai ukuran sampel dan persentase pencilan.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini, yaitu:

1. Mengkaji regresi *robust* dengan metode penduga-MM menggunakan pembobot Huber, Tukey Bisquare dan Welsch melalui simulasi pada beberapa persentase nilai pencilan.
2. Membandingkan pembobot Huber, Tukey Bisquare dan Welsch pada analisis regresi *robust* penduga-MM, ditinjau dari nilai bias dan MSE.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini yaitu memberikan informasi dan menambah wawasan mengenai kefektifan pembobot Huber, Tukey Bisquare dan Welsch pada analisis regresi *robust* penduga-MM.

II. Tinjauan Pustaka

2.1. Analisis Regresi

Analisis regresi adalah metode statistika yang digunakan untuk mempelajari dan mengukur hubungan yang terjadi antara dua atau lebih variabel. Dalam analisis regresi, suatu persamaan regresi akan ditentukan dan digunakan untuk menggambarkan pola atau bentuk fungsi hubungan yang terdapat antar variabel. Variabel yang akan diestimasi nilainya disebut variabel terikat (*dependent variable*) dan diplot pada sumbu-y. Sedangkan variabel bebas (*independent variable*) adalah variabel yang diasumsikan memberikan pengaruh terhadap variabel terikat dan diplot pada sumbu-x (Harinaldi, 2005).

Menurut Sembiring (1995) , model regresi adalah model yang memberikan gambaran mengenai hubungan antara variabel bebas dengan variabel terikat. Secara umum bentuk persamaan model regresi adalah sebagai berikut :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$$

Dengan :

Y_i = variabel dependen (tak bebas)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_k$ = koefisien regresi

$X_{1i}, X_{2i}, \ldots X_{ni}$ = variabel independen (bebas)

ε_i = galat / residual

Dalam bentuk matriks model regresi dapat disederhanakan penulisannya menjadi :

$$\boldsymbol{Y}_{(nx1)} = \boldsymbol{X}_{(nxk)}\boldsymbol{\beta}_{(kx1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(nx1)}$$

Dalam analisis regresi, terdapat dua model regresi yaitu, regresi linear sederhana dan regresi linear berganda. Regresi linear sederhana adalah persamaan regresi yang menggambarkan hubungan antara satu peubah bebas (X) dan satu peubah tak bebas (Y), dimana hubungan keduanya dapat digambarkan sebagai suatu garis lurus. Sedangkan regresi linear berganda adalah persamaan regresi yang menggambarkan hubungan antara lebih dari satu peubah bebas (X) dan satu peubah tak bebas (Y).

2.2. Uji Asumsi-Asumsi Model Regresi Linear

Uji asumsi klasik terhadap model regresi yang digunakan dilakukan agar dapat diketahui apakah model regresi baik atau tidak. Tujuan pengujian asumsi klasik adalah untuk memberikan kepastian bahwa persamaan regresi yang diperoleh memiliki ketepatan dalam estimasi, tidak bias, dan konsisten. Sebelum melakukan analisis regresi, terlebih dahulu dilakukan pengujian asumsi.

Uji-uji asumsi pada model regresi linier berganda adalah sebagai berikut:

1. Normalitas

   Menurut Gujarati (2007) analisis regresi linier mengasumsikan bahwa galat (ε_i) berdistribusi normal. Pada regresi linier diasumsikan bahwa tiap ε_i berdistribusi normal dengan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Uji normalitas dapat dilakukan dengan normal P-P plot, jika data menyebar di sekitar garis diagonal dan mengikuti arah garis diagonal atau grafik histogramnya menunjukkan pola distribusi normal, maka asumsi normalitas terpenuhi.

2. Homoskedastisitas

   Salah satu asumsi klasik adalah homoskedastisitas yaitu varians galat harus konstan $Var\ (\varepsilon_i) = \sigma^2$; $i = 1,2, \ldots n$ dimana notasi n menunjukkan jumlah observasi.

3. Autokorelasi

   Secara sederhana dapat dikatakan model klasik mengasumsikan bahwa galat yang berhubungan dengan pengamatan tidak dipengaruhi oleh galat pada pengamatan yang lain atau $E(u_i, u_j) = 0$ dimana $i \neq j$

4. Non Multikolinieritas

   Menurut Montgomery & Peck (2006), kolinieritas terjadi karena terdapat korelasi yang cukup tinggi di antaravariabel independen.

5. Linieritas

Linearitas adalah bertujuan untuk mengetahui apakah dua variabel mempunyai hubungan yang linear atau tidak, yaitu X dan Y terkait secara linier untuk setiap nilai X dihubungkan maka akan membentuk garis lurus.

2.3. Metode Kuadrat Terkecil (MKT)

Metode kuadrat terkecil adalah metode yang digunakan untuk mengestimasi nilai parameter regresi dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat. Estimasi koefisien regresi dengan metode kuadrat terkecil yaitu dengan meminimumkan fungsi :

$$J = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \qquad (2.1)$$

Dalam persamaan (2.1), x_i dan y_i bilangan yang berasal dari pengamatan, sedangkan β_0 dan β_1 berubah bila garis regresinya berubah. Untuk mendapatkan nilai β_0 dan β_1 , maka J diturunkan terhadap β_0 dan $\beta_1$kemudian menyamakannya dengan nol. Jadi, bila J diturunkan terhadap β_0 , diperoleh :

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

atau,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta_0 - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad (2.2)$$

selanjutnya, J diturunkan terhadap β_1 dan samakan dengan nol,

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = 0$$

atau,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \qquad (2.3)$$

Nilai β_0 dan β_1 pada persamaan (2.2) dan (2.3) diganti dengan masing-masing taksirannya, b_0 dan b_1. Maka persamaan tersebut menjadi sistem persamaan linier.

$$\sum_{i=1}^{n} b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (2.4)$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \qquad (2.5)$$

dengan $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ dan $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, maka persamaan (2.4) menjadi :

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$= \overline{y} - b_1 \overline{x}$$

Persamaan (2.5) menjadi :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b_1 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) \right\} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{n} - b_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} \right\} = 0$$

jadi,

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}}$$

Jika ditulis dalam lambang matriks maka bentuknya menjadi:

$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} \tag{2.6}$$

Jika $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ merupakan matriks taksingular maka untuk estimasi kuadrat terkecil dari **b** pada persamaan (2.6) yaitu dikalikan dengan invers $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$. Jadi,

$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\,\mathbf{b} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$$

$$\mathbf{b} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}.$$

Selama asumsi-asumsi regresi terpenuhi, maka dugaan metode kuadrat terkecil bersifat tak bias dengan varians minimum. Karena memenuhi kedua sifat tersebut maka MKT dikenal sebagai penduga yang BLUE (*Best Linier Unbiased Estimator*) (Sembiring, 1995).

2.4. Regresi *Robust*

Regresi *robust* merupakan metode yang digunakan ketika residual berdistribusi tidak normal. Ketika melakukan uji asumsi untuk model regresi sering ditemui bahwa asumsi regresi dilanggar, transformasi data tidak menghilangkan pengaruh dari pencilan yang mengakibatkan estimasi koefisien regresi menjadi bias. Tujuan utama dari regresi *robust* adalah untuk memberikan hasil yang resisten terhadap adanya pencilan. Dalam keadaan ini regresi *robust* merupakan metode terbaik yang tahan terhadap pencilan (Chen, 2002).

Beberapa metode penduga dalam regresi *robust* diantaranya Penduga-S, Penduga-M dan penduga-MM.

2.4.1. Penduga-M

Dalam regresi *robust* salah satu metode adalah penduga M. Huruf M menunjukkan bahwa penduga-M adalah tipe maksimum likelihood, penduga-M memenuhi sifat sebagai penduga tak bias dan memiliki ragam minimum.

Jika penduga-M adalah $\hat{\beta} = \beta_n(x_1, \dots, x_n)$ maka

$$E[\beta_n(x_1, \dots, x_n)] = \beta \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) menunjukkan bahwa penduga $\hat{\beta} = \beta(x_1, \dots, x_n)$ pada penduga-M bersifat tak bias. Menurut Montgomery & Peck (2006), pada prinsipnya penduga-M merupakan penduga yang meminimumkan suatu fungsi sisaan ρ.

$$\hat{\beta}_M = \min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j \right) \tag{2.8}$$

Untuk memperoleh persamaan (2.8) yaitu dengan menyelesaikan persamaan:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i) = \min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{e_i}{\sigma}\right) = \min \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{\sigma}\right)$$

Dengan σ adalah

$$\hat{\sigma} = \frac{MAD}{0.6745} = \frac{median\,|e_i - \ median\,(e_i)|}{0{,}6745}$$

Fungsi ρ yang digunakan adalah fungsi objektif pembobot. Untuk meminimumkan persamaan (2.8), dicari turunan parsial pertama dari $\hat{\beta}_M$ terhadap β sehingga diperoleh persamaan

$$\hat{\beta}_M = \sum_{i=1}^{n} \rho'\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right) = 0 \qquad ; j = 0,1,\dots,k.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\ \psi\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right) = 0 \quad ; j = 0,1,\dots,k. \quad (2.9)$$

dengan $\psi = \rho'$ dan x_{ij} adalah observasi ke-*i* pada respon ke-*j* dan $x_{i0} = 1$. Draper & Smith (1998) memberikan penyelesaian persamaan (2.9), yaitu dengan mendefinisikan fungsi pembobot:

$$w(e_i) = \frac{\psi\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right)}{\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j}{\hat{\sigma}}\right)} \quad (2.10)$$

Karena nilai $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}$ sebagai pengganti e_i, maka persamaan (2.10) menjadi

$$w_i = w(u_i) = \frac{\psi(u_i)}{(u_i)}$$

Dengan demikian persamaan (2.9) menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\ w_i \left(y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\beta_j\right) = 0 \qquad , j = 0,1,\dots,k \quad (2.11)$$

Estimasi parameter pada regresi *robust* M-*estimator* dilakukan dengan *Iteratively Reweighted Least Squares* (*IRLS*) yaitu dengan metode kuadrat terkecil terboboti secara iterasi, dimana nilai w_i akan berubah nilainya di setiap iterasi. Untuk menggunakan IRLS, diasumsikan bahwa suatu estimasi awal, $\hat{\beta}^0$ ada dan $\hat{\sigma}_i$ suatu estimasi skala. Dengan *j* adalah jumlah parameter yang akan diestimasi, maka persamaan (2.11) menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\ w_i{}^0 \left(y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij} \beta_j{}^0 \right) = 0 \qquad , j = 0,1, \dots, k \qquad (2.12)$$

Persamaan (2.12) dalam notasi matriks dapat ditulis menjadi :

$$\boldsymbol{X^T W}_i \boldsymbol{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X^T W}_i \boldsymbol{Y} \qquad (2.13)$$

Dengan $\boldsymbol{W}_i$ adalah matriks berukuran *n x n* dengan elemen-elemen diagonal yang berisi pembobot. Persamaan (2.13) disebut sebagai persamaan *Weighted Least Squares* (*WLS*). Penyelesaian persamaan tersebut akan memberikan pendugaan untuk $\hat{\beta}$, yaitu

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{X})^{-1} (\boldsymbol{X^T W}_i \boldsymbol{Y})$$

$\hat{\beta}$ diperoleh dengan melakukan iterasi sampai diperoleh nilai yang konvergen.

Algoritma perhitungan nilai penduga-M, sebagai berikut:

1. Melakukan estimasi koefisien regresi menggunakan MKT
2. Menghitung nilai sisaan $e_i = y_i - \hat{y}_i$
3. Menghitung nilai $\hat{\sigma}_i = \frac{MAD}{0.6745} = \frac{median\,|e_i - median\,(e_i)|}{0{,}6745}$
4. Menghitung nilai $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}$
5. Menghitung pembobot (w_i)
6. Menghitung $\hat{\beta}_M$ menggunakan metode *Weighted Least Squares (WLS)* dengan pembobot w_i. Ulangi langkah 2 sampai 5 sehingga diperoleh nilai $\hat{\beta}_M$ yang konvergen.

2.4.2. Penduga-S

Penduga-S pertama kali diperkenalkan oleh Rousseeuw dan Yohai (1984), dinamakan Penduga-S karena estimasi ini berdasarkan pada skala sisaan dari penduga-M. Penduga-S merupakan regresi *robust* yang termasuk *breakdown point* tinggi, *breakdown point* adalah jumlah maksimum data terkontaminasi pencilan yang dapat ditoleransi oleh suatu metode. Pada metode kuadrat terkecil, penduga diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat pada persamaan umum regresi linier. Penduga-S didefinisikan $\hat{\beta}_s = \min \hat{\sigma}_s(e_1, e_2, \dots, e_n)$ dengan menentukan nilai estimator skala *robust* $(\hat{\sigma}_s)$ yang minimum dan memenuhi

$$\sum_{i=1}^{n} \rho' \left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij} \beta_j}{\hat{\sigma}_s} \right) \qquad (2.14)$$

dengan

$$\hat{\sigma}_s = \sqrt{\frac{1}{nK} \sum_{i=1}^{n} w_i \, e_i^2}$$

K=0.199 , $w_i = w_\sigma(u_i) = \frac{\rho(u_i)}{u_i^2}$, dan pada estimasi awal

$$\hat{\sigma}_s = \frac{median\,|e_i - median\,(e_i)|}{0.6745}$$

Penyelesaian persamaan (2.14) adalah dengan mencari turunan terhadap β sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} \rho' \left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\, \beta}{\hat{\sigma}_s} \right) = 0 \qquad j = 0, 1, \dots, k$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\,\psi\left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\,\beta}{\hat{\sigma}_S}\right) = 0 \qquad j = 0,1,\dots,k \qquad (2.15)$$

ψ disebut fungsi pengaruh yang merupakan turunan dari $\rho(\rho' = \psi)$, turunan fungsi ρ adalah $\psi(u_i) = \rho'(u_i)$. Dengan $w_i = \frac{\psi(u_i)}{u_i}$ merupakan fungsi pembobot IRLS, dimana $u_i = u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}$. Algoritma perhitungan nilai penduga-S, sebagai berikut:

1. Melakukan estimasi koefisien regresi menggunakan MKT
2. Menghitung nilai sisaan $e_i = y_i - \hat{y}_i$
3. Menghitung nilai

$$\hat{\sigma}_i = \begin{cases} \dfrac{median\,|e_i - median\,(e_i)|}{0{,}6745} & ,iterasi = 1 \\ \sqrt{\dfrac{1}{nK}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i\, e_i^2} & ,iterasi > 1 \end{cases}$$

   Dengan K=0.199

4. Menghitung nilai $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}$
5. Menghitung pembobot (w_i)
6. Menghitung $\hat{\beta}_M$ menggunakan metode *Weighted Least Squares (WLS)* dengan pembobot w_i. Ulangi langkah 2 sampai 5 sehingga diperoleh nilai $\hat{\beta}_S$ yang konvergen.

2.4.3.Penduga-MM

Penduga-MM (MM-*Estimator*) diperkenalkan oleh Yohai (1987), merupakan metode yang secara simultan mempunyai dua sifat, yaitu penduga yang bersifat *breakdown point* tinggi dan efisiensi tinggi, atau dengan kata lain penduga-MM bertujuan menghasilkan sebuah penduga yang breakdown point tinggi serta mempertahankan efisiensinya, dimana *breakdown point* dan efisiensi merupakan sifat terpenting dalam penduga *robust*.

Untuk memperoleh sifat penduga yang memiliki breakdown point tinggi dan efisiensi tinggi, metode penduga-MM menggabungan 2 metode resgresi *robust* dalam tahap perhitungannya, yaitu metode *robust* yang memiliki breakdown point tinggi sebagai penduga awal, dan metode *robust* yang memiliki efisiensi tinggi pada proses perhitungan iteratifnya. Metode penduga-MM berusaha untuk mempertahankan sifat *robust* dan resisten dari pendugai-S, serta sifat efisien dari penduga-M.

Prosedur penduga ini adalah dengan mengestimasi parameter regresi menggunakan Penduga-S yang meminimumkan skala sisaan dari estimasi-M dan dilanjutkan dengan estimasi-M. Estimasi-MM bertujuan untuk mendapatkan estimasi yang mempunyai nilai *breakdown* tinggi dengan lebih efisien. Estimasi-MM merupakan penyelesaian dari

$$\hat{\beta}_{MM} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, \rho_1{}' \left(\frac{y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\, \beta_j}{\hat{\sigma}_s} \right) = 0 \qquad (2.16)$$

Dengan $y_i - \sum_{j=0}^{k} x_{ij}\, \beta_j$ adalah sisaan yang diperoleh dari estimasi parameter dengan Penduga-S . Algoritma perhitungan nilai penduga-M, sebagai berikut:

1. Melakukan estimasi koefisien regresi menggunakan MKT
2. Menghitung nilai sisaan $e_i = \; y_i - \hat{y}_i$ dari estimasi- S
3. Menghitung nilai $\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_{sn}$
4. Menghitung nilai $u_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}}$
5. Menghitung pembobot (w_i)
6. Menghitung $\hat{\beta}_{MM}$ menggunakan metode *Weighted Least Squares (WLS)* dengan pembobot w_i. Ulangi langkah 2 sampai 5 sehingga diperoleh nilai $\hat{\beta}_{M}$ yang konvergen.

2.5. Fungsi Pembobot

Penduga-MM memiliki beberapa fungsi pembobot diantaranya adalah Huber, Tukey Bisquare, dan Welsch. Fungsi pembobot digunakan untuk menghasilkan nilai skala pembobot yang diperoleh dengan cara melakukan iterasi hingga konvergen. Menurut Fox (2002), fungsi obyektif adalah fungsi yang digunakan untuk mencari fungsi pembobot pada regresi *robust.* Fungsi pembobot yang digunakan :

Tabel 1. Fungsi Obyektif dan Fungsi Pembobot untuk Kuadrat Terkecil, Huber, Tukey Bisquare dan Welsch

Metode	Fungsi Obyektif	Fungsi Pembobot	Keterangan
Kuadrat Terkecil	$\rho(u) = \frac{1}{2}u^2$	$w(u) = 1$	$\lvert u\rvert < \infty$
Huber	$\rho(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 \\ \lvert u\rvert c - \frac{1}{2}c^2 \end{cases}$	$w(u) = \begin{cases} 1 \\ \frac{c}{\lvert u\rvert} \end{cases}$	$\lvert u\rvert \le c$ $\lvert u\rvert > c$
Tukey Bisquare	$\rho(u) = \begin{cases} \frac{c^2}{6}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^3\right\} \\ \frac{c^2}{6} \end{cases}$	$w(u) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^2 \\ 0 \end{cases}$	$\lvert u\rvert >$ [illegible] $\lvert u\rvert \le c$
Welsch	$\rho(u) = \frac{c^2}{2}\left[1 - \exp\left(-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)\right]$	$w(u) = \exp\left(-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)$	$\lvert u\rvert < \infty$

dimana nilai c adalah *tunning constant* yang telah ditetapkan untuk menentukan tingkat ke*robust*an suatu pembobot. Diketahui bahwa *tunning constant* untuk Huber adalah $c = 1.345$, nilai c untuk Tukey Bisquare adalah $c = 4.685$ dan $c = 2.9846$ adalah nilai *tunning constant* untuk Welsch.

2.6 *Mean Square Error (MSE)*

Kebaikan suatu penduga dapat dilihat dari tingkat kesalahannya, semakin kecil tingkat kesalahan semakin baik estimasinya. Jika diberikan dua penaksir parameter yaitu penaksir bias dengan variansi yang kecil dan penaksir tak bias dengan variansi yang besar maka penaksir bias dengan variansi kecil lebih dipilih sebagai penaksir parameter. Ukuran yang digunakan untuk membandingkan kedua hasil taksiran di atas disebut *Mean Square Error* (MSE). MSE adalah salah satu pengukuran kesalahan yang popular dan mudah digunakan. MSE dari θ yaitu didefinisikan sebagai berikut:

$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right)$$

Bentuk umum MSE dari θ adalah

$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = Var\left(\hat{\theta}\right) + \left(Bias\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

diberikan bentuk varian dari $\hat{\theta}$ dan kuadrat bias dari $\hat{\theta}$. Bentuk varian dari $\hat{\theta}$ sebagai berikut :

$$Var\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2\right]$$

$$= E\left[\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}E\left(\hat{\theta}\right) + \left(E(\hat{\theta})\right)^2\right]$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - 2\left(E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2 + \left(E(\hat{\theta})\right)^2$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - \left(E(\hat{\theta})\right)^2$$

Persamaan tersebut ditulis menjadi

$$E(\hat{\theta}^2) = Var\left(\hat{\theta}\right) + \left(E(\hat{\theta})\right)^2$$

Kuadrat bias dari $\hat{\theta}$ adalah sebagai berikut:

$$\left(Bias(\hat{\theta})\right)^2 = \left(E\left(\hat{\theta}\right) - \theta\right)^2$$

$$= \left(E(\hat{\theta})\right)^2 - 2\theta E\left(\hat{\theta}\right) + \theta^2$$

$$-2\theta E\left(\hat{\theta}\right) + \theta^2 = \left(Bias(\hat{\theta})\right)^2 - \left(E(\hat{\theta})\right)^2$$

Bukti:

$$MSE\ (\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2)$$

$$= E(\hat{\theta}^2 - 2\theta\hat{\theta} + \theta^2)$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - E(2\theta\hat{\theta}) + E(\theta^2)$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - 2\theta E(\hat{\theta}) + \theta^2$$

MSE dari $\hat{\theta}$ menjadi:

$$MSE\ (\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - 2\theta E(\hat{\theta}) + \theta^2$$

$$= Var(\hat{\theta}) + \left(E(\hat{\theta})\right)^2 + \left(Bias(\hat{\theta})\right)^2 - \left(E(\hat{\theta})\right)^2$$

$$= Var(\hat{\theta}) + \left(Bias(\hat{\theta})\right)^2$$

Terbukti $MSE\ (\hat{\theta}) = E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right) = Var(\hat{\theta}) + \left(Bias(\hat{\theta})\right)^2$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data simulasi berukuran 30, 60 , 100, dan 200 dengan replikasi 10000. Pencilan disimulasikan untuk kondisi jika terdapat pencilan 5%, 10%, 15%, 20%, 25% dan 30%. Untuk data n=30 jumlah pencilan disimulasikan 10%, 20%, dan 30%.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara studi pustaka dengan mempelajari buku-buku teks penunjang dan jurnal. Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini antara lain:

1. Membangkitkan satu kelompok galat (ε_i) dari sebaran normal baku (N(0,1)) berukuran 30, 60, 100 dan 200.

2. Membangkitkan data X_i sebagai variabel bebas dengan menggunakan *random integer* pada interval [1,50]. Banyaknya tergantung jumlah data yang diamati.
3. Menetapkan nilai $\beta_0 = 0$ dan $\beta_1 = 1$, bangkitkan nilai Y_i dari model regresi yaitu : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$
4. Mengkontaminasikan kelompok galat dari sebaran N(0,1) dengan sebaran N(50, 0.01). Pencilan yang diberikan yaitu 5%, 10%, 15%, 20%, 25% dan 30%, untuk n=30 pencilan yang diberikan 10%, 20%, dan 30%.
5. Menduga koefisien regresi dengan penduga-MM menggunakan pembobot Huber, Tukey Bisquare dan Welsch.
6. Ulangi percobaan simulasi sebanyak 10000 kali untuk semua jumlah data.
7. Menghitung nilai bias dan *MSE* (*Mean Square Error*) untuk penduga MM dengan masing-masing pembobot menggunakan rumus sebagai berikut:

   $$\text{Bias} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|\beta - \hat{\beta}_i\right| \qquad , m = 10000$$

   $$\text{MSE} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\beta - \hat{\beta}_i)^2 \qquad , m = 10000$$

   dengan m = replikasi.
8. Membandingkan bias dan MSE dari penduga-MM pembobot Huber, Tukey Bisquare, dan Welsch.

V. KESIMPULAN

Kesimpulan dari penelitian ini adalah:

1. Pembobot Huber , Tukey Bisquare dan Welsch memiliki fungsi objektif yang berbeda-beda, tetapi nilai $\hat{\beta}$ yang didapatkan memiliki nilai yang tidak jauh berbeda.

2. Nilai bias dan MSE untuk ketiga pembobot yang digunakan yaitu Huber, Tukey Bisquare dan Welsch pada penduga-MM tidak terdapat perbedaan yang cukup signifikan. Maka dari ketiga pembobot tersebut semua menghasilkan nilai dugaan yang sama baiknya.

DAFTAR PUSTAKA

Alma, O. G. 2011. *Comparison of Robust Regresson Methods in Linear Regression.* International Journal Contemp Mathematics and Sciences. Volume 6 No 9. 409-421.

Chen, C. 2002. Robust *Regression and Outlier Detection with the ROBUSTREG procedure*. SAS Institue : Cary, NC. 265-27.

Draper, N.R. & Smith. 1998. *Applied Regression Analysis, 3rd* edition. United States : Intercience Publication.

Fox, J. 2002. *Robust Regression.* Appendix to An R and S-plus Companion to Applied Regression.

Gujarati, D. 2007. *Dasar-dasar Ekonometrika Dasar.* Julius A. Mulyadi, S.E., penerjemah. Erlangga : Jakarta. Terjemahan dari : *Essentoials of Econometrics*.

Harinaldi. 2005. *Prinsip-prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains.* Erlangga, Jakarta.

Herawati, N., & Nisa, K. 2010. *Analisis Regresi Robust Menggunakan Metode Penduga-MM*. Seminar Nasional Sains & Teknologi - III.

Herawati, N., Nisa, K., & Setiawan, E. 2011. *Analisis Ketegaran Regresi Robust Terhadap Letak Pencilan : Studi Perbandingan*. Bulletin of Mathematics. Volume 3 No 1. 49-60.

Montgomery, D.C., & Peck, E. A. 2006. *Introduction to Linear Regression Analysis.* New York : John Wiley & Sons Inc.

Rousseeuw, P.J. & Yohai, V.J. 1984. *Robust Regression by Mean of S-Estimator, Robust and Nonlinear Time Series Analysis.*Lecture Notes in Statistics 26, 256-272.

Sembiring, R.K. 1995. *Analisis regresi*. Penerbit ITB, Bandung.

Yohai, V.J. 1987. *High Breakdown Point and High Efficiency Robust Estimates for Regression.* The Annals of Statistics. Vol. 15, 642-656.

Zahari, S.M., Zainol,M.S., & Al-Banna, M.I. 2012. *Weighted Ridge MM-Estimator in Robust Ridge Regression with Multicollinearity.* Mathematical Models and Methods in Modern Science, 124-129.