PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE LIMA DENGAN GARIS PARALEL ATAU *LOOP* MAKSIMAL DUA

(Skripsi)

Oleh

DRACJAT INDRAWAN

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima dengan Garis Paralel atau *Loop* Maksimal Dua

Oleh

Dracjat Indrawan

Graf $G(V, E)$ disebut graf terhubung (*connected graph)* jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan sepasang titik di G. Jika ada n titik dan m garis maka banyak graf terbentuk, baik yang terhubung atau tak terhubung. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang formula untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua jika diberikan $n = 5$ dan $m \geq 4$. Notasikan g sebagai banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda dan $N(G_{n,m,g})$ adalah banyaknya graf terhubung berorde 5 dengan m garis dan g. Dari hasil penelitian diperoleh rumus sebagai berikut :

a. $N(G_{5,m,4}) = \frac{125}{2}(m-3)(7m^2 - 56m + 114)$
b. $N(G_{5,m,5}) = \frac{37}{4}(m-3)(m-4)(21m^2 - 203m + 502)$
c. $N(G_{5,m,6}) = \frac{41}{24}(m-3)(m-4)(m-5)(21m^2 - 238m + 692)$
d. $N(G_{5,m,7}) = \frac{11}{24}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(7m^2 - 91m + 304)$
e. $N(G_{5,m,8}) = \frac{1}{16}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(3m^2 - 44m + 166)$
f. $N(G_{5,m,9}) = \frac{1}{576}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)(3m^2 - 49m + 206)$
g. $N(G_{5,m,10}) = \frac{1}{120960}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)(7m^2 - 126m + 584)$

Kata Kunci : graf, graf terhubung, loop, garis paralel

ABSTRACT

Determination of the Number of Connected Vertex Labeled Graph of Order Five with Maximum Parallel or Loop Edges is Two

By

Dracjat Indrawan

Graph $G\ (V,E)$ is called a connected graph if there at least one path that connects a pair of vertex on $G.$ If there are n vertices and m edges then many graphs are formed, either connected or not connected. In this research will be discussed about the formula to determine the number of connected graphs of order five with maximum parallel edges or loops is two if given $n = 5$ and $m \geq 4$. Let g as the number of edges connecting different pairs of vertices and $N(\ G_{n,m,g})$ is the number of connected graphs with of order of 5 with m edges and g. The following formula obtained from the result:

a. $N\left(G_{5,m,4}\right) = \frac{125}{2}(m-3)(7m^2 - 56m + 114)$
b. $N\left(G_{5,m,5}\right) = \frac{37}{4}(m-3)(m-4)(21m^2 - 203m + 502)$
c. $N\left(G_{5,m,6}\right) = \frac{41}{24}(m-3)(m-4)(m-5)(21m^2 - 238m + 692)$
d. $N\left(G_{5,m,7}\right) = \frac{11}{24}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(7m^2 - 91m + 304)$
e. $N\left(G_{5,m,8}\right) = \frac{1}{16}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(3m^2 - 44m + 166)$
f. $N\left(G_{5,m,9}\right) = \frac{1}{576}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)(3m^2 - 49m$
$+206)$
a. $N\left(G_{5,m,10}\right) = \frac{1}{120960}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)$
$(m-9)(7m^2 - 126m + 584)$

Keyword : graph, connected graph, loop, parallel edges

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE LIMA DENGAN GARIS PARALEL ATAU *LOOP* MAKSIMAL DUA

Oleh

Dracjat Indrawan

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PENENTUAN BANYAKNYA GRAF BERLABEL TITIK BERORDE LIMA DENGAN GARIS PARALEL ATAU *LOOP* MAKSIMAL DUA**

Nama Mahasiswa : *Dracjat Indrawan*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031043

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **27 September 2018**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau *Loop* Maksimal Dua" merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan hasil karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Oktober 2018

Penulis,

METERAI TEMPEL
F1D38AEF235764225
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Dracjat Indrawan
NPM. 1417031043

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Dracjat Indrawan, lahir di Braja Dewa, Way Jepara, Lampung Timur pada tanggal 31 Desember 1995. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, pasangan bapak Paino dan ibu Murjini.

Penulis mengawali pendidikan Taman Kanak-kanak di TK MMT Rawajitu Selatan pada tahun 2000-2002, tahun 2002-2008 menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 01 Gedung Karya Jitu, kemudian pendidikan menengah di SMP Negeri 01 Rawajitu Timur pada tahun 2008-2011, dan pendidikan lanjutan di SMA Negeri 01 Way Jepara pada tahun 2011-2014.

Pada tahun 2014, penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu (S1) dan diterima sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung, penulis aktif dalam beberapa organisasi, yaitu menjadi Generasi Muda Matematika, menjadi Amar ROIS FMIPA Universitas Lampung, menjadi anggota Bidang Minat dan Bakat Himatika FMIPA Unila periode 2015-2016.

Pada tahun 2017 penulis melakukan Kerja Praktik di CV Satrio Multi Transindo dari tanggal 18 Januari 2017 sampai dengan 18 Februari 2017. Kemudian penulis melaksanakan pengabdian masyarakat dengan mengikuti kegiatan Kuliah Kerja Nyata Bersama BNP2TKI di desa Cintamulya, kecamatan Candipuro, kabupaten Lampung Selatan, provinsi Lampung.

MOTTO

"Kegagalan terjadi karena banyak berencana tapi sedikit berpikir"

"Sesuatu yang belum dikerjakan, seringkali tampak mustahil, kita baru yakin kalau kita telah berhasil melakukannya dengan baik"

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain). Dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap."

(QS. Al-insyirah:6-8)

"Kunci hidup bahagia adalah Jalani, Nikmati dan Syukuri"

"Kesabaran adalah cara terbaik untuk mendapatkan sesuatu yang lebih baik"

PERSEMBAHAN

Untuk sahabat-sahabat terbaikku, terimakasih untuk semua Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Dengan segala kerendahan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Kedua orangtuaku yang selalu tulus berkorban, membimbing, selalu memberikan semangat, rela menjadi pendengar yang baik dan mendoakan setiap waktu untuk keberhasilan penulis.

Untuk kakak dan adikku tersayang yang selalu memberikan semangat dan dukungan serta do'a yang tak pernah henti untukku. Terimakasih sudah menjadi motivator di setiap hariku.

Untuk sahabat-sahabatku selama di kampus kebahagian dan keceriaan yang telah kalian berikan untukku, kalian adalah sahabat-sahabat terbaik yang selalu ada, terimakasih atas semua cerita indah yang selalu mengisi hari-hariku.

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima dengan Garis Paralel atau *Loop* Maksimal Dua” dengan baik dan tepat pada waktunya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik karena dukungan, bimbingan, saran, serta do’a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku dosen pembimbing I dan juga sebagai Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis dalam mengerjakan skripsi.
2. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku pembimbing II yang telah memberikan saran serta pembelajaran yang bermanfaat dalam menyelesaikan skripsi.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku pembahas dan penguji skripsi yang telah memberikan evaluasi, arahan, dan saran demi perbaikan skripsi.
4. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si., selaku dosen pembimbing akademik dari awal semester 1 hingga akhir semester 9.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak, Ibu, Kakak dan Adik tercinta yang selalu mendukung, mendoakan serta memberikan semangat dengan penuh kasih sayang sehingga menguatkan penulis dalam menjalani setiap proses meraih gelar sarjana.
8. Wahyuni Ugania yang selalu membantu serta tak pernah berhenti memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
9. Sahabat-sahabatku di kampus Nandra, Abror, Rahmad, Wahyu, Ketut, Agus, Alvin, Fajar, Raka, Yola, Margaretha, Novi, Rama serta sahabat-sahabat seperjuangan yang telah mendo'akan, memberi dukungan dan selalu menjalani kehidupan kampus bersama penulis.
10. Teman-teman mahasiswa angkatan 2014 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
11. Seluruh pihak yang telah banyak membantu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga informasi tambahan, saran, dan kritik untuk pengembangan dan perbaikan lebih lanjut sangat diharapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, Oktober 2018
Penulis

Dracjat Indrawan

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu kajian matematika yang memiliki banyak terapannya diberbagai bidang sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, *vertex* atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*.

Teori graf merupakan suatu pokok bahasan yang muncul pertama kali pada tahun 1736, yakni ketika Leonhard Euler mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan jembatan Konigsberg, Kaliningrad, Rusia. Di kota tersebut terdapat sungai Pregal yang membelah kota menjadi empat daratan terpisah. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Dengan mempresentasikan titik sebagai daratan dan garis sebagai jembatan, Euler menyatakan bahwa tidak mungkin melewati tiap jembatan tersebut tepat sekali. Hal itu dapat terjadi jika jumlah jembatan yang menghubungkan tiap – tiap daratan adalah genap.

Penerapan teori graf dalam kehidupan sehari-hari sangatlah luas, sehingga teori graf semakin berkembang. Banyak cabang ilmu pengetahuan yang menggunakan aplikasi teori graf diantaranya kimia, biologi, ilmu komputer, ekonomi dan lain-lain. Graf G (*V*,*E*) dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda di G,ada suatu *path* yang menghubungkan titik tersebut. Sebaliknya jika tidak ada *path* yang menghubungkan maka G dikatakan graf tidak terhubung. Dalam suatu teori graf dikenal istilah *loop*. *Loop* adalah suatu garis dalam suatu graf yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama.

Graf berlabel adalah suatu graf yang titik atau sisinya memiliki label atau nama. Jika titik-titiknya yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan titik. Jika sisi-sisinya yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi, sedangkan jika keduanya, titik dan sisi, yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan total (pelabelan titik dan garis). Menurut Deo (1989), banyaknya graf berlabel, khususnya *tree* (pohon) berlabel, yang dapat dibentuk bila diberikan *n* titik dengan $n \geq 2$ adalah n^{n-2}.

Pada tahun 2017 Prayoga melakukan penelitian tentang menghitung graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* dengan garis paralel dengan $n = 5$ dan $m \geq 4$ dan dapat dirumuskan secara umum, yaitu :

$$N(G_{n,m}) = \sum_{g \geq n-1}^{m} N\,(Gp_{n,m,g})$$

dengan:

n = banyaknya titik pada graf

m = banyaknya garis pada graf

g = banyaknya garis bukan paralel

Pada penelitian ini didiskusikan tentang banyaknya graf terhubung dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua yang terbentuk jika di berikan $n = 5$ serta $m \geq 4$ dan menentukan rumus dari pola-pola tersebut untuk menghitung banyaknya graf.

1.2 Tujuan Penelitan

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan banyaknya pola-pola yang terbentuk dan jumlah graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua yang terbentuk bila diberikan *n* titik dan *m* garis, dengan $n = 5$ dan $m \geq 4$.

1.3 Manfaat Penelitian

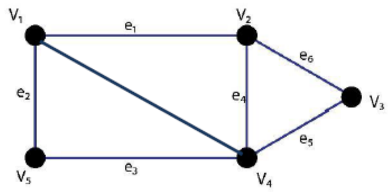
1. Memperluas pengetahuan pengembangan keilmuan khususnya dalam bidang ilmu matematika mengenai perkembangan dari teori graf, yaitu tentang graf terhubung.
2. Sebagai rujukan atau sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika dibidang teori graf.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan penelitian yang akan dilakukan.

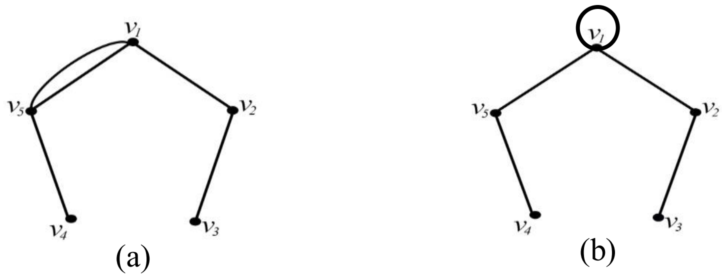
2.1. Konsep Dasar Teori Graf

Istilah-istilah dan definisi yang digunakan pada subbab ini diambil dari Deo (1989). Graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan tak terurut suatu himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots\}$ merupakan himpunan titik, $V(G) \neq \emptyset$, dan $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots\}$ merupakan himpunan sisi atau garis dari pasangan tak terurut $V(G)$.



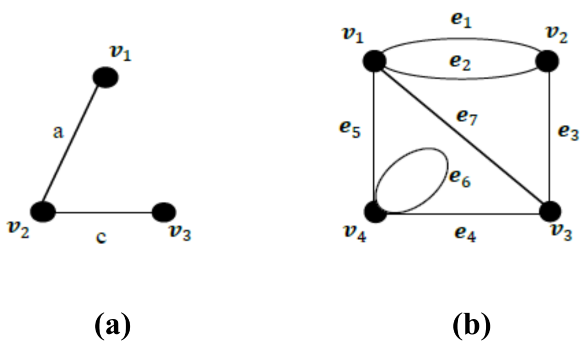
Gambar 2.1. Graf dengan 5 titik dengan 6 sisi

Suatu sisi atau garis yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut *loop*, sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan titik-titik yang sama. Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat *loop* atau garis paralel, sedangkan jika memuat *loop* atau garis paralel, maka disebut graf tak sederhana.



Gambar 2.2 (a) Graf dengan garis paralel (b) Graf dengan *loop*

Pada Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa gambar (a) merupakan contoh graf sederhana dengan tiga titik dan dua garis, sedangkan gambar (b) merupakan graf tidak sederhana dengan *loop* e_6 dan garis paralel e_1 dan e_2. Misalkan v_j merupakan titik ujung garis e_j pada suatu graf *G*, v_j dan e_j dikatakan *incidence* (menempel) satu sama lain. Dua garis tak paralel dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika keduanya menempel pada suatu titik yang sama. Dua titik dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika terdapat garis yang menghubungkan keduanya.

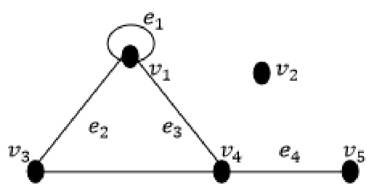


Gambar 2.3 (a) Contoh graf sederhana (b) Contoh graf tidak sederhana

Misalkan pada Gambar 2.3 (a) garis a menempel pada titik v_1 dan titik v_2, dan garis c menempel pada titik $v_2$dan v_3. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, titik v_2 bertetangga dengan v_1 dan v_3, serta titik v_3 bertetangga dengan v_2.

Walk adalah barisan berhingga dari suatu titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap garis menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *closed walk*. *Walk* yang melewati titik yang berbeda-beda disebut sebagai *path* (lintasan). *Path* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle*. Suatu graf G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan sepasang titik di G. Suatu graf tidak terhubung G merupakan graf yang terdiri dari dua atau lebih graf terhubung.

Derajat (*degree*) dari suatu titik v pada graf G dinotasikan dengan *deg(v)*, adalah banyaknya garis yang menempel pada titik v dengan *loop* dihitung dua. Untuk contoh dapat dilihat pada Gambar 2.4 bahwa $deg(v_1) = 4$, $deg(v_2) = 0$, dan $\deg(v_5) = 1$.



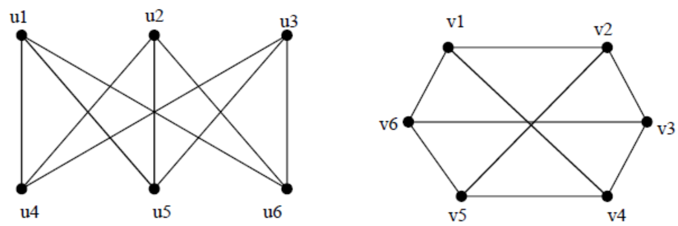
Gambar 2.4 Graf dengan 1 titik terasing dan 1 titik *pendant*

Titik terasing merupakan titik yang memiliki derajat nol, sedangkan titik *pendant* (daun) adalah titik yang memiliki derajat satu.

Dua graf dikatakan ekuivalen (dan disebut isomorfis) jika keduanya memiliki ciri-ciri yang sama pada istilah dalam teori graf. Dua graf *G* dan *G'* dikatakan isomorfis jika ada korespondensi 1-1 antara *vertex* pada kedua graf tersebut dan antara *edge* keduanya sehingga jika sisi *e* bersisian dengan titik *u* dan *v* pada *G* maka sisi *e*' pada *G'* juga bersisian dengan simpul *u*' dan *v*'. Dua graf isomorfis harus memiliki

1. Jumlah *vertex* yang sama.
2. Jumlah *edge* yang sama.
3. Mempunyai jumlah *vertex* yang sama berderajat tertentu

Perlu diperhatikan bahwa dua graf yang mempunyai sifat 1 sampai dengan 3, belum tentu kedua graf tersebut isomorfis.



Gambar 2.5 Contoh graf yang saling isomorfis

2.2 Konsep Dasar Barisan

Barisan merupakan suatu fungsi yang semua domainnya merupakan bilangan bulat (Rosen, 2012).

Secara umum, barisan dinotasikan sebagai berikut :

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots \dots \dots \dots a_n$$

Barisan yang sering digunakan adalah barisan aritmatika dan barisan geometri. Barisan aritmatika adalah barisan yang berbentuk $a, a + d, a + 2d, .., a + nd, ...,$ dengan a dan d adalah bilangan rill, dimana d merupakan beda. Barisan yang memiliki pola $a, ar, ar^2, ...,ar^n, ...$, dengan a dan r adalah bilangan riil dimana r merupakan rasio (beda) disebut barisan geometri (Rosen,2012).

Secara umum barisan bilangan dapat dinotasikan dengan $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n ...)$. Beda dari suku yang berurutan adalah selisih tiap dua suku yang berurutan. Misalkan suatu barisan $(a_n) = (3,4,8,15,25,38, ...)$. Selisih setiap suku yang berurutan sebagai berikut :

a_n 3 4 8 15 25 38

b_n 1 4 7 10 13

Beda 3 3 3 3

Jika diperhatikan barisan (a_n) tingkat dua menghasilkan barisan (b_n) tingkat satu sebagai barisan aritmatika yang memiliki beda hasil = 3. Sehingga (a_n) dinamakan barisan aritmatika tingkat dua (Imail,2012).

2.3. Konsep Dasar Teknik Pencacahan

Beberapa konsep dasar teknik pencacahan yang banyak digunakan antara lain adalah faktorisasi, permutasi, dan kombinasi.

1. Faktorisasi

Hasil kali semua bilangan bulat antara n sampai 1 didefinisikan sebagai besaran n! sering di sebut n faktorial, dan dinotasikan dengan

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1$$

(Ayres dan Schmidt,2004)

2. Permutasi

Permutasi *r* objek dari *n* objek adalah suatu urutan *r* objek yang diambil dari *n* objek yang berbeda yang dapat dibentuk. Secara umum, permutasi *r* objek dari *n* buah objek dapat dihitung dengan persamaan

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jika *r* = *n*, maka persamaan menjadi

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$P(n,n)$ sering disebut permutasi *n* objek karena permutasi tersebut menyusun keseluruhan objek yang ada (Siang, 2002).

3. Kombinasi

Misalkan himpunan S memiliki $|S| = n$ elemen. Banyaknya himpunan bagian S yang terdiri dari r $(r \leq n)$ disebut kombinasi n objek yang di-ambil sebanyak r objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{r}$ atau C(n,r) atau $_nC_r$. Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidaklah diperhatikan. Hal yang diperhatikan adalah objek yang muncul.

III. METODE PENELITIAN

3.1. Perhitungan Dasar Graf

Diberikan $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$

1. Graf g_n dengan n sebagai titiknya merupakan graf sederhana, maka banyaknya graf g_n adalah :

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$$

2. Graf g_n (m) dari graf sederhana yang memiliki n titik dan m garis, maka banyaknya graf g_n adalah :

$$g_n(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

(Agnarsson dan Raymond, 2007)

Diberikan $n, m \in \mathbb{N}$. Graf g_n (m) tidak memiliki loop dimana n sebagai titik dan m sebagai garis, maka banyaknya graf g_n (m) adalah :

$$g_n(m) = \binom{m + \binom{n}{2} - 1}{m}$$

(Agnarsson dan Raymond, 2007)

3.2 Penelitian yang Berhubungan dengan Enumerasi Graf yang Telah Dilakukan

Wamiliana, dkk. (2016) melakukan penelitian tentang graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$ dapat dirumuskan secara umum, yaitu :

$$N(G'_{5,m}) = N(G'_{5,m}) + \sum_{g=1}^{6} N(G'_{5,m,g})$$

$$= \binom{m+4}{4} + N(G'_{5,m,1}) + N(G'_{5,m,2}) + N(G'_{5,m,3}) + N(G'_{5,m,4}) + N(G'_{5,m,5}) + N(G'_{5,m,6})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10\binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} + 85 \times \binom{m}{4} + 30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4}$$

Dengan :

$N(G'_{5,m})$ = Jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$.

Selanjutnya, Amanto dkk. (2017), melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal empat dengan hasil sebagai berikut :

$$N(G'_{4,m,g_i}) = N(G'_{4,m,g_0}) + N(G'_{4,m,g_1}) + N(G'_{4,m,g_2}) + N(G'_{4,m,g_3})$$

$$N(G'_{4,m,g_i}) = \binom{m+3}{3} + \frac{3}{2}m\binom{m+3}{3} + 15\binom{m+3}{5} + 4\binom{m+3}{6}$$

dengan ketentuan sebagai berikut.

n = banyaknya titik

m = banyaknya garis

g_i = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu $i = 0,1,2,3$

$G'_{n,m,g_i} =$ graf tak terhubung berlabel dengan garis paralel atau *loop* dengan n titik, m garis, dan g_i = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu.

3.3 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada tahun ajaran 2017/2018 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.4 Metode Penelitian

Adapun langkah – langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut :

1. Mengumpulkan bahan literature serta studi pustaka yang berhubungan dengan graf.
2. Menentukan banyaknya titik dan garis yang akan dicari banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel atau dengan *loop* maksimal dua.
3. Menggambar graf terhubung dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua , dengan n adalah banyaknya titik dan m adalah banyaknya garis.

4. Mengelompokkan graf terhubung untuk *n* titik dan *m* garis yang sama.
5. Menghitung jumlah graf terhubung untuk setiap *n* titik dan *m* garis.
6. Menentukan pola yang terbentuk dari banyaknya graf yang dapat dibentuk dari *n* titik dan *m* garis.
7. Menentukan rumus secara umum untuk menghitung jumlah graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua untuk *n* titik dan *m* garis.
8. Membuktikan rumus yang terbentuk.
9. Menarik kesimpulan.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil konstruksi graf-graf terhubung berlabel titik berorde lima dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua, maka diperoleh kesimpulan bahwa :

Jumlah graf-graf terhubung berlabel berorde lima dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua untuk $n = 5, m \geq 4$, diperoleh rumus yaitu:

a. $N(G_{5,m,4}) =$
$$\frac{125}{2}(m-3)(7m^2 - 56m + 114)$$
b. $N(G_{5,m,5}) =$
$$\frac{37}{4}(m-3)(m-4)(21m^2 - 203m + 502)$$
c. $N(G_{5,m,6}) =$
$$\frac{41}{24}(m-3)(m-4)(m-5)(21m^2 - 238m + 692)$$
d. $N(G_{5,m,7}) =$
$$\frac{11}{24}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(7m^2 - 91m + 304)$$
e. $N(G_{5,m,8}) =$
$$\frac{1}{16}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(3m^2 - 44m + 166)$$

f. $N(G_{5,m,9}) =$

$$\frac{1}{576}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)(3m^2-49m+206)$$

g. $N(G_{5,m,10}) =$

$$\frac{1}{120960}(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)(m-7)(m-8)$$

$$(m-9)(7m^2-126m+584)$$

dengan :

$N(G_{n,m,g})$ = banyaknya graf terhubung berlabel dengan garis paralel berorde n dengan m garis dan g adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda.

5.2 Saran

Penelitian dapat di lanjutkan untuk menentukan rumus umum jumlah graf terhubung berlabel berorde dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua untuk $n \geq 6$.

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, G. and Raymond, G. 2007. *Graph Theory Modelling, Application, and Algorithms*. Pearson/Prentice Education, Inc., New Jersey.

Amanto, Wamiliana, Mustofa Usman, dan Reni Permata Sari, 2017. Counting the Number of Disconnected Vertex Laeblled Graph with Order Maksimal Four. *Science International*, Vol.29, No.6, Hal. 1181-1186.

Ayres, Frank J.R, dan Philip A.Schmidt. 2004. *Matematika Universitas*. Erlangga, Jakarta.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

Imail, S. 2012. Suku Ke-n Barisan Aritmatika Tingkat Dua, Tiga dan Empat dengan Pendekatan Akar Karakteristik. Respository.ung.ac.id/get/karyailmiah.pdf. Diakses Tanggal 31 Juli 2018, pukul 19.00 WIB.

Prayoga, Nandra Adi. 2017. Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Tanpa *Loop* Berorde Lima Dengan Garis Paralel Maksimal Lima. Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications,* Seventh Edition. McGraw-Hill, New York. USA.

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada ilmu Komputer.* Andi Offset. Yogyakarta.

Wamiliana, Amanto, dan Grita Tumpi N. 2016. Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five Without Paralel Edges. *Journal INSIST* Vol.1, No.1, eISSN. Page 4-7.