PEMODELAN KLAIM AGREGASI DENGAN JUMLAH KLAIM BERDISTRIBUSI POISSON DAN KLAIM BERDISTRIBUSI RAYLEIGH

(Skripsi)

Oleh

IRA SYAVITRI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

MODELING OF AGREGATION CLAIMS WITH AMOUNT OF POISSON DISTRIBUTION CLAIMS AND BIG CLAIMS OF RAYLEIGH DISTRIBUTION

By

IRA SYAVITRI

Claim is compensation from the insured to the insurer. Claim that occur individually are called individuals claims. Whereas a collection of individual claims is called an aggregation claim in a single period of vehicle insurance. Aggregation claims consist of patterns of number and size of individual claims. So that the model of aggregation claim is obtained each distribution of the number and size of claims. Claim distribution is based on probability density function and cumulative density function. In this research, the aggregation claim modeling is done using Poisson distributed number of claim and Rayleigh distributed size of claims. Rayleigh distribution is an extreme value distribution that can overcome a large enough value. And the Rayleigh distribution is a special case from the Weibull distribution when the parameter $\beta = 2$.

The result of this study is a probability model of aggregation claims which is a mixed model of Poisson and Rayleigh distributions. The expectation value and the maximum risk value of aggregation claims also obtained.

Keywords : Claim, Aggregation Claims, Rayleigh Distribution, Pure Premium, Maximum Risk, Value at Risk.

ABSTRAK

PEMODELAN KLAIM AGREGASI DENGAN JUMLAH KLAIM BERDISTRIBUSI POISSON DAN BESAR KLAIM BERDISTRIBUSI RAYLEIGH

Oleh

IRA SYAVITRI

Klaim adalah ganti rugi dari tertanggung kepada penanggung. Klaim yang terjadi secara individu disebut klaim individu. Sedangkan kumpulan dari klaim individu disebut klaim agregasi pada periode tunggal asuransi kendaraan. Klaim agregasi terdiri dari pola jumlah dan besar klaim individu. Sehingga model dari klaim agregasi terbentuk dari masing-masing distribusi jumlah dan besar klaim. Dimana distribusi klaim berdasarkan fungsi densitas probabilitas dan fungsi densitas kumulatif. Maka dilakukan pemodelan klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh. Distribusi Rayleigh merupakan salah distribusi nilai ekstrim yang dapat mengatasi nilai yang cukup besar. Serta distribusi Rayleigh merupakan hal khusus dari distribusi Weibull ketika parameter $\beta = 2$.

Hasil dari penelitian ini adalah memperoleh model campuran klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh. Serta memperoleh nilai ekspektasi klaim agregasi yang merupakan nilai premi murni total dan VaR (*value at risk*) merupakan nilai risiko maksimum yang terjadi.

Kata Kunci : Klaim, Klaim Agregasi, Distribusi Rayleigh, Premi Murni, Risiko Maksimum.

PEMODELAN KLAIM AGREGASI DENGAN JUMLAH KLAIM BERDISTRIBUSI POISSON DAN BESAR KLAIM BERDISTRIBUSI RAYLEIGH

Oleh

Ira Syavitri

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PEMODELAN KLAIM AGREGASI DENGAN JUMLAH KLAIM BERDISTRIBUSI POISSON DAN BESAR KLAIM BERDISTRIBUSI RAYLEIGH**

Nama Mahasiswa : Ira Syavitri

No. Pokok Mahasiswa : 1417031060

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.	**Subian Saidi, S.Si., M.Si.**
NIP 19560208 198902 1 001	NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.** ....

   Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

   Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
   NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **17 Oktober 2018**

PERNYATAAN

Nama : Ira Syavitri

Nomor Induk Mahasiswa : 1417031060

Program Studi : Matematika

Jurusan : Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Pemodelan Klaim Agregasi dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh"** adalah hasil karya saya sendiri. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Oktober 2018

Penulis

METERAI TEMPEL
TGL.
5D679AFF275755120
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Ira Syavitri
NPM. 1417031060

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Ira Syavitri, dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 21 Januari 1996 dan merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Syafril dan Ibu Siti Bandiah.

Penulis menempuh pendidikan di TK Fransiskus Tanjung Karang pada tahun 2001 lalu pendidikan sekolah dasar di SD Faransiskus Tanjung Karang pada tahun 2002-2008, pendidikan menengah pertama di SMP Fransiskus Tanjung Karang pada tahun 2008-2011 dan pendidikan menengah atas di SMA Fransiskus Bandar Lampung pada tahun 2011-2014. Pada tahun 2014 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung Bandar Lampung melalui jalur SBMPTN.

Pada bulan Januari – Februari 2017 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Pajak Pratama Tanjung Karanga dan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Tanjung Harapan Kecamatan Merbau Mataram Kabupaten Lampung Selatan pada Bulan Juli–Agustus 2017.

KATA INSPIRASI

“Life is like a box of chocolates. You naver know what you’re gonna get.”

(Forrest Gump in Forrest Gump)

“Jangan biarkan kesulitan membuatmu gelisah, karena bagaimanapun juga hanya di malam yang paling gelaplah bintang-bintang tampak bersinar lebih terang.”

(Ali bin Abi Thalib)

“Apapun yang kamu inginkan, kamu akan mendapatkannya”

(Ira Syavitri)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala hidayah dan karunia-Nya.

Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Dengan kerendahan hati dan rasa syukur, kupersembahkan skripsi ini kepada :

Ayah dan Ibu yang selalu memotivasi, berkorban, membimbing, dan rela menjadi pendegar yang baik. Terimakasih atas doa dan perjuangan dari ayah dan ibu untuk kebahagiaan dan keberhasilan purtri kalian ini.

Untuk cresna, keluarga, sahabat, dan teman-teman tebaikku, terimakasih untuk semua kebahagiaan dan keceriaan yang telah kalian berikan. Terima kasih untuk selalu ada disamping penulis

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena atas limpahan rahmat, hidayah, serta kasih sayang-Nya Penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Pemodelan Klaim Agregasi dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh” ini. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dukungan berbagai pihak. Sehingga dengan segala kerendahan dan ketulusan hati Penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan, arahan serta saran dan kesediaan waktu selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan serta saran selama penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah banyak membantu dalam mengevaluasi serta mengarahkan penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Bapak, Ibu, Hani dan keluarga besar penulis yang senantiasa selalu mendoakan, memotivasi, memberi nasihat, memberi semangat dan memberikan segala hal kepada penulis dari penulis kecil hingga sekarang.
8. Kadek Chresna Kharisma yang telah menjadi seseorang yang berarti bagi penulis dari SMA sampai sekarang.
9. Teman terbaik Anin, Nanda, Nise, Ratna, Raka, Kiki, Camel yang telah bersedia menjadi teman terbaik dari awal perkuliahan hingga akhir kuliah dengan penulis yang masih memiliki banyak kekurangan.
10. Teman SMA Lena, Iis, dan Yuning yang masih tetap selalu ada untuk penulis dari SMA sampai sekarang.
11. Teman – teman satu pembimbing Arisca, Arum, Rafika, Septi, Arif dan Ardi.
12. Teman-teman seperjuangan seluruh Keluarga Matematika 2014 dan Himatika Fmipa 2014-2017 Unila terimakasih atas kebersamaannya selama ini.
13. Keluarga besar KSE Unila, terima kasih telah menjadi bagian cerita kuliah penulis dari awal kuliah sampai akhir kuliah dan mejadi tempat bertemu dengan orang-orang luar biasa.

14. Yayasan Karya Salemba Empat, terima kasih atas beasiswa (2015-2018) yang diberikan dan kegiatan-kegiatan yang membuat penulis menemukan banyak hal baru.
15. Alamamater Universitas Lampung dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu namanya.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun.

Bandar Lampung, 17 Oktober 2018
Penulis

Ira Syavitri

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR ISI ………………………………………………………….. i

DAFTAR TABEL ……………………………………………….. iv

DAFTAR GAMBAR ……………………………………………… vi

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 4

1.3 Manfaat Penelitian 4

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Asuransi 5

2.2 Prinsip Perhitungan Premi Murni 5

2.3 Risiko 6

2.4 Klaim 6

2.5 Peubah Acak 7

2.6 Fungsi Peluang 7

2.7 Fungsi Dsitribusi Kumulatif 8

2.8 Peluang Saling Bebas dan Identik 8

2.9 Peluang Bersyarat 9

2.10 Hukum Peluang Total 9

2.11 Konvolusi 9

2.12 Peubah Acak dan Fungsi Kepekatan Peluang 12
2.12.1 Peubah Acak dan Fungsi Kepekatan Peluang Diskrit ... 12
2.12.2 Peubah Acak dan Fungsi Kepekatan Peluang Kontinu . 13
2.13 Ekspektasi dan Variansi 14
2.13.1 Ekspektasi 14
2.13.2 Variansi 15
2.14 Ekspektasi dan Variansi Bersyarat 16
2.14.1 Ekspektasi Bersyarat 16
2.14.2 Variansi Bersyarat 16
2.15 Distribusi Gamma 16
2.16 Distribusi Weibull 21
2.17 Distribusi Rayleigh 24
2.18 Distribusi Poisson 28
2.19 Klaim Agregasi 28
2.20 *Value at Risk* (VaR) 34
2.21 Pendugaan Parameter 35
2.22 Karakteristik Penduga 36
2.23 Mean Square Error 36
2.24 *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) 38

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 39
3.2 Metode Penelitian 39
3.3 Diagram Alir 50

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Perangkat Lunak yang Digunakan 53

4.2 Simulasi Pemodelan Distribusi Klaim Agregasi dengan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh dan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson 53
4.3 Perhitungan Premi Murni Total dan Risiko Maksimum 58
4.4 Pendugaan Parameter Distribusi Rayleigh dengan MLE 64
4.5 Pembuktian Distribusi Rayleigh Cocok untuk Data Nilai Ekstrim 66

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

4.1 Data Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh dengan Parameter $k = 0{,}125$ Selama 1 Tahun Periode Asuransi dengan *Benefit* Rp 22.000.000,- ……………………….. 57

4.2 Hasil Nilai Ekpektasi Klaim Agregasi pada Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dengan Parameter $\lambda = 2$ dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh dengan Parameter $k = 0{,}125$ pada Data Bangkitan Tabel 4.1 menggunakan Metode Konvolusi ……………………………… 59

4.3 Hasil Nilai Ekpektasi Klaim Agregasi pada Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dengan Parameter $\lambda = 2$ dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh dengan Parameter $k = 0{,}125$ pada Data Bangkitan Tabel 4.1 menggunakan *Software* R ………………………………….. 60

4.4 Hasil Nilai Ekpektasi Klaim Agregasi pada Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dengan Parameter $\lambda = 2$ dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh dengan Parameter $k = 0{,}125$ untuk 30 Kali Ulangan menggunakan *Software* R ……………………………………..….. 61

4.5 Hasil Nilai *Confidence Interval* dan Rata-Rata Ekspektasi dari data tabel 4.2 dengan 30 Kali Ulangan menggunakan *Software* R …………………………………..…..…………..… 62

4.6 Hasil Nilai Ekspektasi dan *Value at Risk* (VaR) 95% pada Klaim

Agregasi dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dan Besar Klaim Rayleigh dengan Parameter $k = 0{,}125$ pada Data Bangkitan Tabel Berdistribusi Rayleigh menggunakan *Software* R 63
4.7 Hasil Perhitungan Premi Murni Total dan Risiko Maksimum pada Klaim Agregasi dengan Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh menggunakan *Software* R dengan *Benefit* Rp 22.000.000 63
4.8 MSE Distribusi Gamma dan Distribusi Rayleigh 66

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 1. Jumlah Peubah Acak $S = X + Y$ dengan Ruang Sampel …….. 10

Gambar 2. Diagram Alir ……………………..……………………….... 51

Gambar 3. *Plot* CDF Data Klaim Agregasi Jumlah Klaim Berdistribusi Poisson dan Besar Klaim Berdistribusi Rayleigh ……………….. 55

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari tentunya seseorang akan mengalami suatu risiko dalam kehidupannya. Risiko sendiri merupakan bentuk ketidakpastian tentang suatu keadaan yang akan terjadi pada masa yang akan datang dengan keputusan yang diambil berdasarkan pertimbangan pada saat ini. Risiko yang akan terjadi biasanya seperti kecelakaan, kematian, sakit dll. Namun seseorang tidak dapat memprediksi kapan risiko tersebut dapat terjadi. Sehingga diperlukan cara untuk mengatasi risiko tersebut apabila terjadi dimasa yang akan datang. Salah satu cara untuk mengatasi risiko tersebut adalah dengan menggunakan jasa asuransi atau perusahaan asuransi. Saat ini perusahaan asuransi sudah banyak di Indonesia dengan berbagai produk asuransi yang ditawarkan. Perusahaan asuransi disebut sebagai pihak penanggung risiko seseorang yang mengikuti asuransi. Dalam asuransi terdapat suatu perjanjian kontrak antara tertanggung dan penanggung yang disebut polis. Perjanjian tersebut mengenai pihak penanggung yang bersedia menanggung sejumlah risiko yang mungkin timbul dimasa yang akan datang dengan imbalan pembayaran tertentu dari tertanggung. Pembayaran yang dilakukan oleh tertanggung kepada penanggung disebut premi.

Asuransi merupakan salah satu bentuk pengendalian risiko dari tertanggung kepada penanggung. Setiap produk yang ditawarkan perusahaan asuransi tentu saja memiliki nilai klaim yang berbeda-beda yang merupakan risiko bagi perusahaan asuransi tersebut. Sehingga perusahaan asuransi harus memperhatikan dengan sungguh-sungguh pengelolaan risiko yang mungkin terjadi selama periode asuransi. Karena perusahaan asuransi sebagai penanggung risiko terjadinya suatu kerugian tentunya harus dapat menanggung kemungkinan-kemungkinan terjadinya klaim dari tertanggung kepada penanggung. Perusahaan asuransi harus bisa mengidentifikasi suatu risiko dengan mempelajari karakteristik dari risiko tersebut. Setelah langkah mengidentifikasi risiko, maka penanggung dapat mengetahui karakter risiko dimana karakter risiko inilah yang dapat dipelajari dalam suatu model distribusi klaim. Distribusi klaim digambarkan dalam suatu distribusi densitas baik sebagai fungsi densitas probabilitas maupun fungsi densitas kumulatif. Dari fungsi-fungsi ini, penanggung dapat menetapkan harga penanggungan risiko dari tertanggung. Sehingga dari harga penanggung ini dapat menghidari penanggung dari suatu kerugian.

Pada saat terjadinya risiko yang dialami tertanggung, maka perusahaan asuransi akan memberikan penggantian dari kerugian yang terjadi berdasarkan kesepakatan yang telah dilakukan diawal perjanjian. Sehingga terjadi nya risiko dari tertanggung akan memunculkan klaim. Klaim merupakan ganti rugi atas suatu risiko. Risiko yang terjadi secara individu disebut klaim individu, sedangkan kumpulan dari klaim individu disebut klaim agregasi. Karena klaim agregasi merupakan kumpulan klaim individu, maka dapat diketahui pola klaim agregasi dari perilaku jumlah dan besar klaim individu. Sehingga model klaim agregasi diperoleh dari model distribusi jumlah dan besar klaim individu dari distribusi masing-masing klaim. Dimana karakteristik untuk klaim agregasi yang digunakan adalah ukuran rata-rata dan varian distribusi klaim tersebut. Dalam asuransi ukuran rata-rata digunakan untuk perhitungan premi serta dengan nilai varian dapat diperoleh nilai risiko atau *value at risk* (VaR) yang merupakan metode yang sering kali digunakan dalam perhitungan risiko.

Untuk menentukan model klaim agregasi diperoleh dari distribusi jumlah dan besar klaim. Dimana besar klaim biasanya berdistribusi eksponensial atau distribusi lain yang masih keluarga dengan distribusi eksponensial seperti distribusi Normal, Poisson, Gamma, Binomial dan Invers Gauss. Namun dalam sistem asuransi terkadang dapat memunculkan suatu fenomena yang ekstrim. Nilai-nilai ekstrim ini juga merupakan variabel random yang terdistribusi secara identik terbatas yang dinyatakan dalam suatu distribusi nilai ekstrim. Beberapa keluarga eksponensial juga masuk ke dalam distribusi nilai ektrim. Distribusi nilai ektrim merupakan distribusi dari suatu variabel random yang memiliki batasan nilai minimum dan maksimum. Sehingga distribusi nilai ekstrim banyak digunakan sebagai distribusi besar klaim dikarenakan besar klaim biasanya memiliki ukuran yang cukup besar atau ekstrim. Beberapa jenis distribusi nilai ekstrim yaitu distribusi Cauchy, Beta, Rayleigh dan sebagainya. Kemudian untuk membuktikan bahwa distribusi Rayleigh cocok untuk nilai ekstrim. Maka akan dilakukan perbandingan MSE dari distribusi Rayleigh dan distribusi Gamma. MSE atau *mean square error* merupakan suatu ukuran yang menunjukkan tingkat keakuratan kesalahan suatu data.

Oleh karena itu, pada penelitian ini peneliti akan melakukan pembentukan model klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah

1. Untuk menentukan model klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh.
2. Untuk menentukan premi murni total dan risiko maksimum dari klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh dengan simulasi data.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dapat mengetahui pembentukan model klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh, dapat mengetahui premi murni total dan risiko maksimum dari klaim agregasi dengan jumlah klaim berdistribusi Poisson dan besar klaim berdistribusi Rayleigh dengan simulasi data.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada penelitian ini terdapat beberapa teori dasar atau definisi - definisi yang akan digunakan dalam penelitian ini, yaitu sebagai berikut :

2.1 Sistem Asuransi

Menurut Bowers et al. dalam sistem asuransi menyatakan bahwa perusahaan asuransi merupakan pihak yang menanggung risiko kerugian dari tertanggung jika kerugianterjadi. Penanggungan kerugian dari tertanggung ke penanggung mewajibkan tertanggung untuk membayar sejumlah uang yang disebut dengan premi. Dengan premi inilah tertanggung akan menerima polis yaitu perjanjian tertulis yang dapat diajukan klaimnya apabila terjadi kerugian. (Bowers et al, 1997).

2.2 Prinsip Perhitungan Premi Murni

Premi asuransi adalah sejumlah uang yang dibayarkan oleh tertanggung kepada perusahaan asuransi sebagai kewajiban atas keikutsertaannya dalam asuransi. Pada prinsipnya premi asuransi merupakan nilai sekarang dari manfaat (*benefit*) yang ingin didapatkan oleh tertanggung pada jangka waktu yang telah disepakati sebelumnya.

Dalam asuransi umum terdapat jenis premi yaitu premi murni. Dimana premi murni merupakan premi yang dibayarkan sebelum ditambahkan faktor loading. Sehingga pada prinsipnya dapat diperoleh perhitungan premi murni dari nilai ekspektasi risiko (Young, 2004).

2.3 Risiko

Risiko adalah bentuk ketidakpastian tentang suatu keadaan yang akan terjadi nantinya (masa depan) dengan keputusan yang diambil berdasarkan pertimbangan (Fahmi, 2010).

Sehingga dapat dilakukan pengukuran risiko. Salah satu metode untuk mengukur risiko adalah *value at risk* (VaR). VaR merupakan salah satu metode untuk menilai risiko menggunakan teknik statistik standar devisiasi yang secara rutin digunakan di bidang lainnya. (Effendie, 2016).

2.4 Klaim

Klaim dalam pengertian asuransi adalah tuntutan atau pengajuan permintaan pembayaran ganti rugi dari pihak tertanggung kepada pihak penanggung yang timbul dari hubungan perjanjian asuransi antara tertanggung dan penanggung. Tuntutan atau pegajuan ini timbul karena adanya kejadian atau kecelakaan yang menimbulkan kerugian tertanggung atas barang atau objek asuransi karena risiko yang dijamin dalam polis asuransi (Martono dan Tjahjono, 2011).

2.5 Peubah Acak

Sebuah peubah acak X adalah fungsi yang didefinisikan dalam ruang sampel (S). Dimana S merupakan bilangan real $X(e) = x$ dengan setiap kemungkinan hasil e dalam S.

Dalam statistika terdapat dua macam peubah acak yaitu peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu (Bain dan Engelhard, 1992).

2.6 Fungsi Peluang

Diberikan suatu percobaan, S menunjukkan ruang sampel dan $A_1, A_1, A_1, \ldots\ldots\ldots$ yang mungkin terjadi. Fungsi himpunan yang mengaitkan nilai sebenarnya dengan setiap kejadian A disebut fungsi probabilitas atau fungsi peluang dan $P(A)$ disebut probabilitas (peluang) dari A, jika memenuhi:

1. $0 \leq P(A)$ untuk setiap A
2. $P(S) = 1$
3. $\boldsymbol{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty} A_i$

Jika $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots$ kejadian khusus yang saling berpasangan (Bain dan Engelhard, 1992).

2.7 Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi disribusi kumulatif (*cumulative distribution function*) dari sebuah peubah acak diskrit dan kontinu X didefinisikan sebagai berikut:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum\limits_{\forall X \leq x} p(x) & \text{, jika } X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt & \text{, jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

dengan $F(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif (Bain dan Engelhard, 1992).

2.8 Peluang Saling Bebas dan Identik

Dua kejadian A dan B dikatakan kejadian saling bebas jika

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{2.8.1}$$

Jika A dan B adalah kejadian seperti ($P(A) > 0$ dan $P(B) > 0$, maka A dan B saling bebas jika dan hanya jika berlaku seperti berikut:

$$P(A|B) = P(A) \tag{2.8.2}$$

$$P(B|A) = P(B) \tag{2.8.3}$$

Sebuah kejadian k dengan $A_1, A_2, \dots, A_k$ dikatakan saling bebas jika untuk setiap $j = 2,3, \dots \dots, k$ dan setiap subkumpulan dari indeks berbeda $i_1, i_2, \dots, i_j$ maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots \dots P\left(A_{i_j}\right) \tag{2.8.4}$$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.9 Peluang Bersyarat

Peluang bersyarat dari sebuah kejadian A dapat diperoleh kejadian B yang memberikan definisi sebagai berikut:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.9.1)$$

dengan$P(B) \neq 0$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.10 Hukum Peluang Total

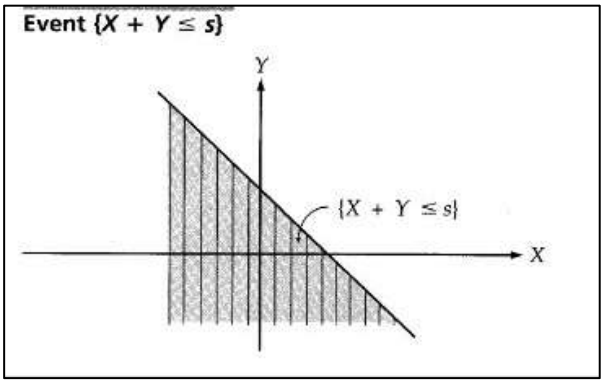
Peluang total, jika B_1 , B_2 , ……, B_k adalah sebuah kumpulan dari peristiwa-peristiwa yang saling lepas dan sempurna maka untuk sembarang peristiwa A sebagai berikut:

$$\underline{P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.11 Konvolusi

Dalam model risiko individu, perusahaan asuransi memodelkan klaim sebagai jumlah klaim dari beberapa individu penanggung. Klaim individu diasumsikan saling bebas. Dalam bab dua membahas dua metode untuk menentukan distribusi jumlah peubah acak yang saling bebas. Pertama, memperhitungkan dua jumlah peubah acak $S = X + Y$ dengan ruang sampel yang ditunjukkan pada Gambar 1 sebagai berikut:



Gambar 1. Jumlah Peubah Acak $S = X + Y$ dengan Ruang Sampel

Garis $S = X + Y$ dan daerah dibawah garis merupakan $X + Y \leq S$ maka

$$F_s\,(S) \;= Pr(S \leq s)$$

$$= Pr(X + Y \leq s)$$

untuk X dan Y yang diskrit dan non-negatif menurut hukum peluang total adalah

$$F_s\,(S) \;= Pr(X + Y \leq s)$$

$$= \sum_{Y \leq S} Pr(X + Y \leq s | Y = y)$$

$$= \sum_{Y \leq S} Pr(X \leq s - Y | Y = y)$$

Karena X dan Y saling bebas, maka dapat ditulis

$$F_s\,(S) \;= \sum_{Y \leq S} P_x(s - y) p_y(y) \tag{2.11.1}$$

Sehingga fungsi kepekatan peluang yang berkaitan dengan fungsi distribusi adalah

$$f_s\,(S) \;= \frac{d}{ds}\sum P_x(s-y)f_y(y)$$

$$= \sum \frac{d}{ds} P_x(s-y)f_y(y)$$

$$= \sum_{Y \leq S} p_x(s-y)p_y(y) \qquad (2.11.2)$$

Persamaan (2.11.1) tersebut merupakan konvolusi dari dua peubah acak diskrit. Untuk X dan Y peubah acak kontinu dan non-negatif maka fungsi distribusi kumulatif dari S analog dengan peubah acak diskrit, tetapi $\sum$ diganti dengan tanda $\int$, sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$F_s\,(S) \;= \int_0^S Pr(X+Y \leq S|Y=y)$$

$$= \int_0^S F_x(s-y)f_y(y)\,dy \qquad (2.11.3)$$

$$f_s\,(S) = \int_0^S f_x(s-y)f_y(y)\,dy \qquad (2.11.4)$$

Persamaan diatas (2.11.3) merupakan konvolusi dua peubah kontinu.

Dalam peluang persamaan (2.11.1) dan (2.11.3) dikatakan konvolusi dari pasangan fungsi distribusi kumulatif $F_X\,(x)$ dan $F_Y\,(y)$ dan dinotasikan sebagai berikut:

$$F_X\,(x)*F_Y\,(y) \tag{2.11.5}$$

(Bowers et al, 1997).

2.12 Peubah Acak, Fungsi Kepekatan Peluang

2.12.1 Peubah Acak, Fungsi Kepekatan Peluang dan Distribusi Diskrit

Jika himpunan semua kemungkinan nilai peubah acak X adalah himpunan yang dapat dihitung $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ atau $x_1, x_2, \ldots.$. maka X adalah peubah acak diskrit. Fungsi dari :

$$f(x) = P[X = x\,] \qquad\qquad x = x_1, x_2, \ldots\ldots \tag{2.12.1}$$

yang memberikan peluang setiap nilai x akan disebut fungsi kepekatan peluang (fkp) diskrit. Sebuah fungsi adalah fkp diskrit jika dan hanya jika memenuhi kedua sifat berikut yang tak terhingga dari himpunan $x_1, x_2, \ldots\ldots,$:

1. $f(x_i) \geq 0$ untuk semua x_i
2. $\sum_{all\;x_i} f(x_i) = 1$ (2.12.2)

Cara lain untuk menentukan distribusi peluang dengan peluang terhadap interval $(-\infty\,, x]$untuk semua x real. Peluang yang diberikan peluang x real. Peluang yang diberikan pada kejadian tersebut diberikan oleh sebuah fungsi yang disebut fungsi distribusi kumulatif. Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak X didefinisikan untuk setiap x real sebagai berikut:

$$F(x) = P[X\ \leq x] \tag{2.12.3}$$

Misalkan X peubah acak diskrit dengan pdf $f(x)$ dan CDF $F(x)$. Jika nilai X yang mungkin adalah indeks yang semakin meningkat, $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots$, maka $f(x_i) = F(x_i)$, dan untuk beberapa $i > 1$,

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Selain itu, jika , $x < x_1$ maka $F(x) = 0$ dan untuk beberapa urutan real x

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \qquad (2.12.4)$$

Dimana penjumlahan diambil semua indeks i seperti itu maka $x_i \leq x$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.12.2 Peubah Acak, Fungsi Kepekatan Peluang, dan Distribusi Kontinu

Sebuah peubah acak X disebut peubah acak kontinu jika terdapat fungsi $f(x)$ yang disebut fungsi kepekatan peluang (fkp) untuk X, maka fungsi distribusi kumulatif bisa menyatakan sebagai berikut:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \qquad (2.12.5)$$

Sebuah fungsi $f(x)$ adalah fkp dari beberapa peubah acak kontinu X jika dan hanya jika memenuhi sifat :

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua x
2. $\int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = 1$

Berdasarkan persamaan 2.12.5 dapat menurunkan fungsi distribusi kumulatif untuk memperoleh fkp yang mngikuti teorema Fundamental Kalkulus. Sehingga dapat diperoleh fkp dari turunan fungsi distribusi kumulatif dengan rumus sebagai berikut:

$$f(x) = F'(x)$$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.13 Ekspektasi dan Variansi

2.13.1 Ekspektasi

Jika x adalah peubah acak diskrit dengan fkp (x) , maka nilai ekspektasi dari X menyatakan sebagai berikut :

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) \qquad (2.13.1)$$

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fkp (x) , maka nilai ekpektasi dari X adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad (2.13.2)$$

Jika fungsi integral (2.13.2) benar-benar konvergen. Jika tidak, kita katakan $E(X)$ tidak ada (Bain dan Engelhard, 1992).

Sifat-sifat ekspektasi :

1. Jika k adalah konstanta, maka $E(k) = k$

2. Jika k adalah konstanta dan v adalah suatu fungsi , maka $E(kv) = k\ E(v)$

3. Jika $k\ , k_2\ , \ldots\ldots, k_m$ adalah konstanta dan $v_1\ , v_2\ , \ldots\ldots, v_m$adalah fungsi, maka$E(k_1v_1 +\ k_2v_2 + \ldots + k_mv_m) =$

   $k_1E(v_1) +\ k_2E(v_2) + \ldots + k_mE(v_m)$

$E(X)$ disebut juga sebagai nilai mean/rata-rata μ dari peubah acak X (Hogg dan Craig, 1995).

2.13.2 Variansi

Varian dari perubah acak X diberikan sebagai berikut:

$$Var(X) = E[(X - \mu)]^2$$

$$= E(X^2 - 2\mu E(X) + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + \big(E(X)\big)^2$$

$$= E(X^2) - 2\big(E(X)\big)^2 + \big(E(X)\big)^2$$

$$= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \qquad (2.13.3)$$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.14 Ekspektasi dan Varian Bersyarat

2.14.1 Ekspektasi Bersyarat

Jika X dan Y adalah distribusi peubah acak bersama, maka ekspektasi bersyarat dari X diberikan $X = x$ diberikan sebagai berikut

$$E(Y|x) = \sum_y y\, f(y|x) \qquad \text{jika } X \text{ dan } Y \text{ adalah diskrit} \qquad (2.14.1)$$

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f\, (y|x)\, dy \qquad \text{jika } X \text{dan } Y \text{ adalah kontinu} \qquad (2.14.2)$$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.14.2 Varian Bersyarat

Varian bersyarat dari Y diberikan $X = x$ adalah sebagai berikut

$$Var\,(Y|x) = E(Y^2|x) - [E(Y|x)]^2 \qquad (2.14.3)$$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.15 Distribusi Gamma

Misalkan X suatu peubah acak kontinu berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β, dengan bentuk fkp nya sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , dengan\ x > 0 \\ 0 & , selainnya \end{cases} \qquad (2.15.1)$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Pentingnya distribusi Gamma dapat diketahui pada kenyataan bahwa distribusi Gamma merupakan satu keluarga distribusi yang distribusi lainnya merupakan hal khusus (Walpole, 1995).

Beberapa sifat fungsi gamma sebagai berikut:

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$
2. Bila α bilangan bulat positif maka $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$
3. $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
5. $\Gamma(1) = 1$

Bila X berdistribusi Gamma $X \sim G(x|\alpha, \beta, 0)$ maka ekspektasi dan varian distribusi Gamma adalah

$$\mu = E(X) = \alpha\beta \text{ dan } \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

Bukti:

$$E\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha\, e^{\left(\frac{-x}{\beta}\right)}\,dx$$

misal:

$$y = \frac{x}{\beta}$$

maka

$\beta y = x$

selanjutnya

$\beta\, dy = dx$

sehingga

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}(\beta y)^{\alpha}\, e^{-y}\beta dy$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty} y^{\alpha}\, e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha + 1)$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\alpha\, \Gamma(\alpha)$$

$$= \alpha\beta \qquad (2.15.2)$$

$$E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha+1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

misal:

$$y = \frac{x}{\beta}$$

maka

$$\beta y = x$$

selanjutnya

$$\beta\, dy = dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}(\beta y)^{\alpha+1}\, e^{-y}\beta\, dy$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}(y)^{\alpha+1}\, e^{-y}dy$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2)$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1+1)$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}(\alpha+1)\,\alpha\,\Gamma(\alpha)$$

$$= \alpha(\alpha+1)\beta^2 \qquad (2.15.3)$$

Dari persamaan (2.15.2) dan (2.15.3) maka akan diperoleh nilai variannya sebagai berikut:

$$Var\,(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$= \alpha(\alpha + 1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2 \qquad (2.15.4)$$

Dari $E(X) = \alpha\beta$, $E(X^2) = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$ dan $Var(X) = \alpha\beta^2$ dapat diperoleh suatu nilai α dan β sebagai berikut:

Diketahui bahwa $E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ karena $E(X) = \overline{X} = \alpha\beta$, maka

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \alpha\beta$$

$$\alpha = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{\beta}$$

$$\alpha = \frac{\overline{X}}{\beta} \qquad (2.15.5)$$

untuk $E(X^2) = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$, karena $E(X^2) = \frac{\sum x_i^2}{n}$ maka:

$$\frac{\sum x_i^2}{n} = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$$

$$\frac{\sum x_i^2}{n} = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$$

$$= \left(\frac{\overline{X}}{\beta}\right)^2 \beta^2 + \left(\frac{\overline{X}}{\beta}\right)\beta^2$$

$$= \frac{\overline{X}^2}{\beta^2}\beta^2 + \overline{X}\beta$$

$$\overline{X}\beta = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{X}^2$$

$$\beta = \frac{\frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{X}^2}{\overline{X}}$$

$$\beta = \frac{\frac{\sum(x_i - \overline{X})^2}{n}}{\overline{X}}$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{\overline{X}} \qquad (2.15.6)$$

2.16 Distribusi Weibull

Distribusi weibull merupakan distribusi peluang kontinu yang di perkenalkan oleh Waloddi Weibull dimana distribusi Weibull menjadi salah satu distribusi waktu hidup yang paling baik dalam teknik keandalan dan dibidang lainnya.

Peubah acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi Weibull dengan parameter $\beta > 0$ dan $\alpha > 0$ jika memiliki fkp sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} f(x;\ \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} & , x > 0 \\ 0 & , selainnya \end{cases} \qquad (2.16.1)$$

Parameter β dikatakan parameter bentuk dan α parameter skala . Satu keuntungan dari distribusi Weibull adalah fungsi distribusi kumulatif dapat diperoleh secara eksplisit dengan mengintegralkan fkp berdasarkan persamaan (2.16.1) dengan hasil sebagai berikut:

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - \; e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad ,x > 0$$

Pada kasus khusus saat $\beta = 2$ dikatakan distribusi Rayleigh.

Kemudian ekspektasi dari $X \sim WEI(\alpha,\beta)$ diperoleh sebagai berikut:

$$E(X) \;\; = \; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) \; dx$$

$$= \; \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} dx$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \, dx$$

misal:

$$y = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}$$

maka

$$x = \alpha y^{\frac{1}{\beta}}$$

selanjutnya

$$dx = \frac{1}{\beta} \; y^{\frac{1}{\beta}-1} \alpha \, dy$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta} \; e^{-y} \frac{1}{\beta} \; y^{\frac{1}{\beta}-1} \alpha \, dy$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} \frac{1}{\beta} \alpha^{\beta+1} \int_{-\infty}^{\infty} y^{1} e^{-y} \;\; y^{\frac{1}{\beta}-1} \, dy$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} \ y^{\frac{1}{\beta}+1-1} \, dy$$

$$= \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \tag{2.16.2}$$

$$E\ (X^2) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f(x) \ dx$$

$$= \ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, \frac{\beta}{\alpha^\beta} \, x^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\beta+1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \, dx$$

misal:

$$y = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta$$

maka

$$x = \alpha y^{\frac{1}{\beta}}$$

selanjutnya

$$dx = \frac{1}{\beta} \ y^{\frac{1}{\beta}-1} \alpha \, dy$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta+1} \, e^{-y} \, \frac{1}{\beta} \ y^{\frac{1}{\beta}-1} \alpha \, dy$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^\beta} \frac{1}{\beta} \alpha^{\beta+1+1} \int_{-\infty}^{\infty} y^{1+\frac{1}{\beta}} e^{-y} \ y^{\frac{1}{\beta}-1} \, dy$$

$$= \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y}\ y^{\frac{2}{\beta}}\, dy$$

$$= \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y}\ y^{\frac{2}{\beta}+1-1}\, dy$$

$$= \alpha^2 \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) \qquad (2.16.3)$$

kemudian

$$Var\ (X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \alpha^2 \Gamma(\frac{2}{\beta} + 1) - \left(\alpha\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)\right)^2$$

$$= \alpha^2 \Gamma(\frac{2}{\beta} + 1) - \alpha^2 \Gamma^2(\frac{1}{\beta} + 1)$$

$$= \alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right] \qquad (2.16.4)$$

(Bain dan Engelhard, 1992).

2.17 Distribusi Rayleigh

Distribusi Rayleigh merupakan salah satu distribusi peluang kontinu yang biasanya digunakan dalam pemodelan data kelangsungan hidup. Distribusi Rayleigh diperkenalkan oleh Lord Rayleigh pada tahun 1880. Distribusi ini juga merupakan kasus khusus dari distribusi Weibull ketika $\beta = 2$ dan $\alpha = \sqrt{\frac{2}{k}}$ dalam buku Bain (1992). Distribusi ini penting dalam statistika dan diterapkan dibeberapa bidang seperti kesehatan, pertanian, biologi dan ilmu-ilmu lainnya. Afify (2011) memperkenalkan distribusi Rayleigh dengan satu parameter sehingga peubah acak X dikatakan mempunyai distribusi Rayleigh dengan k adalah parameter skala (tunggal) maka fkp nya :

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}, & x \geq 0, k > 0 \\ 0, & selainnya \end{cases} \quad (2.17.1)$$

dengan k adalah parameter skala.

Berdasarkan definisi 2.11.2 akan ditunjukkan fkp distribusi Rayleigh yaitu

1. $f(x,k) \geq 0$, untuk setiap x ∈ R
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\, dx = 1$

Akan ditunjukkan apakah fkp pada persamaan (2.17.1) memenuhi sifat distribusi kontinu yaitu:

$$\int_0^\infty f(x,k)\, dx = 1$$

sehingga

$$\int_0^\infty kxe^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}\, dx = 1$$

$$k\int_0^\infty xe^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}\, dx = 1$$

misalkan

$$u = \frac{kx^2}{2}$$

$$du = kx\,dx$$

$$dx = \frac{1}{kx}\,du$$

maka

$$k\int_0^\infty xe^{(-u)}\frac{1}{kx}\,du = 1$$

$$k\,.\frac{1}{kx}x\int_0^\infty e^{(-u)}\;du = 1$$

$$\int_0^\infty e^{(-u)}\;du = 1$$

$$-e^{(-u)}\Big|_0^\infty = 1$$

$$0 - \left(-e^{(0)}\right) = 1$$

$$1 = 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Rayleigh berdasarkan persamaan (2.17.1) sebagai berikut:

$$F(x) = \int_0^x ft\,dt$$

$$= \int_{0}^{x} kte^{\left(\frac{-kt^2}{2}\right)}\, dt$$

missal:

$$u = \frac{kt^2}{2}$$

$$du = kt\, dt$$

maka

$$\frac{du}{kt} = dt$$

$$= \int_{0}^{x} kte^{-u} \frac{du}{kt}$$

$$= \int_{0}^{x} e^{-u}\, du$$

$$= -e^{\left(\frac{-kt^2}{2}\right)} \Big|_{0}^{x}$$

$$= -e^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)} - e^{\left(\frac{-k0^2}{2}\right)}$$

$$= -e^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)} + 1$$

$$= 1 - e^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)} \qquad (2.17.2)$$

(Afify, 2011).

2.18 Distribusi Poisson

Sebaran peluang bagi peubah acak Poisson X, yang menyatakan banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu atau daerah tertentu, adalah

$$P(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!};\ x = 0, 1, 2, ... \tag{2.18.1}$$

keterangan :

1. x = banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu atau daerah tertentu
2. λ = rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau dalam daerah tertentu
3. e = 2,71828...

(Walpole, 1995).

2.19 Klaim Agregasi

Pada model risiko individu atau klaim individu jika unit individu $ke-i,\ i = 1,2,3,\ldots\ldots,N$ dipandang sebagai unit besar klaim individu $ke-i$ dan dinotasikan dengan X_i maka:

$$X = \{X_i\}_{i=1,2,3,\ldots\ldots,N} \tag{2.19.1}$$

X_i yang dapat diasumsikan berdistribusi kontinu merupakan peubah acak berdistribusi identik saling bebas.

Pada model risiko kolektif atau klaim agregasi diasumsikan mengikuti suatu distribusi campuran dengan klaim agregasi yang merupakan jumlahan dari N klaim individu yaitu:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{2.19.2}$$

dengan N peubah acak yang menyatakan frekuensi klaim dan $X_1, X_2, \dots, X_N$ merupakan peubah acak yang menyatakan besar klaim individu yang dapat berupa distribusi diskrit yang identik dan saling bebas (Bowers et al, 1997).

Berdasarkan persamaan (2.19.2) dapat ditentukan fungsi distribusi kumulatif dari klaim agregasi sebagai berikut:

$$F_s(x) = P(S \leq x)$$

$$= P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N = x)$$

$$= P\big((\{S = x\} \cap \{N = n_1\}) \cup \dots \dots \cup (\{S = x\} \cap \{N = n_i\})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{x} P(\{S = x\} \cap \{N = n_i\})$$

Berdasarkan hukum peluang total maka dapat berlaku nilai fungsi peluang sebagai berikut:

$$= \sum_{i=1}^{x} P(\{S = x\} | N = n_i)\, p(N = n_i)$$

karena $X_1, X_2, \dots, X_N$ saling bebas maka berlaku:

$$P(\{S = x\}|N = n_i) = P(S = x)$$

sehingga untuk suatu n klaim berlaku:

$$= \sum_{n=0}^{x} P(S = x)\, p(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{x} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N = x)\, p(N = n)$$

dalam istilah konvolusi dapat berlaku:

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N = x) = P * P * P * \ldots * P(x)$$

$$= P^{*n}(x)$$

sehingga

$$= \sum_{n=0}^{x} P * P * P * \ldots * P(x)\, p(N = n)$$

$$F_s(x) = \sum_{n=0}^{x} P^{*n}(x)\, p(N = n) \qquad (2.19.3)$$

dengan

$$P^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

dan berdasarkan persamaa (2.11.1) $P^{*n}(x)$ merupakan “n kali lipat konvolusi” cdf dari x dengan rumus sebagai berikut:

$$P^{*n}(x) = \sum_{y \leq x} p(y) P^{*(n-1)}(x-y)$$

dengan batas $y \leq x$.

Dengan cara yang sama dapat ditentukan fkp klaim agregasi yaitu

$$f_s(x) = P(\sum_{i=1}^{N} X_i)$$

$$= P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N = x)$$

$$= P\big((\{S = x\} \cap \{N = n_1\}) \cup \ldots \ldots \cup (\{S = x\} \cap \{N = n_i\})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} p(\{S = x\} \cap \{N = n_i\})$$

Berdasarkan hukum peluang total maka dapat berlaku fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$= \sum_{i=1}^{\infty} p(\{S = x\} | N = n_i)\, p(N = n_i)$$

karena $X_1, X_2, \ldots, X_N$ saling bebas maka berlaku:

$$P(\{S = x\} | N = n_i) = P(S = x)$$

sehingga untuk suatu n klaim berlaku:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(S = x)\, p(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(X_1 + X_2 + \cdots + X_N = x\ )\, p(N = n)$$

dalam istilah konvolusi dapat berlaku:

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_N = x\ ) = P * P * P * \ldots * P(x\ )$$

$$= P^{*n}(x\ )$$

sehingga

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p * p * p * \ldots * p(x)\, p(N = n)$$

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x\ )\, p(N = n) \qquad (2.19.4)$$

dengan

$$p^{*0}(x\ ) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 1 & , x \neq 0 \end{cases}$$

dan berdasarkan persamaa (2.11.20) $p^{*n}(x\ )$ merupakan “n kali lipat konvolusi” cdf dari x dengan rumus sebagai berikut:

$$p^{P*n}(x\ ) = \sum_{y \leq x} p(y) p^{*(n-1)}(x - y)$$

dengan batas $y \leq x$.

Sehingga dari fkp dan fungsi kumulatif distribusi klaim agregasi dapat ditentukan nilai ekspektasi dan varian dari klaim agregasi sebagai berikut:

$$E\ (S) = E\ [E\ (S = x|N = n)]$$

$$= \sum_n n\ E\ (S = x|N = n)\ p(N = n)$$

$$= \sum_n \sum_x n\ p\ (S = x|N = n)\ p(N = n)$$

$$= \sum_n \sum_x n\ x\ \frac{p(S = x\ , N = n)}{p(N = n)}\ p(N = n)$$

$$= \sum_n \sum_x n\ x\ p(S = x)\ p(N = n)$$

$$= \sum_n n\ p(N = n) \sum_x x\ p(S = x)$$

$$= E(N)\ E(X) \tag{2.19.5}$$

$$E(S^2) = E\ [E\ (S^2|N = n)]$$

$$= E\left[E\left(\left(\sum_x X_i\right)^2 \middle| N = n\right)\right]$$

$$= \sum_n \left[E\left(\left(\sum_x X_i\right)^2 \middle| N = n\right)\right] p(N = n)$$

$$= \sum_n \left[\sum_x E\left({X_i}^2\right) + \sum_x \sum_x E(X_i)E(X_i)\right] p(N = n)$$

$$= \sum_n \left[n\ E\left({X_i}^2\right)\ +\ (n^2 - n)\left(E(X_i)\right)^2\right] p(N = n)$$

$$= \sum_n \left[n\, E\left({X_i}^2\right) + n^2\left(E(X_i)\right)^2 - n\left(E(X_i)\right)^2\right] p(N=n)$$

$$= \sum_n \left(n\, V(X) + n^2\left(E(X)\right)^2\right) p(N=n) \tag{2.19.6}$$

$$Var\,(S) = E\,[E\,(S^2|N=n)] - \left(E(S)\right)^2$$

$$= \sum_n \left(n\, V(X) + n^2\left(E(X)\right)^2\right) p(N=n) - \left(E(S)\right)^2$$

$$= \sum_n n\, P(N=n)\, V(X) + \sum_n n^2 p(N=n)\left(E(X)\right)^2 - \left(E(S)\right)^2$$

$$= V(X) \sum_n n\, P(N=n) + \left(E(X)\right)^2 \sum_n n^2 p(N=n) - \left(E(S)\right)^2$$

$$= E(N)V(X) + E(N^2)\left(E(X)\right)^2 - \left(E(N)\right)^2\left(E(X)\right)^2$$

$$= E(N)V(X) + \left(E(X)\right)^2\left(E(N^2) - \left(E(N)\right)^2\right)$$

$$= E(N)V(X) + \left(E(X)\right)^2 V(N) \tag{2.19.7}$$

(Getut, 2011).

2.20 *Value at Risk* (VaR)

Value at Risk (VaR) menjadi standar ukuran risiko yang digunakan untuk mengevaluasi paparan risiko. Pada kasus umum, VaR adalah sejumlah modal yang dibutuhkan untuk memastikan, dengan tigkat derajat kepastian yang perusahaan tidak menjadi bangkrut secara teknis.

X menyatakan peubah acak kerugian. VaR dari X pada level $100p\%$ dinotasikan dengan $VaR_p\,(X)$ atau π_p adalah persentil $100p$ dari distribusi X. (Effendie, 2016). Sehingga perhitungan VaR dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$VaR_p\,(X) = p \times \sigma \times B \tag{2.20.1}$$

dengan $p = 1 - \propto$

Keterangan =

$\propto$ = Tingkat kepercayaan

σ = standard devisiasi

B = nilai *benefit*

2.21 Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter adalah bidang dari statistika yang berhubungan dengan menduga nilai-nilai parameter berdasarkan data yang diukur atau data empiris yang memiliki komponen acak. Pendugaan parameter adalah suatu metode untuk menduga nilai parameter populasi dengan menggunakan nilai-nilai dari sampel.

Parameter adalah suatu konstanta yang menggambarkan (merupakan karakteristik) populasi. Sebuah keluarga parametric fungsi densitas yang diindeks oleh suatu kuantitas yang disebut parameter.

Penduga (estimator) adalah suatu aturan yang dinyatakan dalam suatu rumus yang ‘digunakan untuk menghitung nilai dari pendugaan yang didasarkan atas pengukuran di dalam sampel (Mann et al, 1974).

2.22 Karakteristik Penduga

Beberapa sifat penduga yang baik adalah tak bias. Sebuah penduga $(\hat{\theta})$ dikatakan penduga tak bias dari θ jika

$$E(\hat{\theta}) = \theta \qquad (2.22.1)$$

untuk semua $\theta \epsilon \Omega$. jika tidak, dapat dikatakan bahwa $(\hat{\theta})$ adalah penduga bias dari θ (Bain dan Engelhard, 1992).

2.23 *Mean Square Error* (MSE)

Jika $(\hat{\theta})$ adalah sebuah penduga dari θ, maka bias yang diperoleh sebagai berikut:

$$Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

dan *Mean Square Error* (MSE) dari $\hat{\theta}$ diberikan sebagai berikut:

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + \left[Bias(\hat{\theta})^2\right]$$

Bukti =

$$MSE\ (\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right) + 2\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2\right] + E\left[2\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)\right]$$

$$+ E\left[\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right]$$

$$= V(\hat{\theta}) + 2E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right) Bias(\hat{\theta})\right] + \left[Bias(\hat{\theta})\right]^2$$

$$= V(\hat{\theta}) + 2Bias(\hat{\theta})\, E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)\right] + \left[Bias(\hat{\theta})\right]^2$$

$$= V(\hat{\theta}) + 2Bias(\hat{\theta})\, E(\hat{\theta}) - E\left[E(\hat{\theta})\right] + \left[Bias(\hat{\theta})\right]^2$$

$$= V(\hat{\theta}) + 0 + \left[Bias(\hat{\theta})\right]^2$$

$$= V(\hat{\theta}) + \left[Bias(\hat{\theta})\right]^2$$

MSE adalah kriteria yang mempertimbangkan baik varian maupun penduga bias dan sesuai dengan kriteria varian jika untuk penduga tidak bias. MSE merupakan salah satu cara untuk membandingkan dua atau lebih banyak penduga yang memiliki MSE seragam kecil untuk semua $\theta \epsilon \Omega$ dan semua penduga yang mungkin terjadi (Bain dan Engelhard, 1992).

2.24 *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Metode *Maximum Likelihood* adalah metode pendugaan yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Misalkan $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan fungsi kepadatan peluang $f(y|\theta)$ maka fkp bersama adalah

$$f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n; \theta) = f(y_1; \theta) f(y_2; \theta) \ldots\ldots f(y_n; \theta) \qquad (2.24.1)$$

Misalkan fungsi *likelihood* dinotasikan sebagai $L(\theta; y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n)} = L(\theta)$ sehingga

$$L(\theta) = f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n; \theta)$$

$$= f(y_1; \theta) f(y_2; \theta) \ldots\ldots f(y_n; \theta)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(y_i; \theta) \qquad (2.24.2)$$

Metode estimasi maksimum *likelihood* bekerja mencari statistik sampel yang membuat fungsi *likelihood* $L(y|\theta)$ menjadi maksimum. Jadi, penduga dari $\theta\left(\hat{\theta}\right)$ dapat diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan berikut:

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$$

Menurut Bain dan Engelhardt (1992) $\hat{\theta}$ terbukti benar – benar memaksimumkan fungsi likelihood jika

$$\frac{d^2L(\theta)}{d^2\theta} < 0$$

(Bain dan Engelhardt, 1992).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

1. Menentukan besar dan jumlah klaim individu

Berdasarkan persamaan (2.19.1) suatu unit besar klaim individu $ke-i$ dinotasikan dengan X_i maka $X = \{X_i\}_{i=1,2,3,\ldots\ldots,N}$ dapat diasumsikan berdistribusi kontinu yang peubah acaknya berdistribusi identik dan saling bebas.

Jumlahan dari klaim individu disebutk laim agregasi. Klaim agregasi diasumsikan mengikuti suatu distribusi campuran dengan klaim agregasi yang merupakan jumlahan dari N klaim individu yaitu:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

N adalah peubah acak yang menyatakan jumlah klaim bernilai bulat non negatif yang berdistribusi diskrit yang identik dan saling bebas yang terjadinya polis tahun pertama dan kedua tidak saling mempengaruhi dan seterusnya. Sehingga N memuat $N_1, N_2, \ldots.$ yang merupakan suatu kejadian jumlah klaim yang mungkin terjadi selama periode tunggal asuransi. Maka besar dan jumlah klaim individu ini dapat ditentukan distribusi klaim agregasi.

2. Mencari distribusi klaim agregasi

Dari persamaan (2.19.3) dan (2.19.4) dapat diperoleh fkp dan fungsi distribusi kumulatif klaim agregasi sebagai berikut:

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x\ )\ p(N = n)$$

Dan

$$F_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x\ )\ p(N = n)$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.19.6) dan (2.19.7) dapat diperoleh ekspektasi dan varian distribusi klaim agregasi sebagai berikut:

$$E(S) = E(N)\ E(X)$$

dan

$$Var(S) = E(N)V(X) + \left(E(X)\right)^2 V(N)$$

3. Mencari distribusi besar klaim berdistribusi Rayleigh

Pada penelitian ini model besar klaim berdistribusi Rayleigh merupakan hal khusus dari distribusi Weibull ketika parameter $\beta = 2$ dan $= \sqrt{\frac{2}{k}}$. Berdasarkan persamaan (2.17.1) diperoleh fungsi kepekatan peluang distribusi Rayleigh dengan satu parameter tunggal memiliki fungsi densitasnya dengan k adalah parameter tunggal sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}, & x \geq 0\,, k > 0 \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

Berdasarkan persamaan (2.17.1) diperoleh ekspektasi dan varian dari distribusi Rayleigh sebagai berikut:

$$E\,(X) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, kxe^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}\, dx$$

$$= k\, \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}\, dx$$

misal:

$$y = \frac{kx^2}{2}$$

selanjutnya

$$2y = kx^2$$

$$\frac{2y}{k} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{2y}{k}} = x$$

maka

$$dx = \sqrt{\frac{2}{k}}.\ \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \ k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y}{k} e^{-y} \sqrt{\frac{2}{k}}.\ \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \ k \frac{2}{k} \sqrt{\frac{2}{k}}.\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-y} y^{-\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} y^{\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \qquad (3.2.1)$$

$$E(X)^2 \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\ dx$$

$$= \ \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, kxe^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}\, dx$$

$$= k\ \int_{-\infty}^{\infty} x^3\, e^{\left(\frac{-kx^2}{2}\right)}\, dx$$

misal:

$$y = \frac{kx^2}{2}$$

selanjutnya

$$2y = kx^2$$

$$\frac{2y}{k} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{2y}{k}} = x$$

maka

$$dx = \sqrt{\frac{2}{k}}.\ \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \ k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y}{k} \sqrt{\frac{2y}{k}}\, e^{-y} \sqrt{\frac{2}{k}}.\ \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \ k\frac{2}{k}\sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{\frac{2}{k}}.\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{3}{2}} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \frac{2}{k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} y \quad dy$$

$$= \frac{2}{k}\Gamma(1+1)$$

$$= \frac{2}{k}\Gamma(2) \qquad (3.2.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.1) dan (3.2.2) maka diperoleh varian besar klaim berdistribusi Rayleigh sebagai berikut:

$$Var\ (X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{2}{k}\Gamma(2) - \left(\sqrt{\frac{2}{k}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2$$

$$= \frac{2}{k}\Gamma(2) - \frac{2}{k}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{k}\left(\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\right) \qquad (3.2.3)$$

4. Mencari distribusi jumlah klaim berdistribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan distribusi yang digunakan untuk kejadian-kejadian yang jarang terjadi. Sehingga terjadinya suatu risiko dalam selang waktu interval yang singkat atau daerah yang sempit sebanding dengan panjang interval waktu atau luas daerah dan tidak tergantung pada banyak risiko yang terjadi diluar interval waktu atau daerah tersebut. Berdasarkan persamaan (2.18.1) fkp distribusi Poisson sebagai berikut:

$$P(x\ ;\ \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad ; x = 0,1,2, \ldots.$$

Karena N merupakan peubah acak berdistribusi Poisson, maka distribusi Poisson merupakan distribusi jumlah klaim dengan fungsi peluang sebagai berikut:

$$P(n\,;\,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \qquad ; x = 0,1,2,\ldots. \tag{3.2.4}$$

Berdasarkan persamaan (3.3.4) diperoleh ekspektasi dan variansi distribusi jumlah klaim berdistribusi Poisson sebagai berikut:

$$E(N) \;= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n\,.\;p(n)\;dx$$

$$= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n\,.\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}$$

$$= 0 + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} n\,.\frac{e^{-\lambda}\lambda\lambda^{n-1}}{n(n-1)!}$$

$$= \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$misal$: y = n-1

$$= \lambda \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y)!}$$

$$= \lambda\,.\,1$$

$$= \lambda \tag{3.2.5}$$

$$E\;(N^{2}) \;= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n^{2}.\;p(n)\;dx$$

$$= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n^{2}\,.\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda\lambda^{n-1}}{n(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-\lambda}\lambda\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, e^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$misal$: y = n-1

n = y + 1

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y+1)e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y)!}$$

$$= \lambda \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y\, e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y)!} \right]$$

$$= \lambda(\lambda + 1)$$

$$= \lambda^2 + \lambda \qquad (3.2.6)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.5) dan (3.2.6) maka diperoleh nilai variansinya sebagai berikut:

$$Var\ (N) = E(N^2) - \left(E(N)\right)^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2$$

$$= \lambda \qquad (3.2.7)$$

5. Menentukan model klaim agregasi dengan besar klaim berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson

Berdasarkan persamaan (2.19.4) dapat diperoleh fkp dengan besar klaim berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(x)p(N=n)$$

dengan:

$$P^{*n}(x\ ) = \sum_{y\leq x} p(y)P^{*(n-1)}(x-y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{y\leq x} p(y)P^{*(n-1)}(x-y)\right) p(N=n)$$

dengan :

$$f(y\,;\ k) = kye^{\left(\frac{-ky^2}{2}\right)}$$

dan

$$p(n\,;\ \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$f_s(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{y\leq x} kye^{\left(\frac{-ky^2}{2}\right)}P^{*(n-1)}(x-y)\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)$$

Kemudian dapat diperoleh ekspektasi dan varian klaim agregasi dari ekspektasi dan varian masing-masing distribusi besar dan jumlah klaim. Berdasarkan persamaan (2.19.5) diperoleh ekspektasi distribusi klaim agregasi dengan mensubstitusi persamaan (3.2.1) dan (3.2.5) sebagai berikut:

$$E(S) = E(X)E(N)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).\lambda$$

$$= \sqrt{\frac{2}{k}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right).\lambda$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\frac{1}{2}.\lambda$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{\lambda}{\sqrt{k}} \qquad (3.2.8)$$

Setelah nilai ekpektasi diperoleh langkah selanjutnya mencari varian dari distribusi Rayleigh untuk klaim agregasi. Berdasarkan persamaan (2.19.7) diperoleh ekspektasi distribusi klaim agregasi dengan mensubstitusi persamaan (3.2.1) , (3.2.3), (3.2.5) dan (3.2.7) sebagai berikut:

$$Var\ (S) = E\ (N)V(X) + \left(E(X)\right)^2 V(N)$$

$$= \lambda\,.\left(\frac{2}{k}\left(\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) + \left(\sqrt{\frac{2}{k}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 .\ \lambda$$

$$= \frac{2}{k}\Gamma(2)\lambda - \frac{2}{k}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\lambda + \frac{2}{k}\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)\lambda$$

$$= \frac{2}{k}\Gamma(2)\lambda \qquad (3.2.9)$$

6. Menentukan premi murni total dan risiko maksimum dengan besar klaim berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poissom pada simulasi data.

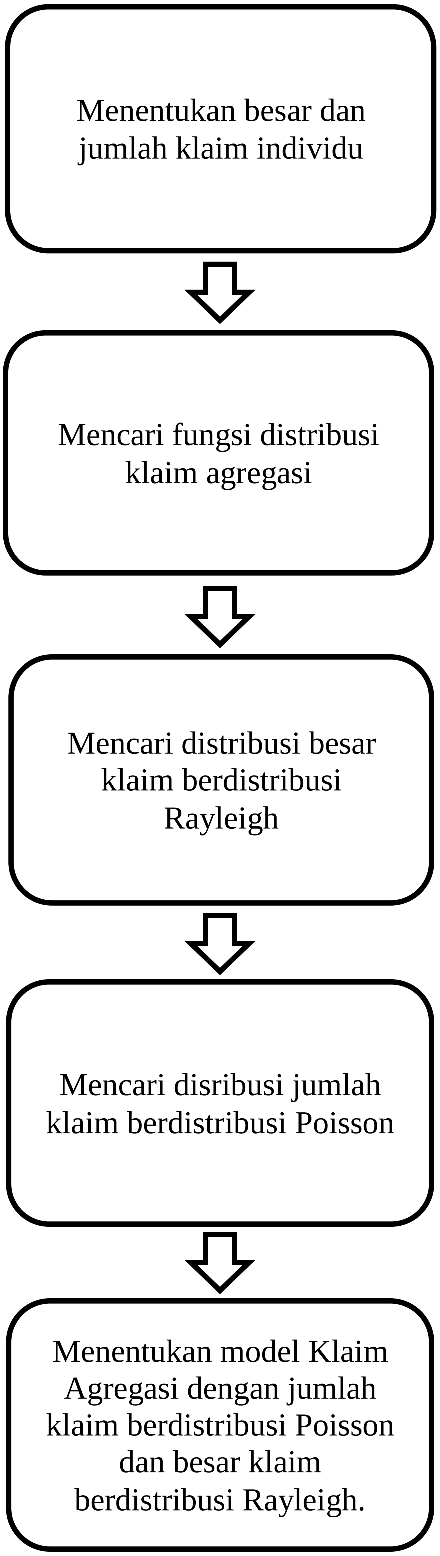
Perhitungan premi total dan risiko total dari dengan besar klaim berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poissom diperoleh dari ekspektasi dan varian parameter masing-masing besar dan jumlah klaim individu yang terjadi. Karena distribusi klaim agregasi bergantung dari besar dan jumlah klaim individu. Perhitungan klaim agregasi dilakukan dengan membangkitkan data besar klaim yang berdistribusi Rayleigh dan data jumlah klaim yang berdistribusi Poisson dengan menggunakan *software* R.

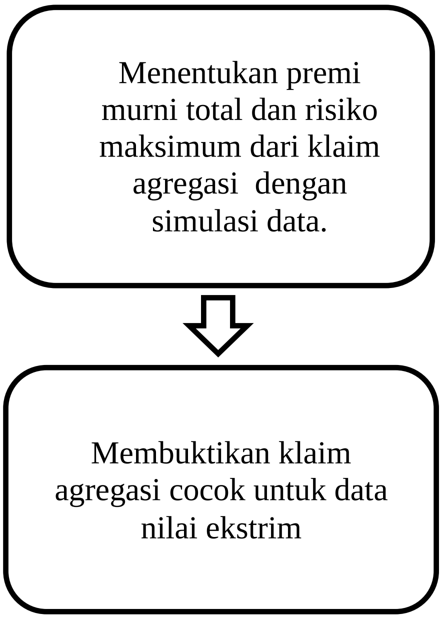
7. Membuktikan klaim agregasi cocok untuk data nilai ekstrim

Membuktikan klaim agregasi cocok untuk data nilai ekstrim dengan menentukan nilai MSE dari distribusi Rayleigh dan membandingkan dengan nilai MSE distribusi Gamma. MSE dapat diperoleh dengan menduga masing-masing parameter distribusi Rayleigh dan distribusi Gamma terlebih dahulu menggunakan metode MLE. Pendugaan dilakukan dengan menggunakan *software* R dan penentuan MSE juga menggunakan *software* R dengan *syntax* yang terdapat pada lampiran.

3.3 Diagram Alir

Adapun diagram alir dari metode penelitian ini adalah sebagai berikut:





Gambar 2. Diagram Alir Penelitian

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Pemodelan distribusi Rayleigh untuk klaim agregasi dapat diperoleh dari distribusi besar klaim berdistribusi Rayleigh yang merupakan kasus khusus dari distribusi Weibull ketika parameter $\beta = 2$ dan $\alpha = \sqrt{\frac{2}{k}}$ serta distribusi jumlah klaim yang berdistribusi Poisson. Sehingga diperoleh model distribusi klaim agregasi sebagai berikut:

$$f_s(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{y\leq x} kye^{\left(\frac{-ky^2}{2}\right)}P^{*(n-1)}(x-y)\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)$$

2. Pada pemodelan klaim agregasi dengan besar klaim berdistribusi Rayleigh dan jumlah klaim berdistribusi Poisson diperoleh nilai premi murni total dan risiko maksimum berdasarkan nilai ekspektasu dan varian sebagai berikut:

$$E(S) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{\lambda}{\sqrt{k}}$$

dan

$$Var(S) = \frac{2}{k}\Gamma(2)\lambda$$

Sehingga diperoleh nilai premi murni total dari 100 pemegang polis yang diperoleh dari perhitungan nilai ekspektasi klaim agregasi sebesar Rp 166.944.228,- dengan nilai premi murni per pemegang polis sebesar Rp 1.669.442,- dan risiko maksimum yang diperoleh dari perhitungan nilai VaR 95% klaim agregasi sebesar Rp 418.000.000,- menggunakan menggunakan *software* R dari 100 pemegang polis. Maka hasil premi murni per pemegang polis memiliki asumsi bahwa nilai premi murni per pemegang polis adalah sama. Sehingga premi murni total dan risiko maksimum ini dapat digunakan perusahaan asuransi untuk acuan perhitungan premi perusahaan asuransi kedepannya dengan asumsi kejadian klaim asuransi berikutnya tidak menyimpang dari kejadian klaim periode sebelumnya.

3. Distribusi Rayleigh terbukti cocok untuk data yang memiliki nilai ekstrim dari hasil nilai MSE yang kecil pada simulasi data yang telah ditentukam.

DAFTAR PUSTAKA

Afify. W. M. "*Clasisical Estimation of Mixed Rayleigh Distribution in Type1 Progressiv Concered*". Jurnal Teori Statistika dan Aplikasi. 10: 619-632.

Ayres, S.A. 1964. *Theory and Problems of Calculus*. Mc.Graw-hill, lnc. Britain.

Bain, L.J.& Engelhard, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* Ed. ke-2. PWS-KENT publishing Company. Boston.

Bowers, N.L. Gerber, H.U. Hickman, J.C. Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. 1997. *Actuarial Mathematics*. Ed. ke-2. The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.P

Effendy, A.R. 2016.*Teori Risiko Aktuaria dengan Software R*.Universitas Gajah Mada Press. Yogyakarta.

Fahmi, Ilham. 2010. *Manajemen Risiko*. Alfabeta. Bandung.

Hogg, R.V dan Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Academic Press. New York.

Mann, N.R. Schafer, R.E. & Singapurwalla, N.D. 1974. *Methods For Statistical Analysis of Reliability % Life Data*. John Wiley & Sons, lnc.

Martono, K danTjahjono, E.. 2011. *Asuransi Transpostasi Darat-Laut-Udara*. Mandar Madju. Bandung.

Pramesti, G. 2011. *Distribusi Rayleigh untuk Klaim Agregasi*. Jurnal Media Statistika. 4(2) : 106-109.

Walpole, R.E. 1995. Pengantar Statistika. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Young, R Virginia. 2004. *Encyclopedia of Actuarial Science.* John Wiley & Sons, Ltd.