DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{(2k-1),2}$ UNTUK $k \geq 3$

(Skripsi)

Oleh

NIA ADELIA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF GENERALIZED PETERSEN GRAPH $\boldsymbol{P_{(2k-1),2}}$ FOR $\boldsymbol{k \geq 3}$

By

NIA ADELIA

Let G be a connected graph $G = (V, E)$, with $V(G) \neq \emptyset$ denotes the set of vertex and $E(G)$ denotes the set of edge. The distance v to S for $v \in V(G)$ and $S \subset V(G)$ is defined as $d(v,S) = \min\{d(v,x), x \in S\}$. For an ordered k-partition $\Pi = S_1, S_{2,}, \ldots, S_k$ of $v \in V(G)$, then representation of v with respect to Π is defined as the k-vector $r(v|\Pi) = (d(v,S_{1,}), d(v,S_{2,}), \ldots, d(v,S_{k,}))$. The partition Π is called a resolving partition if the k-vectors $r(v|\Pi)$ are distinct. The minimum for which there is a resolving k-partition of $V(G)$ is the partition dimension $pd(G)$ of G. In this study, the partition dimension of generalized Petersen graph $P_{(2k-1),2}$ for $k \geq 3$ is 4.

Keyword : graph, partition dimension, Petersen graph

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{(2k-1),2}$ UNTUK $k \geq 3$

Oleh

NIA ADELIA

Diberikan suatu graf terhubung *G*= (*V*, *E*), dengan *V*(*G*) $\neq \emptyset$ menyatakan himpunan titik dan *E*(*G*) menyatakan himpunan sisi. Jarak titik *v* terhadap *S* untuk $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$ didefinisikan sebagai $d(v,S) = \min\{d(v,x), x \in S\}$. Untuk suatu *k*-partisi $\Pi = S_1, S_{2,}, \ldots, S_k$ dari $v \in V(G)$, maka representasi dari *v* terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v,S_{1,}), d(v,S_{2,}), \ldots., d(v,S_{k,}))$. Π disebut sebagai partisi pembeda jika $r(v|\Pi)$ berbeda. Kardinalitas minimum dari *k*-partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut dimensi partisi dari *G*,dinotasikan dengan *pd*(*G*). Pada penelitian ini telah diperoleh dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$untuk $k \geq 3$ adalah 4.

Kata kunci : graf, dimensi partisi, graf Petersen

DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{(2k-1),2}$ UNTUK $k \geq 3$

Oleh

NIA ADELIA

Skripsi
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi	:	**DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{(2k-1),2}$ UNTUK $k \geq 3$**
Nama Mahasiswa	:	Nia Adelia
No. Pokok Mahasiswa	:	1517031141
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.
NIP 19620513 198603 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **31 Mei 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : *Nia Adelia*

Nomor Pokok Mahasiswa : **1517031141**

Judul : **Dimensi Partisi Graf Petersen Diperumum $P_{(2k-1),2}$ untuk $k \geq 3$**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil dari orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertulis dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 13 Juli 2019

Penulis

Nia Adelia

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Nia Adelia, dilahirkan di Kotabumi pada 26November 1997, dan merupakan anak keempat dari pasangan suami istri Bapak Zamron Aidi dan Ibu Ernani.

Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SDN Beringin Lampung Utara pada tahun 2009, Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Abung Barat pada tahun 2012, Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 3Kotabumi pada tahun 2015. Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai Mahasiswi Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengatuan Alam Universitas Lampung. Selama menjadi mahasiswi penulis bergabung di Generasi Muda Himatika (GEMATIKA) periode 2015-2016, anggota Departemen Pengembangan Sains dan Lingkungan Hidup (PSLH), pengurus Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota Biro Dana dan Usaha periode 2016.

Pada bulan Januari-Februari 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di BPJS Kesehatan Kantor Cabang Bandar Lampung dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Tiyuh Toto Mulyo Kecamatan Gunung Terang Kabupaten Tulang Bawang Barat pada bulan Juli-Agustus 2018.

KATA INSPIRASI

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.

Maka apabila engkau telah selesai (dari suatu urusan), tetaplah bekerja keras

(untuk urusan lain). Dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap".

(QS. Al-Insyirah 6-8)

Man Jadda Wajada

Siapa bersungguh-sungguh pasti berhasil

Hidup bukanlah tentang "Aku Bisa Apa ".

Namun tentang "Aku Mencoba".

Jangan pikirkan tentang kegagalan, itu adalah pelajaran.

(Ir. Soekarno)

Jangan menyerah.

Hari ini keras, besok akan semakin berat, tetapi lusa akan indah

(Jack Ma)

PERSEMBAHAN

Dengan segala kerendahan hati dan rasa syukur, aku persembahkan karya kecil ini untuk-Muya Allah, yang selalu memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Untuk kedua orang tuaku (Zamron Aidi dan Ernani) dan kakak-kakakku (Riki, Candra, dan Niko) yang selalu memberikan doa, dukungan, kasih sayang, dan motivasi untuk tetap semangat dalam melakukan segala aktivitas.

Kepada teman- temanku, yang telah memberikan warna indah di setiap langkah perjalan hidupku, yang tak pernah henti memberikan dorongan dan arahan.

Dosen pembimbing dan penguji yang sangat berjasa dalam mengarahkan dan membimbing penulis.

Alamamater Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat, ridho serta karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Dimensi Partisi Graf Petersen Diperumum $\boldsymbol{P_{(2k-1),2}}$ untuk$\boldsymbol{k \geq 3}$"** yang merupakan salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana Sains (S.Si.) pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing 1 yang telah membimbing dan memberikan pengarahkan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Suharsono S, M.S., M.Sc., Ph.D.,selaku Dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan pengarahan dan saran kepada penulis dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan pengarahan, evaluasi, serta sarannya kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Lazakaria, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, serta karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
8. Kedua orang tua, kakak- kakak, serta keluarga besar yang senantiasa memberikan doa, semangat, kasih sayang,pengorbanan dan ketulusan dalam mendampingi penulis.
9. Sahabat seperjuangan(Nurmala, Selvia, Tina, Titin, Yomi) atas kebersamaan selama 4 tahun yang begitu “Berwarna”.
10. Teman-teman seperbimbingan, Matematika 2015 dan Keluarga Besar HIMATIKA atas kebersamaan, perjuangan, dan pengalaman selama 4 tahun perkuliahan.
11. Semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwasannya skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan baik dari segi materi maupun teknisnya. Untuk itu, penulis sangat mengharapkan adanya kritik serta saran yang membangun serta bersifat positif. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat serta menambah wawasan dan materi tambahan serta informasi bagi para pembacanya.

Bandar Lampung, 13 Juli 2019
Penulis,

Nia Adelia

DAFTAR ISI

Halaman

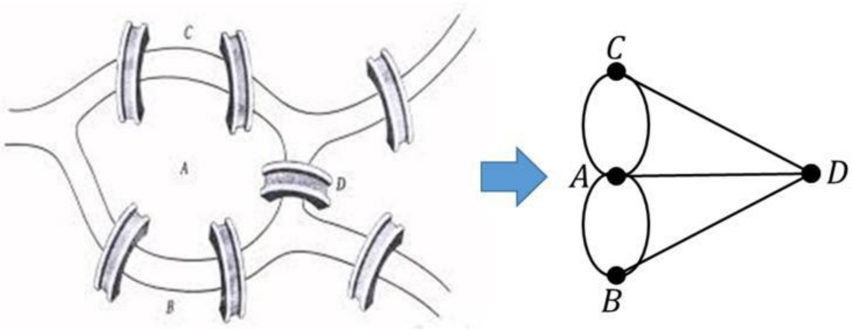
DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Teori graf pertama kali digunakan pada permasalahan Jembatan Konigsberg.Di kota Konigsberg yang sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sebuah sungai yang bernama sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai.

Terdapat tujuh jembatan yang menghubungkan empat daratan yang dibelah oleh sungai Pregal tersebut. Lalu sebuah pertanyaan muncul apakah mungkinseseorang berjalan melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ketempat asal mereka memulai perjalanan. Pada tahun 1736, seorang matematikawan Swiss Leonard Euler menjawab pertanyaan tersebut dengan pembuktian sederhana. Ia memodelkan permasalahan tersebut ke dalambentuk graf dengan merepresentasikan daratan sebagai titik (*vertex*) dan jembatan sebagai sisi (*edge*).



Gambar 1. Permasalahan jembatan Konigsberg dan representasinya dalam bentuk graf

Setelah permasalahan jembatan Konigsberg, teori graf semakin berkembang pesat hingga saat ini. Salah satu kajian dalam teori graf yaitu dimensi metrik dan dimensi partisi yang merupakan pengembangan dari dimensi metrik. Dimensi metrik pada graf diperkenalkan pertama kali oleh Slater pada tahun 1975 menyatakan bahwa himpunan pembeda pada W sebagai titik-titik di graf G sedemikian hingga untuk setiap titik di G diperoleh jarak yang berbeda terhadap setiap titik di W. Selanjutnya Harary dan Melterpada tahun 1976 pada jurnal yang berjudul *on the metric dimension of a graph*, menyatakan bahwa dimensi metrik muncul yaitu dengan memperoleh himpunan pembeda.

Dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (1998), dimensi partisi yaitu kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ yang dinotasikan dengan $pd(G)$.Penentuan dimensi partisi dari graf terhubung telah dilakukan oleh Chartrand dkk.(1998), khususnya dimensi partisi dari graf bintang $K_{1,n}$= n. Selain itu, mereka juga telah mendapatkan batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf ulat dan graf siklusC_n. Selanjutnya, Riza (2012) telah mendapatkan dimensi partisi pada graf gir G_{2n}.Penelitian terus dilakukan untuk mendapatkan dimensi partisi graf terhubung lainnya. Kelas graf tertentu dapat ditentukan dimensi partisinya secara tepat, tetapi pada kelas graf lain baru dapat ditentukan batas atas dan batas bawahnya.

Permasalahan penentuan dimensi partisi pada suatu graf merupakan permasalahan yang sulit, karena belum adanya teorema yang dapat digunakan untuk menentukan dimensi partisi pada sembarang graf. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji tentang dimensi partisi graf Petersen diperumum$P_{(2k-1),2}$ untuk $k \geq 3$.

1.2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$ untuk $k \geq 3$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapat dari penelitian ini sebagai berikut:

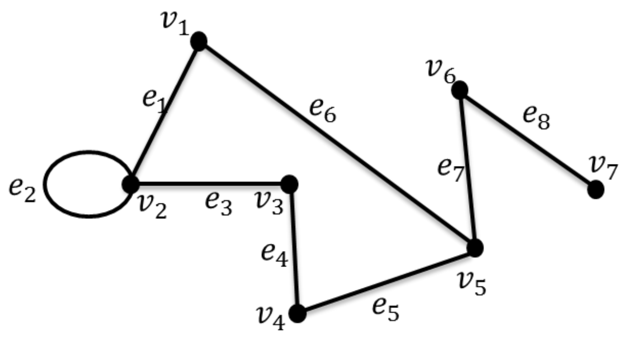
1. Mengembangkan wawasan tentang teori graf khususnya tentang dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$ untuk $k \geq 3$.
2. Memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas dan memperdalam ilmu matematika dalam bidang teori graf khususnya dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$ untuk $k \geq 3$.
3. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan mengenai dimensi partisi graf Petersen diperumum.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan konsep dasar graf, graf Petersen, graf Petersen diperumum dan dimensi partisi graf sebagai landasan teori pada penelitian ini.

2.1. Konsep Dasar Graf

Teori dasar mengenai graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Graf Gadalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik (*vertex*) tak kosong dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi (*edge*) yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut *orde*dari graf G. Misalkan v dan w adalah titik pada graf G, jika v dan w dihubungkan oleh sisi e, maka v dan w dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik v dan w dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel dengan titik v dan w. Himpunan tetangga (*neighborhood*) dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2. Contoh graf dengan 7 titik dan 8 sisi

Pada Gambar 2 graf *G*(*V*,*E*), *V*(*G*) = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan *E*(*G*) = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan $v_5$dinotasikan *N*(v_1) = $\{v_2, v_5\}$, sedangkan $v_1$dan v_2 menempel pada e_1. Sebaliknya, sisi e_1 menempel pada titik $v_1$dan v_2.

Derajat suatu titik *v* pada graf *G* adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik *v*, dinotasikan dengan *d*(*v*). Pada Gambar 2, *d*(v_1) = *d*(v_3) = *d*(v_4) = *d*(v_6) = 2, *d*(v_2) = 4, *d*(v_5) = 3, dan *d*(v_7) = 1. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang memiliki derajat satu. Pada Gambar 2, titik v_7 adalah daun karena berderajat satu.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi Paralel adalah dua sisi atau lebih yang menghubungkan dua titik yang sama. Graf yang tidak mempunyai *loop* atau sisi paralel disebut graf sederhana. Graf pada Gambar 2 bukan merupakan graf sederhana karena pada graf tersebut terdapat *loop* yaitu pada titik v_2.

Istilah- istilah yang ada pada pembahasan graf adalah jalan (*walk*), lintasan (*path*) dan sirkuit (*circuit*). Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi, dimulai dan diakhiri oleh titik, sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh jalan berdasarkan Gambar 2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_2 - e_3 - v_3 - e_4 - v_4 - e_5 - v_5 - e_7 - v_6 - e_8 - v_7$. Lintasan adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda. Graf *G* dikatakan graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda di *G*. Pada Gambar 2 contoh lintasan adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_3 - v_3 - e_4 - v_4 - e_5 - v_5 - e_7 - v_6 - e_8 - v_7$. Jarak diantara dua titik *x* dan *y* adalah panjang lintasan terpendek diantara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan *d*(*x*,*y*).

Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup (*closed path*), yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil. Contoh sirkuit berdasarkan Gambar 2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_3 - v_3 - e_4 - v_4 - e_5 - v_5 - e_6$. Contoh sirkuit tersebut adalah contoh sirkuit ganjil.

Lemma yang menyatakan kaitan antara jumlah derajat semua titik pada suatu graf *G* dengan banyaknya sisi adalah sebagai berikut:

Lemma 2.1.1. (Deo, 1989) Misalkan *G*(*V*,*E*) adalah graf terhubung dengan $|E|$ = e, maka :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

Bukti: Sebagai contoh pada graf Gambar 2 (7 titik dan 8 sisi) adalah

$$\sum_{i=1}^{7} d(v_i) = d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) + d(v_6) + d(v_7)$$

$$\sum_{i=1}^{7} d(v_i) = 2 + 4 + 2 + 2 + 3 + 2 + 1$$

$$\sum_{i=1}^{7} d(v_i) = 2.8$$

$$\sum_{i=1}^{7} d(v_i) = 2e$$

Teorema 2.1.1. (Deo, 1989) Untuk sembarang graf *G*, banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap.

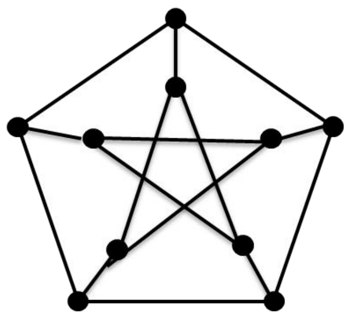
Bukti : Misalkan V_{genap} dan V_{ganjil} masing-masing adalah himpunan titik yang berderajat genap dan himpunan titik yang berderajat ganjil pada *G(V,E)*,maka persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{V\ genap} d(v_j) + \sum_{V\ ganjil} d(v_k)$$

Karena $d(v_j)$ untuk setiap$v_j \in V_{genap}$, maka suku pertama dari ruas kanan persamaanharus bernilai genap. Ruas kiri pada persamaan diatas juga harus bernilai genap. Nilai genap padaruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga bernilai genap. Karena$d(v_k)$ untuk setiap$v_k \in V_{ganjil}$, maka banyaknya titik v_k di dalamV_{ganjil} harus genapagar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi banyaknya titik yang berderajatganjil selalu genap.

2.2. Graf Petersen

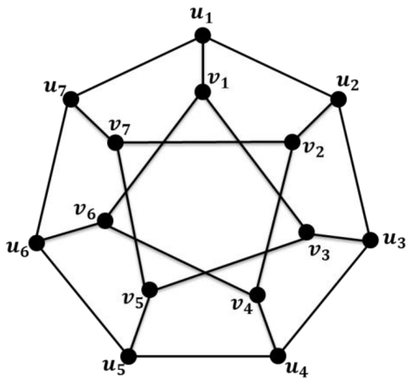
Graf Petersen adalah graf yang memiliki 10 titik, 15 sisi, dan setiap titiknya berderajat 3 dengan 5 titik di luar dan 5 titik di dalam yang dihubungkan dengan 5 sisi (Watkins, 1969).



Gambar 3.Graf Petersen $P_{5,2}$

2.3. Graf Petersen Diperumum

Graf Petersen diperumum merupakan graf teratur berderajat tiga.Misalkan $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ menyatakan banyaknya titik lingkaran luar dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ menyatakan banyaknya titik lingkaran dalam untuk $n \geq 3$. Graf Petersen diperumum dinotasikan dengan $P_{n,k}$, $n \geq 3; 1 \leq k \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil; 1 \leq i \leq n$ adalah graf yang memiliki $2n$ titik $\{u_i\} \cup \{v_i\}$ dan sisi $\{u_i \to u_{i+1}\} \cup \{v_i \to v_{i+k}\} \cup \{u_i \to v_i\}$ (Watkins, 1969).



Gambar 4. Contoh graf Petersen diperumum$P_{7,2}$

2.4. Dimensi Partisi Graf

Pada bagian ini akan diberikan definisi dari dimensi dan partisi secara umum yaitu, dimensi didefinisikan sebagai jumlah minimal koordinat yang dibutuhkan untuk menetukan titik- titik yang ada dalam suatu ruang atau objek. Sedangkan, partisi didefinisikan sebagai pengelompokkan anggota himpunan dimana setiap kelompok memiliki anggota yang berbeda dan setiap anggota masuk dalam satu kelompok tertentu. Dimensi partisi yaitu minimum panjang lintasan terpendek antara titik pada suatu graf terhadap *k*-partisi, adapun panjang lintasan yaitu banyaknya jumlah sisi yang dilewati antara titik pada suatu graf terhadap *k*-partisi.

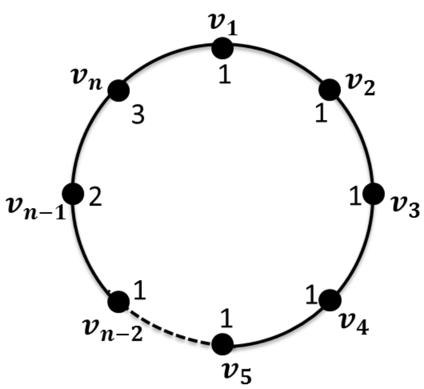
Selanjutnya akan diberikan definisi dimensi partisi pada suatu graf, teorema-teorema dan beberapa contoh graf yang sudah diperoleh dimensi partisinya.

Diberikan suatu graf terhubung G. Ambil sembarang titik u dan v di V, jarak antara titik u dan v pada graf G yang ditulis $d(u,v)$adalah panjang lintasan terpendek dari kedua titik tersebut. Sedangkan jarak terpanjang antara dua titik pada $V(G)$ didefinisikan sebagai diameter dari graf G, ditulis $diam(G)$. Misalkan terdapat titik $v \in V(G)$ dan$S \subset V(G)$, jarak antara v dan S adalah $d(v,S) = \min\{d(v,x), x \in S\}$.

Misalkan $V(G)$ dipartisi menjadi k buah himpunan $S_1, S_{2,}, \ldots, S_k$ yang saling lepas, notasi Π sebagai suatu himpunan terurut dari k-partisi, ditulis $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$. Misalkan terdapat titik $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π ditulis $r(v|\Pi)$ didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v,S_{1,}), d(v,S_{2,}), \ldots., d(v,S_{k,}))$. Jika setiap titik yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut sebagai partisi pembeda (*resolving partition*). Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ **(**Chartrand dkk., 1998).

Teorema 2.4.1. (Chartrand dkk., 1998) Dimensi partisi graf siklus C_n untuk $n \geq 3$ adalah 3.

Bukti :

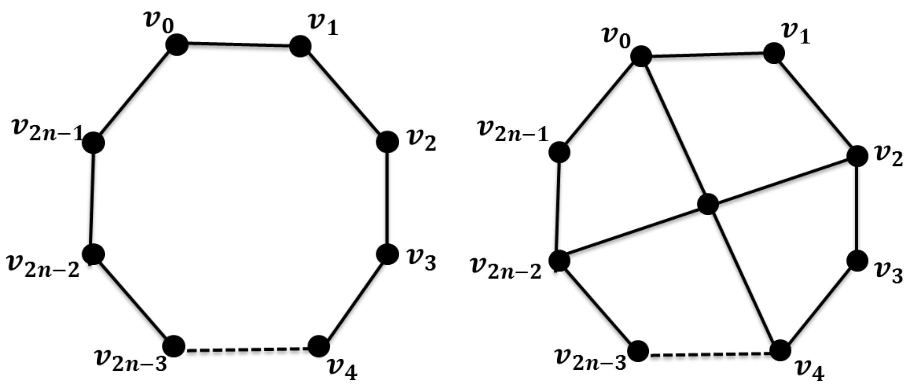


Gambar 5. Dimensi partisi graf siklus C_n

Graf siklusC_n dipartisi sedemikian sehingga diperoleh Π = $\{S_1,\ S_2,\ S_3\}$, dengan S_1= $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_{n-2}\}$, S_2= $\{v_{n-1}\}$, S_3= $\{v_n\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi$= (0,2,1); $r(v_2|\Pi)$ = (0,3,2); $r(v_3|\Pi)$ = (0,4,3); $r(v_4|\prod)$ = (0,5,4); $r(v_5|\Pi)$ = (0,6,5); …; $r(v_{n-2}|\Pi)$ = (0,1,2); $r(v_{n-1}|\prod)$ = (1,0,1); $r(v_n|\prod)$ = (1,1,0). Karena representasi dari semua titik berbeda, maka Π adalahpartisi pembeda dari graf siklus $C_n$dan $pd(C_n) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(C_n) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda Π = $\{S_1,\ S_2\}$ dari $C_n$dengan S_1= $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_{n-1}\}$,$S_2$= $\{v_n\}$, maka titik v_1, v_{n-1} akan memiliki representasi yang sama yaitu (0,1), kontradiksi. Jadi $pd(C_n) \geq 3$. Akibatnya $pd(C_n)$ = 3. ■

Misalkan diberikan graf siklus genap C_{2n}, $n \geq 2$ dengan $V(C_{2n})$ = $\{v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}\}$ dan $E(C_{2n})$ = $\{v_i, v_{i+1} | i = 0, 1, \dots, 2n-2\}$ ∪ $\{v_{2n-1}v_0\}$. Untuk mengkontruksi graf gir G_{2n}, tambahkan satu titik baru, notasikan dengan c, yang bertetangga dengan n titik di C_{2n} dengan ketentuan untuk i = 0 atau 1, tambahkan sisi-sisi $cv_i, cv_{i+2}, cv_{i+4}, \dots, cv_{i+(2n-2)}$. Jadi $V(G_{2n})$ = $\{v_i | i = 0, 1, \dots, 2n-1\}$ ∪ $\{c\}$ dan $E(G_{2n})$ = $\{cv_j | j = 0, 2, \dots, 2n-2\}$ ∪$E(C_{2n})$. Dapat dilihat bahwa banyaknya titik graf gir G_{2n}adalah $2n$+1, sementara banyaknya sisi graf gir G_{2n} adalah $3n$. Pada Gambar 6 berikut ini diberikan Gambar C_{2n} dan G_{2n}. Sebagaimana yang telah didefinisikan di atas (Riza, 2012).



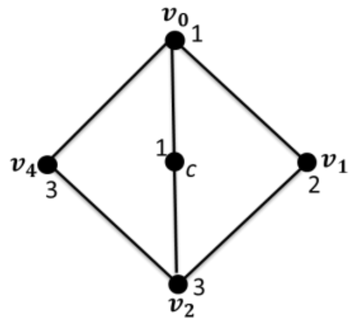
Gambar 6. Graf siklus genap C_{2n} dan graf gir G_{2n}

Definisi 2.4.1 dan Definisi 2.4.2 berikut memberikan pengertian dari jarak antara dua titik dan jarak antara suatu titik terhadap suatu himpunan pada suatu graf.

Definisi 2.4.1. Misalkan $G = (V,E)$ adalah graf terhubung dan misalkan $S \subset V$. Misalkan terdapat suatu titik $v \in V$. Maka jarak titik v terhadap S didefinisikan sebagai $d(v,S) = \min\{d(v,x) | x \in S\}$.

Definisi 2.4.2. Misalkan $G = (V,E)$ adalah graf terhubung dan $u,v \in V$ adalah dua titik sebarang G. Diameter G didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua titik di G, dinotasikan $\text{diam}(G) = max\{d(u,v) | u, v \in V(G)\}$.

Contoh 2.4.1. Misal terdapat graf gir G_4 dengan $V(G_4)$ = $\{c, v_0, v_1, v_2, v_3\}$. Akan ditunjukkan bahwa $pd(G_4)$ = 3.



Gambar 7. Dimensi partisi graf gir G_4

Misal Π = $\{S_1, S_2, S_3\}$ dengan S_1= $\{c, v_0\}$; S_2= $\{v_1\}$; $S_3 = \{v_2, v_3\}$. Ambil titik $c \in S_1$. Maka representasi titik c terhadap Π adalah $r(c|\Pi)$ = $(d(c,S_1)$, $d(c,S_2)$, $d(c,S_3))$ = (0,2,1). Selanjutnya, ambil titik $v_0 \in S_1$ maka $r(v_0|\Pi)$ = (0,1,1). Dengan cara yang sama diperoleh :

$r(v_1|\Pi)$ = (1,0,1)

$r(v_2|\Pi)$ = (1,1,0)

$r(v_3|\Pi)$ = (1,2,0).

Dapat dilihat bahwa karena sebarang titik v di G_4 mempunyai representasi $r(v|\Pi)$ yang berbeda, maka haruslah $pd(G_4)$ = $|\Pi|$ = 3. ■

Teorema 2.4.2. Diketahui x, y, $z \in R$. Diperoleh pernyataan-pernyataan di bawah ini bernilai benar.

(i) Jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.

(ii) Tepat satu terjadi, $x < y$, $y < x$, atau $x = y$.

(iii) Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.

Bukti :

(i) Jika $x < y$ dan $y < z \Leftrightarrow y - x \in P$ dan $z - y \in P \Rightarrow z - x = (z - y) + (y - x) \in P \Leftrightarrow x < z$.

(ii) Menurut sifat trikhotomi himpunan P, tepat satu terjadi :

$$y - x \in P, \quad -(y - x) \in P, \quad \text{atau} \quad y - x = 0$$

yang ekuivalen dengan

$$x < y, \quad y < x, \quad \text{atau} \quad x = y.$$

(iii) Diketahui $x \leq y$ dan $y \leq x$. Andaikan $x \neq y$ tentu $x < y$ dan $y < x$, suatu kontradiksi.

III. METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini diberikan waktu dan tempat penelitian serta metode yang akan digunakan dalam penelitian ini.

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2018/ 2019di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini kajian pustaka seperti buku-buku dan jurnal yang berhubungan dengan tujuan penelitian ini. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan yaitu:

1. Mempelajari materi tentang graf Petersen diperumum dan dimensi partisi graf.
2. Mengkontruksi graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$ untuk $k \geq 3$.

   Menentukan batas bawah dari $pd(P_{(2k-1),2})$ untuk $k \geq 3$. Batas bawah dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$ dapat ditentukan dengan Teorema 2.4.1 karena graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$memuat graf lingkaran, maka $pd(P_{(2k-1),2}) \geq 3$. Akan tetapi, jika batas bawah ini belum memenuhi syarat dimensi partisi, maka dilakukan penambahan label secara bertahap, sedemikian sehingga syarat dimensi partisi terpenuhi.

4. Menentukan batas atas dari $pd(P_{(2k-1),2})$. Batas atas dari $pd(P_{(2k-1),2})$ diperoleh dengan mengkonstruksi graf $P_{(2k-1),2}$untuk $k \geq 3$. Himpunan titik-titik pada graf $P_{(2k-1),2}$ dikelompokkan kedalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda itulah yang merupakan dimensi partisi dari graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$.
5. Menyimpulkan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari penelitian yang sudah dilakukan, diperoleh dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{(2k-1),2}$ untuk $k \geq 3$ adalah 4.

5.2. Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,k}$ dengan $k > 2$.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. 1998. On The Partition Dimension of Graph. *Congress*us. *Numerantum*.,**130**, 157-168.

Deo, N. 1989. *Graphs Teory With Aplications to Engineering and Computer Science.* Prentice-Hall, New York.

Harary, F. dan Melter, R.A. 1976. On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combinatoria*., **2**, 191-195.

Riza, R. 2012. Dimensi Partisi Graf Gir. *Jurnal Matematika UNAND*., **1**(2), 21-27

Slater, P. 1975. Leaves of Trees. *Congressus*. *Numerantum.*, **14**, 549-559.

Watkins, M.E. 1969. A Theorem on Tait Colorings with Application to The Generalized Petersen Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*.,**6**, 152-164.