DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{2k,2}$ UNTUK $k \geq 2$

(Skripsi)

Oleh

TITIN AWALATUN KHOLIFAH

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

THE PARTITION DIMENSION OF A GENERAL PETERSEN GRAPH $\boldsymbol{P_{2k,2}}$ FOR $\boldsymbol{k \geq 2}$

By

TITIN AWALATUN KHOLIFAH

Let G be a connected graph $G = (V, E)$, with $V(G) \neq \emptyset$ denotes the set of vertex and $E(G)$ denotes the set of edge. The distance v to S for $v \in V(G)$ and $S \subset V(G)$ is defined $d(v, S) = min\{d(v, x) | x \in S\}$. For an ordered k-partition $\Pi = S_1, S_2, \ldots, S_k$ of $v \in V(G)$, then representation of v with respect to Π is defined as the k-vector $r(v|\Pi) = \left(d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k)\right)$. The partition Π is called a resolving partition if the k-vector $r(v|\Pi)$ are distinct. The minimum for which there is a resolving k-partition of $V(G)$ is the partition dimension $pd(G)$ of G. In this study, the partition dimension of generalized Petersen Graph $P_{2k,2}$ for $k = 2$ and $k = 3$ is 3, and for $k \geq 4$ is 4.

Keyword : graph, partition dimension, Petersen graph.

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{2k,2}$ UNTUK $k \geq 2$

Oleh

TITIN AWALATUN KHOLIFAH

Diberikan suatu graf terhubung $G = (V, E)$, dengan $V(G) \neq \emptyset$ menyatakan himpunan titik dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi. Jarak titik v terhadap S untuk $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$ yang didefinisikan $d(v, S) = min\{d(v, x) | x \in S\}$. Untuk suatu k-partisi $\Pi = S_1, S_2, \dots, S_k$ dari $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = \left(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\right)$. Π disebut partisi pembeda jika $r(v|\Pi)$ berbeda. Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$. Pada penelitian ini telah diperoleh dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{2k,2}$ untuk $k = 2$ dan $k = 3$ adalah 3, dan untuk $k \geq 4$ adalah 4.

Kata kunci : graf, dimensi partisi, graf Petersen.

DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{2k,2}$ UNTUK $k \geq 2$

Oleh

TITIN AWALATUN KHOLIFAH

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{2k,2}$ UNTUK $k \geq 2$**

Nama Mahasiswa : Titin Awalatun Kholifah

No. Pokok Mahasiswa : 1517031173

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

   Drs. Suratman, M.Sc.
   NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **31 Mei 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : *Titin Awalatun Kholifah*

Nomor Pokok Mahasiswa : **1517031173**

Judul : **Dimensi Partisi Graf Petersen Diperumum $P_{2k,2}$ Untuk $k \geq 2$**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil dari orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertulis dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 13 Juli 2019

Penulis

Titin Awalatun Kholifah

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Titin Awalatun Kholifah, dilahirkan di Telogorejo pada 21 Agustus 1997, dan merupakan anak pertama dari pasangan suami istri Bapak Muryadi dan Ibu Sumarwati (Almarhumah).

Penulis menyelesaikan pendidikan Taman Kanak-kanak di TK PKK Desa Telogorejo pada tahun 2003, pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Telogorejo Lampung Timur pada tahun 2009, pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 7 Kota Metro yang diselesaikan pada tahun 2012, Sekolah Menengah Atas di MAN 1 Kota Metro yang diselesaikan pada tahun 2015. Kemudian, pada tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu $(S1)$ Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung Bandar Lampung melalui jalur SBMPTN.

Pada bulan Januari-Februari 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT. PLN (Persero) Area Tanjung Karang Bandar Lampung dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Gunung Raya Kecamatan Marga Sekampung Kabupaten Lampung Timur pada bulan Juli-Agustus 2018.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"

(Q.S Al- Baqarah : 286)

"Siapa yang menempuh jalan untuk mencari ilmu, maka Allah akan mudahkan baginya jalan menuju surga"

(Hadis)

"Selama ada kemauan serta tekat yang kuat, pasti ada jalan"

"Jangan pernah kita mengukur kesuksesan dengan menggunakan penggaris orang lain. Karena setiap orang memiliki ukuran kesuksesan yang berbeda-beda"

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT penulis mempersembahkan karya kecil untuk :

Kakek dan nenek tercinta, kedua orang tua, serta seluruh anggota keluarga yang selalu memberikan kasih sayang, cinta, dukungan, motivasi, doa serta bimbingannya untuk menjadikan penulis pribadi yang bisa dibanggakan hingga saat ini.

Sahabat-sahabatku yang tak pernah lelah memberikan semangat, motivasi serta dukungan ketika penulis mulai lengah dan berada pada titik terbawah.

Dosen pembimbing dan penguji yang telah sangat berjasa dalam mengarahkan dan membimbing penulis

Almamaterku Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat, ridho serta karunia-Nya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan .skripsi yang berjudul **“Dimensi Partisi Graf Petersen Diperumum $P_{2k,2}$ Untuk $k \geq 2$”** yang merupakan salah satu syarat untuk mencapai gelar sarjana Sains (S.Si.) pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini banyak pihak-pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikannya, oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing 1 sekaligus Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing serta memberikan saran dalam menyelesaikan skripsi ini, serta pengerahan dan dukungan selama perkuliahan.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan kritik, saran, serta arahan kepada penulis.
3. Bapak Drs. Suharsono S, M.S., M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan pengarahan, evaluasi, serta sarannya kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

5. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staf, serta karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
7. Kakek dan nenek, kedua orang tua, serta keluarga besar penulis yang senantiasa mendukung, mendoakan, serta mengupayakan segala hal yang terbaik untuk penulis.
8. Sahabat seperjuangan Nia Adelia, Nurmala Diniyati, Selvia Milayanti, Tina Nur Anissa, Yomi Mariska, yang telah memberikan semangat, doa, serta dukungan dari awal perkuliahan hingga sekarang.
9. Segenap keluarga besar dan temen-teman mahasiswa Jurusan Matematika angakatan 2015.
10. Semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwasannya skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan. Untuk itu, penulis sangat mengharapkan adanya kritik serta saran yang membangun serta bersifat positif. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat serta menambah wawasan dan materi tambahan serta informasi bagi para pembacanya.

Bandar Lampung, 13 Juli 2019

Penulis

Titin Awalatun Kholifah

DAFTAR ISI

Halaman

V. KESIMPULAN DAN SARAN

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika memiliki peranan yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Persoalan-persoalan yang terjadi dalam kehidupan dapat diterapkan dalam pemodelan matematika. Salah satu pokok bahasan yang menarik dalam ilmu matematika untuk dikaji lebih dalam adalah teori graf. Permasalahan yang sering menggunakan teori graf sebagai solusi penyelesaiannya adalah pencarian lintasan terpendek, optimisasi penjadwalan, dan lain-lain.

Teori graf adalah salah satu bidang ilmu matematika yang penerapannya banyak diterapkan pada kehidupan sehari-hari. Pada tahun 1736, Leonhard Euler memperkenalkan teori graf pertama kali ketika mendiskusikan mengenai persoalan Jembatan Konisberg yang terjadi di kota Kaliningrad Rusia, yaitu tentang bagaimana caranya agar seseorang dapat menyebrang ke semua jembatan tanpa harus melewati jembatan lebih dari satu kali. Publikasi dari permasalahan ini dan usulan solusinya dikenal sebagai permasalahan dari teori graf.

Permasalahan teori graf itu sendiri sangatlah menarik, karena teori graf hanya mempelajari titik dan garis namun memiliki penerapan yang sangat luas dan banyak peneliti yang tertarik untuk melakukan penelitian tentang teori graf. Diantara topik penelitian tersebut adalah pelebelan, pewarnaan, bilangan kromatik, dimensi metrik, dan dimensi partisi. Konsep dimensi partisi diperkenalkan oleh Chartrand, dkk pada tahun 1998. Konsep ini merupakan bentuk lain dari konsep dimensi metrik yang sebelumnya sudah diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 yang menyatakan bahwa himpunan pembeda pada W sebagai titik-titik di graf G sedemikian hingga untuk setiap titik di G diperoleh jarak yang berbeda terhadap setiap titik di W. Dimensi metrik juga disebut sebagai kardinalitas minimum dari himpunan pembeda di W. Selanjutnya, Harary dan Melter pada tahun 1976 pada jurnal yang berjudul *on the metric dimension of a graph* menyatakan bahwa konsep dimensi metrik ini muncul yaitu dengan memperoleh himpunan pembeda (dan himpunan pembeda minimum).

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik untuk menentukan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{2k,2}$; $k \geq 2$, karena sampai saat ini permasalahan dimensi partisi pada suatu graf merupakan permasalahan yang cukup sulit dikarenakan belum adanya teorema yang dapat digunakan untuk menentukan dimensi partisi pada sembarang graf.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{2k,2}$ untuk $k \geq 2$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

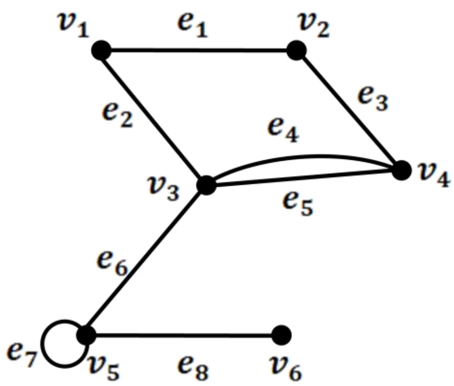
1. Menambah wawasan mengenai dimensi partisi pada suatu graf khususnya graf Petersen.
2. Memberikan pemahaman tentang dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{2k,2}$ untuk $k \geq 2$.
3. Sebagai bahan referensi untuk penelitian lanjutan mengenai dimensi partisi pada graf-graf lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Teori Graf

Graf adalah salah satu pokok bahasan matematika diskrit yang telah lama dikenalkan dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Dalam mempresentasikan visual dari suatu graf yaitu dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik ataupun vertex. Sedangkan hubungan antara objek yang satu dengan lainnya dinyatakan dengan garis, sisi, atau edge (Harary, 1969).

Graf G adalah himpunan terurut $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik yang tak kosong dari G dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G. Misalkan v dan w adalah titik pada graf, jika v dan w dihubungkan oleh sisi e, maka v dan w dikatakan bertetangga $(adjacent)$. Sisi $e = (v, w)$ dikatakan menempel $(incident)$ dengan titik v dan w demikian juga titik v dan w menempel pada sisi e. Lingkungan $(Neigborhood)$ dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v (Deo, 1989).



Gambar 1. Graf dengan 6 titik dan 8 sisi

Pada Gambar 1, Graf $G(V, E)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Titik v_1 bertetengga dengan titik v_2, sedangkan v_1 dan v_2 menempel dengan e_1. Derajat ($degree$) dari v adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v. Derajat dari titik $v \in V(G)$ dinotasikan $d(v)$. Daun ($pendant\ vertex$) adalah titik digraph yang berderajat satu. Pada Gambar 1 $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 4$, $d(v_6) = 1$.

$Loop$ adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak memiliki sisi paralel atau $loop$ disebut graf sederhana. Graf pada Gambar 1 bukan merupakan graf sederhana karena terdapat $loop$, yaitu pada titik v_5 dan sisi paralel pada titik v_3 dan v_4. Pada graf terhubung G, jarak antara dua titik x dan y adalah panjang lintasan terpendek diantara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan $d(x, y)$. Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan ($walk$), lintasan ($path$) dan sirkuit ($circuit$). Jalan ($walk$) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh jalan berdasarkan Gambar 1 adalah $v_6 - e_8 - v_5 - e_7 - v_5 - e_6 - v_3 - e_2 - v_1 - e_1 - v_2 - e_3 - v_4 - e_4 - v_3 - e_6 - v_5 - e_8 - v_6$.

Lintasan adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda. Graf G dikatakan graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Pada Gambar 1 contoh lintasan $v_6 - e_8 - v_5 - e_6 - v_3 - e_2 - v_1 - e_1 - v_2 - e_3 - v_4$.

Sirkuit adalah lintasan tertutup, yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil. Contoh sirkuit berdasarkan pada Gambar 1 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_3 - v_4 - e_4 - v_3 - e_2 - v_1$.

Lemma 2.1.1. (Deo, 1989) Jumlah derajat semua titik pada graf G adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain jika $G(V, E)$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e \qquad (1)$$

Jumlah derajat seluruh titik pada Gambar 1 adalah $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) + d(v_6) = 2 + 2 + 4 + 3 + 4 + 1 = 16$ (dua kali jumlah sisi).

Teorema 2.1.1. (Deo, 1989) Untuk sembarang graf G, banyaknya titik yang berderajat ganjil, selalu genap.

Bukti : Misalkan V_{genap} dan V_{ganjil} masing-masing adalah himpunan-himpunan titik yang berderajat genap dan berderajat ganjil pada $G(V,E)$. Persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{V_{genap}} d(v_j) + \sum_{V_{ganjil}} d(V_k) \tag{2}$$

Karena $d(v_j)$ untuk setiap $v_j \in V_{genap}$, maka suku pertama dari ruas kanan persamaan harus bernilai genap. Ruas kiri persamaan juga harus bernilai genap. Nilai genap pada ruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga harus genap. Karena $d(v_k)$ untuk setiap $v_k \in V_{ganjil}$, maka banyaknya titik v_k di dalam V_{ganjil} harus genap agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap.

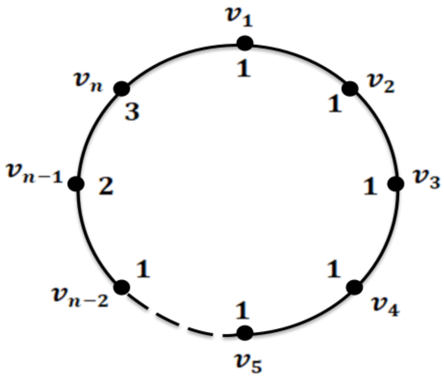
2.2 Dimensi Partisi Graf

Sebelumnya akan diberikan definisi dari dimensi dan partisi secara umum. Dimensi didefinisikan sebagai jumlah minimal koordinat yang dibutuhkan untuk menentukan titik-titik yang ada dalam suatu ruang atau objek. Sedangkan partisi didefinisikan sebagai pengelompokkan anggota himpunan dimana setiap kelompok memiliki anggota yang berbeda dan setiap anggota masuk dalam satu kelompok tertentu. Dimensi partisi yaitu minimum panjang lintasan terpendek antara titik pada suatu graf terhadap k-partisi, adapun panjang lintasan yaitu banyaknya jumlah sisi yang dilewati antara titik pada suatu graf terhadap k-partisi. Selanjutnya, akan diberikan definisi dimensi partisi pada suatu graf, teorema-teorema dan beberapa contoh graf yang sudah diperoleh dimensi partisinya.

Diberikan suatu graf terhubung $G = (V, E)$, dengan $V(G) \neq \emptyset$ menyatakan himpunan titik dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi. Ambil sembarang titik u dan v di $V(G)$, jarak $d(u, v)$ antara titik u dan v pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari kedua titik tersebut. Sedangkan jarak terpanjang antara dua titik pada $V(G)$ didefinisikan sebagai diameter dari graf G, yang dinotasikan $diam(G)$. Misalkan terdapat titik $v \in V(G)$ dan S adalah himpunan bagian dari $V(G)$. Jarak titik v terhadap S adalah $d(v, S) = min\{d(v, x) | x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \dots, S_k$ adalah kelas-kelas dari Π. Representasi v terhadap Π yang dinotasikan dengan $r(v|\Pi)$, adalah k-pasang terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots , d(v, S_k))$. Selanjutnya, Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$.

Teorema 2.2.1 (Chartrand dkk, 1998) Dimensi partisi graf siklus C_n untuk $n \geq 3$ adalah 3.

Bukti :



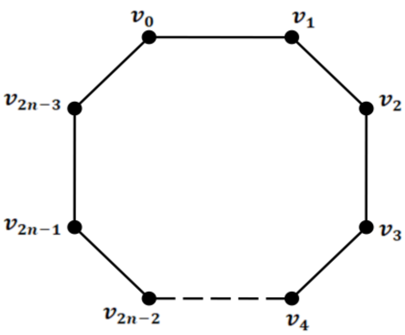
Gambar 2. Dimensi Partisi Graf Siklus C_n

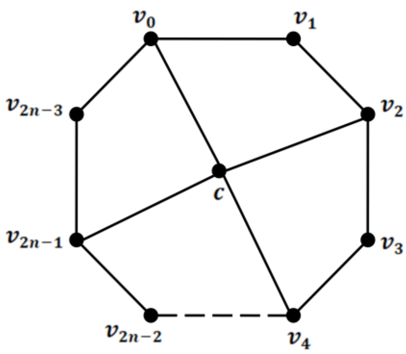
Graf siklus C_n dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_{n-2}\}$, $S_2 = \{v_{n-1}\}$, $S_3 = \{v_n\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi) = (0,2,1)$, $r(v_2|\Pi) = (0,3,2)$, $r(v_3|\Pi) = (0,4,3)$, $r(v_4|\Pi) = (0,5,4)$, $r(v_5|\Pi) = (0,6,5)$, … , $r(v_{n-2}|\Pi) = (0,1,2)$, $r(v_{n-1}|\Pi) = (1,0,1)$, $r(v_n|\Pi) = (1,1,0)$. Karena representasi dari semua titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf siklus C_n dan $pd(C_n) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(C_n) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dari C_n dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_{n-1}\}$, $S_2 = \{v_n\}$, maka titik v_1 dan v_{n-1} akan memiliki representasi yang sama yaitu $(0,1)$, hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, $pd(C_n) \geq 3$, akibatnya $pd(C_n) = 3$. ■

Misalkan diberikan graf siklus genap C_{2n}, $n \geq 2$ dengan $V(C_{2n}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}\}$ dan $E(C_{2n}) = \{v_i v_{i+1} | i = 0,1,2, \dots, 2n-2\} \cup$

$\{v_{2n-1}v_0\}$. Untuk mengkonstruksi graf gir G_{2n}, tambahkan satu titik baru, notasikan dengan c, yang bertetangga dengan n titik di C_{2n}, dengan ketentuan, untuk $i = 0$ atau 1, tambahkan sisi-sisi $cv_i, cv_{i+2}, cv_{i+4}, \dots, cv_{i+(2n-2)}$. Jadi $V(G_{2n}) = \{v_i | i = 0,1, \dots, 2n-1\}$ dan $E(G_{2n}) = \{cv_j | j = 0,2, \dots, 2n-2\} \cup E(C_{2n})$. Dapat dilihat bahwa banyaknya titik graf gir G_{2n} adalah $2n+1$, sementara banyaknya sisi graf gir G_{2n} adalah $3n$. Pada Gambar 3 berikut diberikan gambar C_{2n} dan G_{2n} sebagaimana yang telah didefinisikan di atas.





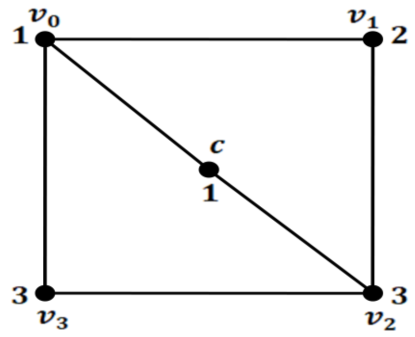
Gambar 3. Graf siklus genap C_{2n} dan graf gir G_{2n}

Definisi 2.2.1 dan Definisi 2.2.2 berikut memberikan pengertian dari jarak antara dua titik dan jarak antara satu titik terhadap suatu himpunan pada suatu graf.

Definisi 2.2.1. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan misalkan $S \subseteq V$. Misalkan terdapat suatu titik $v \in V$. Maka jarak titik v terhadap S didefinisikan sebagai $d(v, S) = min\{d(v, x) | x \in S\}$.

Definisi 2.2.2. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan $u, v \in V$ adalah dua titik sebarang di G. Diameter G didefinisikan sebagai jarak maksimum antara setiap dua titik di G, dinotasikan $diam(G) = max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$.

Contoh :



Gambar 4. Konstruksi Graf Gir G_4

Graf gir dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{c, v_0\}$, $S_2 = \{v_1\}$, $S_3 = \{v_2, v_3\}$. Akan ditunjukkan bahwa $pd(G_4) = 3$. Ambil titik $c \in S_1$ maka representasi titik c terhadap Π adalah $(c|\Pi) = (d(c, S_1), d(c, S_2), d(c, S_3)) = (0,2,1)$. Selanjutnya ambil titik $v_0 \in S_1$ maka $r(v_0|\Pi) = (0,1,1)$. Dengan cara yang sama diperoleh :

$$r(v_1|\Pi) = (1,0,1)$$

$$r(v_2|\Pi) = (1,1,0)$$

$$r(v_3|\Pi) = (1,2,0)$$

Dapat dilihat bahwa untuk sebarang titik v di G_4 mempunyai representasi $r(v|\Pi)$ yang berbeda, maka haruslah $pd(G_4) = |\Pi| = 3$. ∎

Teorema 2.2.2 Diketahui $x, y, z \in \mathbb{R}$. Diperoleh pernyataan-pernyataan di bawah ini bernilai benar :

(i) Jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.

(ii) Tepat satu terjadi, $x < y$, $y < x$ atau $x = y$.

(iii) Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$.

Bukti :

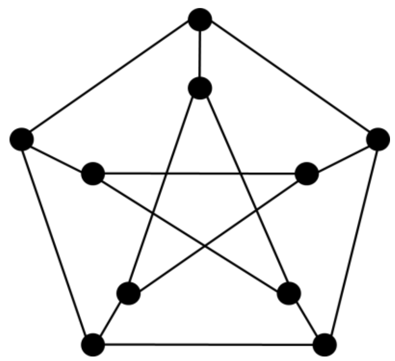
(i) $x < y$ dan $y < x \Leftrightarrow y - x \in P$ dan $z - y \in P \Leftrightarrow z - x = (z - y) + (y - x) \in P \Leftrightarrow x < z$

(ii) menurut sifat trikhotomi himpunan P, tepat satu terjadi $y - x \in P$, $-(y - x) \in P$, atau $y - x = 0$ yang ekuivalen dengan $x < y$, $y < x$, atau $x = y$.

(iii) Diketahui $x \leq y$ dan $y \leq x$. Andaikan $x \neq y$, tentu $x \leq y$ dan $y \leq x$, suatu kontradiksi.

2.3 Graf Petersen

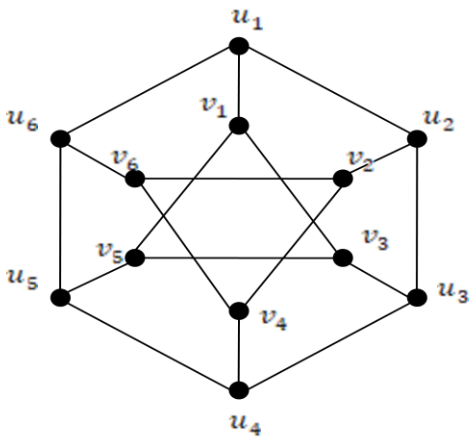
Graf Petersen adalah graf yang memiliki 10 titik, 15 sisi, dan setiap titiknya berderajat 3 dengan 5 titik diluar dan 5 titik di dalam yang dihubungkan dengan 5 sisi (Watkins, 1969).



Gambar 5. Graf Petersen

2.4 Graf Petersen Diperumum

Misalkan $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ menyatakan banyaknya titik lingkaran luar dan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menyatakan banyaknya titik lingkaran dalam untuk $n \geq 3$. Graf Petersen diperumum dinotasikan dengan $P_{n,k} \geq 3, 1 \leq k \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, 1 \leq i \leq n$ adalah graf yang memiliki $2n$ titik $\{u_i\} \cup \{v_i\}$ dan sisi $\{u_i \rightarrow u_{i+1}\} \cup \{v_i \rightarrow v_{i+k}\} \cup \{u_i, v_i\}$.



Gambar 6. Graf Petersen $P_{6,2}$

Pada Gambar 6 diatas merupakan salah satu jenis graf Petersen yang telah diperumum berderajat 3 dengan $n = 6$, dan $k = 2$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2018/2019 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Mempelajari dan memahami materi-materi tentang dimensi partisi dan graf Petersen.
2. Mengkonstruksi graf Petersen $P_{2k,2}$ untuk $k \geq 2$.
3. Memilih titik tertentu pada graf Petersen $P_{2k,2}$ yang akan dijadikan sebagai titik awal .
4. Menentukan batas bawah dari $pd(P_{2k,2})$ untuk $k \geq 2$ dengan pembuktian kontradiksi.
5. Menentukan batas atas $pd(P_{2k,2})$ untuk $k \geq 2$. Batas atas dari $pd(P_{2k,2})$, dapat diperoleh dengan mengkonstruksi graf Petersen $P_{2k,2}$ untuk $k \geq 2$.

Himpunan titik pada graf $P_{2k,2}$ dikelompokkan ke dalam beberapa kelas partisi pembeda. Dari jumlah minimum partisi pembedanya itulah batas atas dari dimensi partisi graf Petersen ($P_{2k,2}$) untuk $k \geq 2$.

6. Mencari perumusan umum dari dimensi partisi graf Petersen ($P_{2k,2}$) untuk $k \geq 4$.

V. KESIMPILAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Dimensi partisi graf Petersen $P_{4,2}$ dan $P_{6,2}$ adalah 3.
2. Dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{2k,2}$ untuk $k \geq 4$ adalah 4.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan dimensi partisi dari graf Petersen $P_{2k,k}$ untuk $k > 2$.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. 1998. On The Partition Dimension of Graph. *Congr Numer*., **130**, 157-168.

Deo, N. 1989. *Graphs Teory With Aplications to Engineering and Computer Science.* Prentice-Hall, New York.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Wesley Publishing Company, Inc.

Harary, F., & Melter, R. 1976. On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combin*., **2**, 191 – 195.

Riza, R. 2012. Dimensi Partisi Graf Gir. *Jurnal Matematika UNAND*., **1**(2), 21-27.

Slater, P. 1975. Leaves of Trees. *Congr Numer*., **14**, 549 – 559.

Watkins, M.E. 1969. A Theorem on Tait Colorings with Application to The Generalized Petersen Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*., **6**, 152-164.