INVERS MOORE-PENROSE MATRIKS NON-BUJUR SANGKAR

(Skripsi)

Oleh

Afrisca Hartianeza

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2019

ABSTRACT

INVERSE MOORE – PENROSE MATRIX NON – SQUARE

By
Afrisca Hartianeza

Determinants are an important concept in finding the inverse of a matrix. Based on the research that has been done about the concept of determinant in a non – square matrix, it shows that the inverse value of a non – square matrix can also be determined. Inverse Moore – Penrose is the inverse of a non – square matrix denoted by A^+. The purpose of this study is to determine the inverse Moore – Penrose of a non – square matrix and apply it to the system solution of linear equations using the Gauss – Jordan elimination method and the Moore – Penrose inverse method.

From the discussion it can be concluded that non – square matrix inverses can be determined if they fulfill the four conditions of Moore – Penrose. Not all square inverse properties also apply to the Moore – Penrose inverse. In the same system of linear equations, namely the marix $m \times n$ with $m < n$ or $m > n$ using the Jordan Gauss elimination method the solution obtained are many, single or no solutions whereas the inverse method of Moore – Penrose the solution obtained is single and there is no solution.

Keyword : Determinants, Inverse Moore – Penrose, Matrix non – square

ABSTRAK

INVERS MOORE – PENROSE MATRIKS NON – BUJUR SANGKAR

Oleh
Afrisca Hartianeza

Determinan merupakan suatu konsep penting dalam mencari invers suatu matriks. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan mengenai konsep determinan pada matriks non – bujur sangkar, menunjukkan bahwa nilai invers dari matriks non bujur sangkar juga dapat ditentukan. Invers Moore – Penrose adalah invers dari matriks non bujur sangkar yang dinotasikan dengan A^+. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan Invers Moore Penrose dari suatu matriks non-bujur sangkar dan mengaplikasikannya pada solusi sistem persamaan linier menggunakan metode eliminasi Gauss – Jordan dan metode invers Moore – Penrose.

Dari pembahasan dapat disimpulkan bahwa invers matriks non – bujur sangkar dapat ditentukan jika memenuhi keempat syarat dari Moore – Penrose. Tidak semua sifat invers bujur sangkar juga berlaku pada invers Moore – Penrose. Pada sistem persamaan linear yang sama yaitu matriks $m \times n$ dengan $m < n$ atau $m > n$ menggunakan metode eliminasi Gauss - Jordan solusi yang didapatkan adalah banyak,tunggal atau tidak ada solusi sedangkan dengan metode invers Moore – Penrose solusi yang didapat adalah tunggal dan tidak ada solusi.

Kata Kunci : Determinan, Invers Moore – Penrose, Matriks non – bujur sangkar

INVERS MOORE – PENROSE MATRIKS NON – BUJUR SANGKAR

Oleh

Afrisca Hartianeza

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
Sarjana Sains

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **INVERS MOORE - PENROSE MATRIKS NON - BUJUR SANGKAR**

Nama Mahasiswa : *Afrisca Hartianeza*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031109

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dorrah

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.
NIP 19610128 198811 2 001

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

   Sekretaris : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

   Drs. Suratman, M.Sc.
   NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **06 Marret 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Afrisca Hartianeza**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1517031109**
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: Invers Moore – Penrose Matriks Non – Bujur Sangkar

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institute lain.

Bandar Lampung,

Yang Menyatakan,

METERAI TEMPEL 0AF22AFF803149116 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Afrisca Hartianeza

NPM. 1517031109

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 29 April 1997 di Bandar Lampung. Terlahir dari keluarga yang sederhana dari pasangan Bapak Budi Hartono dan Ibu Puji Wati, merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Kakak dari Meyrisca Dwi Hartia.

Penulis menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 3 Gedong Air pada tahun 2009. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 10 Bandar Lampung pada tahun 2012. Pendidikan sekolah menengah atas di SMK Negeri 2 Bandar Lampung jurusan Teknik Komputer dan Jaringan pada tahun 2015. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN pada tahun 2015 dan mendapatkan bantuan beasiswa dari ristekdikti yaitu Bidikmisi.

Pada periode 2016/2017 penulis terdaftar sebagai anggota bidang Kesekretariatan UKMF Natural, lalu pada periode 2017 menjadi sekretaris bidang Kesekretariatan UKMF Natural Fakultas Matermatika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah mlaksanakan Kerja Praktik (KP) selama empat puluh hari di PTPN 7 Pewa Natar Kabupaten Lampung Selatan. Dan sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata selama 32 hari di Desa Taman Endah, Kecamatan Purbolinggo, Kabupaten Lampung Timur, Provinsi Lampung.

MOTTO

"Sukses itu ketika kita gagal lalu bangkit sampai Berhasil"

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kadar kesanggupannya"

(QS. Al Baqarah : 286)

"Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum hingga mereka mengubah diri mereka sendiri"

(QS. Ar – Ra'd : 11)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Dengan segala ketulusan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Kedua orang tuaku yang selalu tulus mendoakan setiap waktu, membimbing, dan selalu memberikan semangat untuk keberhasilan penulis.

Untuk adikku tersayang yang selalu memberikan keceriaan,semangat dan dukungan serta do'a yang tak pernah henti untukku..

Untuk seluruh dosen matematika, terutama dosen pembimbing dan pembahas yang telah memberikan bimbingan serta saran terbaiknya dalam penyelesaian skripsi ini.

Untuk sahabat-sahabat terbaikku, terimakasih untuk semua kebahagian dan kebaikan tulus yang telah kalian berikan untukku, kalian adalah sahabat sahabat terbaik yang selalu ada, terimakasih atas semua cerita indah yang tidak terlupakan.

SANWACANA

Dengan menyebut nama Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Puji dan syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpakan rahmat dan hidayah-Nya sehingga skripsi yang berjudul “Invers Moore – Penrose matriks non – bujur sangkar” dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Dalam penyusunan skripsi ini banyak kendala yang dihadapi, diantaranya keterbatasan waktu dan materi yang diperlukan dalam penyelesaian tulisan dan pengalaman untuk menulis yang masih terbatas. Namun, atas bantuan dari berbagai pihak skripsi ini dapat diselesaikan tepat pada waktunya. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Azis.,M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah bersedia untuk membimbing, memberikan saran, dan masukan demi terselesaikannya laporan ini.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S. Si., M. Si. Selaku dosen pembimbing kedua yang telah membimbing dan memberikan pengarahan pada penulis selama proses penyelesaian skripsi ini.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S. Si., M. Si. selaku dosen pembahas yang telah memberikan kritik dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.

4. Ibu Prof. Dra. Wamilina, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. La Zakaria, S.Si.,M.Sc., selaku Pembimbing Akademik yang selalu memberikan bimbingan kepada penulis hingga sekarang.
6. Seluruh dosen dan staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Kedua orangtuaku Bapak Budi Hartono dan Ibu Puji Wati serta adikku Meyrisca Dwi Hartia yang selalu memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini
8. Sahabatku Neli Rohmatilah, Annisa Septiana, Elita Dwi Putriani, Hanny Ayu Mutiara, Risna Fitriyani, Arrahman Rahim dan Rendito yang telah menjadi teman berbagi dan banyak memberikan semangat di perkuliahan.
9. Rio Nurman Saputra, sahabat spesial tempat berbagi ide, serta pemberi saran terbaik.
10. Partner kerja praktik Elisabeth Dastia W, Dina Shabrina, dan Wulan Hikmatul Sholehah.
11. Teman belajar menuju ujian skripsi Dina Shabrina ,dan Dwi Wahyu Lestari.
12. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat berguna bagi setiap pembaca. Penulis terbuka untuk saran dan kritik demi kesempurnaan skripsi ini.

Bandar Lampung,   Februari 2019
Penulis

Afrisca Hartianeza

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN 1

1.1. Latar Belakang dan Masalah 1
1.2. Tujuan Penelitiam 2
1.3. Manfaat Penelitian 2

II. TINJAUAN PUSTAKA 3

2.1. Matriks 3
2.2. Operasi Aljabar Matriks 4
2.2.1. Penjumlahan dua matriks 4
2.2.2. Perkalian bilangan skalar dengan suatu matriks 4
2.2.3. Perkalian dua matriks 5
2.3. Rank Matriks 5
2.4. Transpose suatu matriks 6
2.4.1. Sifat – sifat transpose matriks 7
2.4.2. Transpose Konjugate 8
2.5. Matriks Invers 9
2.5.1. Sifat – sifat Invers 9
2.6. Invers Moore – Penrose 10
2.7. Determinan matriks $n \times n$ 11
2.8. Determinan matriks $m \times n$ 11
2.9. Matriks Adjoin *(Classical Adjoint)* 12
2.10. Sistem persamaan Linier dengan mariks 13

III. METODOLOGI PENELITIAN 16

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian 16
3.2. Data Penelitian 16
3.3. Metode Penelitian 16

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN 18

4.1. Invers Matriks Non- Bujur Sangkar 18
4.2. Invers Moore – Penrose Matriks Non – Bujur Sangkar 22
4.2.1. Matriks $m \times n$ dengan $m > n$ 22
4.2.2. Matriks $m \times n$ dengan $m < n$ 25
4.2.3. Invers Moore – Penrose pada Matriks Kompleks Non – Bujur Sangkar 29
4.3. Sifat – sifat Invers pada Invers Moore – Penrose 35
4.4. Aplikasi Invers Moore – Penrose matriks Non – Bujur Sangkar pada Sistem Persamaan Linier 39

V. SIMPULAN DAN SARAN 61

5.1. Simpulan 61
5.2. Saran 62

DAFTAR PUSTAKA

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matriks merupakan salah satu bidang kajian dalam matematika yang lebih dikhususkan dalam kajian aljabar linear. Konsep determinan yang selama ini dikenal hanya berlaku untuk matriks bujur sangkar, kini telah dikembangkan konsep tentang determinan pada matriks non-bujur sangkar. Melalui definisi (Radic, 2005) matriks non-bujur sangkar dapat ditentukan determinannya.

Determinan merupakan suatu konsep penting dalam mencari invers suatu matriks. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan (Andi, 2014) mengenai konsep determinan pada matriks non – bujur sangkar, menunjukkan bahwa nilai invers dari matriks non bujur sangkar juga dapat ditentukan.

Invers Moore – Penrose adalah invers dari matriks non bujur sangkar yang dinotasikan dengan A^{+}. Invers Moore – Penrose merupakan perluasan dari konsep invers matriks. Maka dalam tugas akhir ini akan dibahas lebih lanjut mengenai Invers Moore – Penrose pada matriks non – bujur sangkar $m \times n$ yang kemudian akan diaplikasikan ke dalam sistem persamaan linier dan akan dibahas apakah sifat – sifat Invers juga berlaku pada Invers Moore – Penrose.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun penelitian ini bertujuan untuk menentukan Invers Moore Penrose dari suatu matriks non-bujur sangkar dan mengaplikasikannya untuk mencari solusi sistem persamaan linier.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui apakah matriks non - bujur sangkar memiliki invers
2. Dapat menentukan invers moore penrose suatu matriks non-bujur sangkar.
3. Mengetahui apakah sifat – sifat Invers juga berlaku pada Invers Moore – Penrose.
4. Bertambahnya pengetahuan mengenai invers matriks non – bujur sangkar.
5. Dapat menentukan solusi sistem persamaan linier menggunakan invers Moore – Penrose.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan – bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut.

Beberapa contoh matriks adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalnya, matriks pertama dalam contoh diatas mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (ditulis 3×2). Dalam suatu uraian ukuran, angka pertama selalu menyatakan jumlah baris dan angka kedua menyatakan jumlah kolom. Sebuah matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom**,** dan sebuah matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris (Anton, 2000).

2.2 Operasi Aljabar Matriks

2.2.1 Penjumlahan dua matriks

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

Syarat penjumlahan dua matriks atau pengurangan dua matriks adalah mempunyai ordo yang sama.

Contoh 2.2.1

Diketahui $A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

Maka, $C_{2\times3} = A_{2\times3} + B_{2\times3}$

$$C_{2\times3} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 11 \\ 9 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Perkalian Bilangan Skalar dengan Suatu Matriks

Masing – masing elemen matriks tersebut dikalikan dengan bilangan skalar.

Contoh 2.2.2. Misalkan bilangan scalar $k = 3$, dan Matriks $A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Maka, $B_{2\times3} = k \times A_{2\times3}$

$$B_{2\times3} = 3 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Perkalian Dua Matriks

Perkalian 2 matriks

A : matriks berukuran $m \times k$

B : matriks berukuran $k \times n$

$$A \,.\, B = A_{m\times k} \times B_{k\times n} = AB_{m\times n}$$

Jika matriks A berukuran $m \times n$ dan B berukuran $p \times q$maka :

1. Perkalian matriks AB berordo $m \times q$ bisa dibentuk hanya jika $n = p$
2. Perkalian matriks BA berordo $p \times n$ bisa dibentuk hanya jika $q = m$
3. AB tidak selalu sama dengan BA (walaupun $m = n = p = q$)

Syaratnya adalah setiap baris pada matriks pertama harus dikalikan pada setiap kolom pada matriks kedua dan banyaknya kolom pada matriks pertama harus sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua (Gazali, 2005).

2.3 Rank Matriks

Rank suatu matriks dapat digunakan untuk menentukan ada tidaknya suatu solusi solusi dari sistem persamaan linier. Apabila besarnya rank matriks A sama dengan jumlah baris atau kolom maka persamaan itu mempunyai solusi yang unik (*unique solution*) dan matriks A disebut *Full Rank Matrix.* Akan tetapi apabila besarnya nilai rank itu lebih kecil daripada banyak baris atau kolom maka persamaan itu tidak mempunyai pemecahan dan matriks koefisien A disebut *Non Full Rank*

Matrix. Nilai rank dari suatu matriks dapat dicari menggunakan transformasi elementer. Dengan cara ini besarnya rank suatu matriks dapat diketahui dengan melihat determinan yang tak nol dari minor matriks dengan jumlah baris dan kolom tertentu. Jumlah baris atau kolom itulah yang menentukan besarnya nilai rank (Supranto, 2003:112).

2.4 Transpose suatu matriks

Menurut (Anton, 2000), jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose A, dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari A; yaitu, kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, dan seterusnya.

Berikut ini adalah beberapa contoh matriks dan transposnya.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad D = [4]$$

Amati bahwa tidak hanya kolom dari A^T menjadi baris A, tetapi baris dari A^T juga menjadi kolom A. Jadi, anggota dalam baris i dan kolom j dari A^T adalah anggota dalam baris j dan kolom i dari A , yaitu,

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

2.4.1 Sifat – sifat Transpose Matriks

Sifat – sifat transpose matriks adalah sebagai berikut.

a. Transpose dari transpose suatu matriks adalah matriks itu sendiri atau matriks aslinya. $[A^T]^T = A$.

   Bukti:

   Misalnya $A = [a_{ij}]$, maka = $A^T = [a_{ji}]$, sehingga $[A^T]^T = a_{ij}] = A$.

b. Transpose dari suatu jumlah atau selisih matriks adalah jumlah atau selisih matriks masing – masing transpose.

$$[A \pm B]^T = A^T \pm B^T$$

   Bukti:

$$[A \pm B]^T = A^T \pm B^T$$

$$= \; a_{ij} \pm b_{ij}]^T$$

$$= \; C_{ji}]^T$$

$$= \; C_{ji}]$$

$$= [a_{ji} \pm b_{ji}]$$

$$= A^T \pm B^T$$

   Terbukti bahwa $[A \pm B]^T = A^T \pm B^T$

c. Transpose dari suatu hasil kali matriks adalah perkalian dari transpose – transpose dalam urutan terbalik.

   $[AB]^T = B^T A^T$ atau $[ABC]^T = C^T B^T A^T$

Bukti:

Misalnya $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ maka elemen pada baris ke – i dan kolom ke – j dari AB adalah:

$a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, yang merupakan juga elemen pada baris ke$-j$ dan kolom ke$-i$ dari $(AB)^T$. Di lain pihak, baris ke-j dari B^T adalah kolom ke$-j$ dari B yaitu $(b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj})$ dan kolom ke$-i$ dari A^T adalah baris ke$-i$ dari A yaitu $\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$. Jadi, elemen pada baris ke$-j$ dan kolom ke$-i$ dari B^TA^T adalah $[b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj}] \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix} = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{nj}a_{in} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

Hal ini benar untuk semua i dan j sehingga $(AB)^T = B^TA^T$ (Abdul, 2014).

2.4.2 Transpose Konjugate

Menurut Harini (1985), bila matriks $A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks kompleks, kita mengenal adanya transpose hermitian (*conjugate transpose*), ditulis $A^H = \overline{(a_{ij})}^T = (\overline{a_{ji}})$.

Contoh 2.3.2. Bila $A = \begin{bmatrix} 2-i & 3+i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ maka $A^H = \begin{bmatrix} 2+i & i \\ 3-i & 2 \end{bmatrix}$

2.5 Matriks Invers

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B, sehingga $AB = BA = I_n$. Matriks B disebut invers matriks A, ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo n (Suryadi, 1984).

Contoh 2.4. Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ mempunyai invers $A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

karena $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

2.5.1 Sifat – sifat Invers

a. Jika B dan C kedua – duanya adalah invers dari matriks A maka, $B = C$.

b. Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $invertibel$ jika $ad - bc \neq 0$, dan inversnya dapat dihitung sesuai dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & -\dfrac{b}{ad - bc} \\ -\dfrac{c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

c. Jika A dan B adalah matriks – matriks yang *invertibel* dengan ukuran yang sama, maka AB *invertibel* dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Anton & Rorres, 2004).

2.6 Invers Moore – Penrose

Invers Moore – Penrose adalah invers dari matriks non bujur sangkar yang dinotasikan dengan A^{+}. Invers Moore – Penrose merupakan perluasan dari konsep invers matriks. Jika invers matriks yang sudah di kenal adalah invers dari suatu matriks bujur sangkar dan non singular (determinannya tidak nol), maka Invers Moore – Penrose ada untuk setiap matriks baik matriks bujur sangkar yang singular maupun yang non bujur sangkar (Thomas, 2007).

Definisi 2. Misalkan A suatu matriks $m \times n$. Matriks A dikatakan mempunyai Invers Moore – Penrose jika terdapat matriks X yang memenuhi:

$$(1)\ AXA = A$$

$$(2)\ XAX = X$$

$$(3)(AX)^{*} = AX$$

$$(4)(XA)^{*} = XA$$

A^{*} di atas merupakan *conjugate* transpose dari matriks A, jika anggota - anggota dari $A \in R$ maka $A^{*} = A^{T}$ (A^{*} dibaca A Hermitian) serta X di atas merupakan invers matriks dari A.

2.7 Determinan matriks $n \times n$

Determinan adalah suatu fungsi khusus yang mengasosiasikan suatu bilangan real dengan suatu matriks bujursangkar.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$. Pernyataan $ad - bc$ begitu sering muncul dalam matematika sehingga mendapat sebutan ***determinan*** dari matriks A dan dinyatakan sebagai $\det(A)$.

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

di mana Σ manunjukkan bahwa suku – suku harus dijumlahkan untuk semua permutasi $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ dan tanda $+$ atau – dipilih untuk setiap suku tergantung pada apakah permutasinya genap atau ganjil (Anton, 2004).

2.8 Determinan matriks $n \times n$

Pada penelitian yang telah dilakukan oleh Andi Saparuddin Nur yaitu konsep determinan matriks non – bujur sangkar menggunakan metode dari Radic (Amiry, Fathy, Bayat, 2010) dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 1 (Definisi Radic)

Jika $A = (a_{i,j})$ berordo $m \times n$ dengan $m < n$, $\det(A)$ diberikan oleh:

$$Det\ (A) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} (-1)^{r+s} det \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix}$$

Dimana $j_1, j_2, \dots, j_m \in N, r = 1 + 2 + \cdots + m\ dan\ s = j_1 + j_2 + \cdots + j_m$

Jika $m > n$ didefinisikan $\det(A) = 0$.

Contoh:

Tentukan determinan dari $P = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$!

Jawab :

$$Det\ P = (-1)^{(1+2)+(1+2)} det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2)+(2+3)} det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2$$

2.9 Matriks Adjoin (Classical Adjoint)

Menurut Suryadi (1984), jika kita pandang matriks $A = (a_{ij})$, kita sebut kofaktor dari elemen a_{ij} sebagai A_{ij}, maka transpose dari matriks (A_{ij}) disebut **Matriks Adjoin** dari A.

$$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.7.

Kita akan mencari mariks adjoin dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Maka kofaktor dari kesembilan elemen dari A adalah sebagai berikut:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18 \quad , \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \, ,$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad , \qquad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \, ,$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 \quad , \qquad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10 \quad , \qquad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{33} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 \, ,$$

Jadi adj $A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

Dengan pertolongan matriks adjoin kita dapat mencari invers suatu matriks, menggunakan rumus :

$A^{-1} = \frac{adj\ A}{\det(A)}$, dengan syarat $\det(A) \neq 0$.

2.10 Sistem Persaman Linier dengan Matriks

Suatu persamaan linier dalam n peubah (*variable*) adalah persamaan dengan bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah bilangan – bilangan real dan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah peubah. Dengan demikian maka suatu sistem linier dari m persamaan dalam n peubah adalah satu sistem berbentuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad (1)$$

di mana a_{ij} dan b_i semuanya adalah bilangan – bilangan real.

Dapat dilihat bahwa sistem persamaan linier tersebut dapat di representasikan sebagai persamaan perkalian matriks $Ax = b$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ berukuran } m \times n,$$

Matriks $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan matriks $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ adalah matriks kolom. Untuk selanjutnya jika disebut sistem $Ax = b$ berarti ekuivalen dengan menyebutkan sistem persamaan linier dengan n variabel dan m persamaan yang dapat dipresentasikan sebagai sistem persamaan perkalian matriks $Ax = b$. Jika $b_1, b_2, \dots, b_n$ semuanya nol maka sistem ini disebut sistem persamaan linier homogen. Jika terdapat $b_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$ maka disebut sistem persamaan linier tak homogen. Sistem – sistem bentuk (1) disebut sebagai sistem linier $m \times n$. Berikut adalah contoh sistem linier:

a. $x_1 + 2x_2 = 5$
   $2x_1 + 3x_2 = 8$
b. $x_1 - x_2 + x_3 = 2$
   $2x_1 + x_2 - x_3 = 4$
c. $x_1 + x_2 = 2$
   $x_1 - x_2 = 1$
   $x_1 \qquad = 4$

Sistem (a) adalah sistem 2×2, (b) adalah sistem 2×3, dan (c) adalah sistem 3×2. Jika sistem linier tidak memiliki penyelesaian makan dikatakan bahwa sistem tersebut tak konsisten. Jika sistem linier mempunyai paling sedikit satu penyelesaian, maka dikatakan bahwa sistem tersebut konsisten. Himpunan semua penyelesaian dari sistem linier disebut himpunan penyelesaian dari sistem. Jika suatu sistem takkonsisten , maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong. Suatu sistem konsisten akan memiliki suatu himpunan penyelesaian yang tak kosong (Leon, 2001:1-2).

Teorema 2.10.1

Jika A adalah suatu matriks yang invertibel, maka untuk setiap matriks $b, n \times 1$, sistem persamaan $Ax = b$ memiliki tepat satu solusi, yaitu $x = A^{-1}b$ (Anton & Rorres, 2004).

Bukti:

Karena $AA^{-1}b = b$, maka $x = A^{-1}b$ adalah solusi untuk $Ax = b$. Untuk menunjukkan bahwa ini merupakan satu – satunya solusi, dapat diasumsikan bahwa x_0 adalah solusi sembarang, maka $Ax_0 = b$. Dengan mengalikan kedua sisi A^{-1}, diperoleh $x_0 = A^{-1}b$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil, tahun ajaran 2018/2019 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini diperoleh dengan mengkaji jurnal dan buku-buku teks yang berkaitan dengan bidang yang diteliti.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literature secara sistematis yang diperoleh dari buku – buku, jurnal, maupun media lain untuk mendapatkan informasi sebanyak mungkin guna mendukung penulisan skripsi ini. Adapun langkah – langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan studi kepustakaan yang berhubungan dengan matriks dan invers.
2. Mempelajari dan memahami definisi dan teorema yang berkaitan dengan penelitian ini.
3. Menentukan invers dari matriks non – bujur sangkar.
4. Menentukan Invers Moore – Penrose dari matriks non – bujur sangkar.
5. Memeriksa apakah syarat Invers Moore – Penrose terpenuhi.
6. Memeriksa apakah Invers Moore –Penrose juga memenuhi sifat – sifat Invers pada matriks bujur sangkar.
7. Mengaplikasikan invers Moore – Penrose untuk mencari solusi pada sistem persamaan linier dengan jumlah persamaan dan variabel berbeda.

V. SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan tentang Invers Moore Penrose pada matriks non – bujur sangkar $m \times n$, dapat disimpulkan, yaitu sebagai berikut.

1. Invers dari suatu matrik non – bujur sangkar dengan rumus $\frac{1}{\det(A)}\ adj(A)$,bukan Invers Moore – Penrose dari matriks non – bujur sangkar tersebut.
2. Pada invers Moore – Penrose berlaku $A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1}$ untuk $m < n$ dan $A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$ untuk $m > n$, kedua rumus tersebut juga berlaku untuk matriks kompleks non bujur sangkar.
3. Sifat – sifat Invers pada matriks Invers Moore – Penrose
    a. Sifat $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ tidak berlaku pada Invers Moore Penrose.
    b. Invers Moore – Penrose bersifat tunggal dan sifat pada invers yaitu jika B dan C kedua – duanya adalah invers dari matriks A maka, $B = C$ juga berlaku pada Invers Moore – Penrose.

c. Pada matriks Invers Moore – Penrose $(AB)^{-1} \neq B^{-1}A^{-1}$ maka sifat $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ tidak berlaku untuk matriks Invers Moore – Penrose.

4. Konsep invers Moore – Penrose juga dapat digunakan untuk menyelesaikan solusi dari sistem persamaan linier yang berbentuk $Ax = b$ dengan matriks A invertibel dan berukuran $m \times n$ sehingga $x = A^{+}b$.
5. Pada penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode eliminasi Gauss -Jordan yang memiliki solusi banyak, tunggal dan tidak punya solusi sedangkan jika diselesaikan dengan metode Moore – Penrose hanya akan diperoleh solusi tunggal dan tidak ada solusi.

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan di atas disarankan untuk penelitian berikutnya dapat dibahas tentang Invers Moore – Penrose matriks non – bujur sangkar $m \times n$ dan sifat – sifat Invers dengan cara yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Amiri, A. Fathy, M. Bayat, M. 2010. *Generalization of Some Determinantal Identities for Non – Squares Matrices Based on Radic's Definition. TWMS Journal Pure Applications Mathematic.* Vol.1. No.2. Hal. 163-175.

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2000. *Dasar – dasar aljabar linear,* Edisi Ketujuh. Jilid 1. Batam: Interaksara.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer versi aplikasi edisi kedelapan,* jilid 1. Jakarta: Erlangga.

Aziz Saefudin, Abdul. 2014. *Aljabar Matriks*. Yogyakarta. Graha Ilmu.

Britz, T. 2007. The Moore-Penrose Inverse Of A Free Matrix. *Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810*, Vol 16, pp. 208-215. Tersedia di http://math.technion.ac.il/iic/ela.html [diakses 02-03-2010]

Gazali, Wikaria. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear.* Yogyakarta. Graha Ilmu.

Gunawan, Imron Ali. Generalisasi Invers Suatu Matriks yang Memenuhi Persamaan Penrose. *Jurnal Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro.* Hal. 99-107.

Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya edisi kelima.* Jakarta: Erlangga.

Nur, Andi Saparuddin. 2014. Konsep Determinan pada Matriks Non – bujur Sangkar. *Jurnal Pendidikan Matematika.* Vol.2. No.1. Magistra.

Radic, Mirko. 2005. About Determinant of Rectangular $2 \times n$ Matrix and its Geometrtic Intrepretasion. *Beitragre zur Algebra und Geometrie.* Vol. 46. No.1. Hal 321 – 349.

Stanimirovic, Predrag & Stankovic, Miomir. 1997. Determinant of Rectangular Matrices ang Moore – Penrose Inverse. *Novisad J. Math.* Vol. 5. No.1. Hal 30 – 34.

Supranto, J. 2003. *Pengantar Matriks.* Jakarta: PT Rineka Cipta.

Suryadi dan Machmudi, Harini. 1984. *Teori dan Soal Pendahuluan Aljabar Linear.* Jakarta. Ghalia Indonesia.