PEMODELAN REGRESI 3 LEVEL
DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD*

(Skripsi)

Oleh

AGUNG HIDAYAT

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

LEVEL REGRESSION MODELING 3
WITH THE LIKELIHOOD MAXIMUM METHOD

By

Agung Hidayat

In the modern era, many studies use data taken from groups that oversee units of observation known as hierarchical data. In social research usually traces the relationship between individuals and their communities. This kind of research is called multilevel research. Multilevel models can be used to analyze hierarchical data structures, which are data analyzed from several levels, where lower levels are nested at higher levels. However, this analysis does not pay attention to the macro level, resulting in dissatisfaction with the results of the analysis because it causes heteroscedasticity in the error. To overcome the problems above the regression model used is a multilevel model. The purpose of this study was to apply the 3-level regression models on hierarchical data to determine the factors that influence population density in Lampung Province in 2016 at district, sub-district and village levels. From the results of the analysis it was found that the best 3-level model is the 3-level model that includes variables at the district and sub-district levels. The factors that influence population density in Lampung Province are the rate of economic growth and population growth.

Keywords: hierarchical data, multilevel regression, population density.

ABSTRAK

PEMODELAN REGRESI 3 LEVEL DENGAN METODE MAXIMUM LIKELIHOOD

Oleh

Agung Hidayat

Di era modern banyak penelitian yang menggunakan data yang diambil dari kelompok-kelompok yang membawahi unit-unit pengamatan yang dikenal dengan istilah data hirarki. Pada penelitian sosial biasanya menelusuri hubungan antara individu dengan komunitasnya. Penelitian semacam ini disebut penelitian multilevel. Model multilevel dapat digunakan untuk menganalisis data berstruktur hirarki yaitu data yang dianalisis dari beberapa level, dimana level yang lebih rendah bersarang pada level yang lebih tinggi. Namun analisis ini tidak memperhatikan pada level makro, sehingga mengakibatkan ketidakpuasaan pada hasil analisisnya karena menimbulkan heteroskedastisitas pada galat. Untuk mengatasi masalah-masalah diatas model regresi yang digunakan adalah model multilevel. Tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan model regresi 3 level pada data berhirarki untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk di Provinsi Lampung tahun 2016 pada level kabupaten, kecamatan dan desa. Dari hasil analisis diperoleh bahwa model 3 level terbaik yaitu model 3 level yang mengikutsertakan variabel pada level kabupaten dan level kecamatan. Adapun faktor-faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk di Provinsi Lampung yaitu laju pertumbuhan ekonomi dan pertumbuhan penduduk.

Kata kunci: data hirarki, regresi multilevel, kepadatan penduduk.

PEMODELAN REGRSI 3 LEVEL
DENGAN METODE MAXIMUM LIKELIHOOD

Oleh

Agung Hidayat

Skripsi
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PEMODELAN REGRESI 3 LEVEL DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD***

Nama Mahasiswa : *Agung Hidayat*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031091

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Khoirin Nisa, M.Si.
NIP. 19740726 200003 2 001

Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.
NIP. 19570101 198404 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Khoirin Nisa, M.Si.** ....

Sekretaris : **Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 196406041990031002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 27 November 2019

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: Agung Hidayat
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031091
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: **PEMODELAN REGRESI 3 LEVEL DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD***

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27 November 2019

Penulis

Agung Hidayat

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Kecamatan Gading Rejo, Kabupaten Pringsewu, Provinsi Lampung pada tanggal 12 Mei 1996, sebagai anak pertama dari dua bersaudara, dari pasangan bapak Wahidin Rauf dan ibu Masngadah.

Penulis mulai menempuh pendidikan pertamanya di Sekolah Dasar Negeri 2 Tanjung Ratu Kecamatan Katibung, Kabupaten Lampung Selatan pada tahun 2002. Pada tahun 2008 penulis melanjutkan pendidikannya di Sekolah Menengah Pertama Negeri 1 Katibung, Kecamatan Katibung, Kabupaten Lampung Selatan. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Katibung, Kecamatan Katibung, Kabupaten Lampung Selatan pada tahun 2011. Pada tahun 2015 penulis tercatat sebagai salah satu mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Universitas Lampung melalui jalur masuk Penerimaan Mahasiswa Perluasan Akses Pendidikan (PMPAP) yang merupakan salah satu beasiswa yang disediakan oleh Universitas Lampung.

Selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung penulis aktif di Organisasi tingkat Universitas yaitu Radio Kampus Unila (RAKANILA) pada tahun 2016-2017 penulis aktif sebagai crew *Music Director* di Radio Kampus Unila (RAKANILA) . Pada tahun 2017-2018 penulis aktif sebagai Reporter Internal Radio Kampus Unila (RAKANILA).

Pada tahun 2018 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di PT. Asuransi Jiwasraya (Persero) Kantor Cabang Pembantu Bandar Lampung. Sebagai bentuk pengabdian mahasiswa, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Pelindung Jaya, Kecamatan Gunung Pelindung, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

"Hai manusia, kamulah yang membutuhkan Allah dan Allah Dialah yang Maha Kaya (tidak memerlukan sesuatu) lagi Maha Terpuji."

(Q.S. Fathir : 15)

"Doa tanpa usaha itu bohong,
Usaha tanpa doa itu sombong."

(anonim)

"Jangan dulu lelah, kamu baru saja melangkah."

(Agung Hidayat)

PERSEMBAHAN

Dengan mungucap Alhamdulillah,

Puji syukur kepada Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta Suri tauladan Nabi Muhammad SAW.

Kupersembahkan sebuah karya sederhana ini untuk :

Ayahanda Wahidin Rauf & Ibunda Masngadah

Jazza Kumullahu Khoiro untuk abah dan mamak untuk semua do'a-do'a, dukungan dan kasih sayang. Atas Ridho kalianlah Allah memudahkan setiap langkah-langkah yang aku tapaki.

Mungkin karya ini tak sebanding dengan pengorbanan yang telah kalian lakukan. Tapi percayalah sebuah titik awal perjuangan baktiku untuk kalian.

Untuk adikku **Shela Oktarina Pratiwi** dan keluarga dekat yang senantiasa mendoakan untuk keberhasilanku.

Dosen pembimbing dan penguji yang sangat berjasa dalam mengarahkan, membimbing, menasehati dan memberi motivasi kepada penulis.

Serta,

Almamaterku tercinta.

SANWACANA

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT karena atas berkat rahmat hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi yang berjudul "Pemodelan Regresi 3-Level dengan Metode *Maximum Likelihood*" disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Universitas Lampung. Dalam kesempatan ini rasa terima kasih setulus-tulusnya penulis ucapkan kepada:

1. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I yang selalu mengarahkan, membimbing dan memotivasi penulis dalanm menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku dosen pembimbing II, terima kasih atas bimbingan dan masukannya selama penyusunan skripsi ini.

3. Bapak. Drs. Rudi Ruswandi, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan nasehatnya dalam meyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si. selaku Pembimbing Akademik atas bimbingan dan pembelajarannya selama ini.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.

7. Seluruh Dosen dan Staf Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu dan bantuan yang berguna bagi penulis.

8. Abah dan Mamak yang senantiasa mendoakan, menyayangi, memberikan semangat dan nasehat yang tidak henti-henti, serta adikku Shela Oktarina Pratiwi dan keluarga dekat yang senantiasa mendoakan untuk keberhasilan penulis.

9. Sahabat-sahabatku Lelvi Fanessa Haloho, Vina Alvionita, Rizca Muthia, Arie Nursela Putri, terima kasih atas kebersamaan, keceriaan dan dukungan selama perkuliahan ini.

10. Geralda Agustina, Tirania Dewi Pramarsela, Resti Novalia, Arrahman Rahim, M. Alif Rizky, M. Irsan terima kasih sudah selalu ada saat penulis membutuhkan pertolongan.

11. Keluarga Besar “Mister Geprek Unila 3” Pakde Aji, Bude Murti, Mas Rio, Mba Dona, Mas Ega, Mas Oi. Terima kasih banyak atas semua kesempatan, pengalaman, ilmu serta teman-teman Geprek 3 Yohana, Tina, Gigih, Liana, Galih, Jen, Afen, Anggun & Hari yang selalu mendoakan dan mendukung penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

12. Teman-teman RAKANILA 15 & 16 Aulia, Kent, Rina, Fia, Upe, Awal, Ria, Mala, Deni, Dedi dll terima kasih atas keceriaan dan semangat-semangat yang selalu

diberikan selama masa kepengurusan dan juga RAKANILA 17 Sasa, Inan, Satrio, Rahmad, Delia, Ara, dll terima kasih atas doa nya.

13. Arek-arek Griya Delicia Marta, Anggit, Imam, Firman, Oki, Surya terima kasih atas pertolongan, doa, kebersamaan dan keceriaan selama ngekos di Griya Delicia.
14. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas dukungan dan doanya selama penyelesaian skripsi ini.

Bandar Lampung, 27 November 2019

Penulis,

Agung Hidayat

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Di era modern seperti saat ini, banyak penelitian yang dilakukan dengan menggunakan data yang diambil dari kelompok-kelompok yang membawahi unit unit pengamatan. Sebagai contoh penelitian dalam bidang sosial dan kependudukan, kepadatan penduduk di suatu kecamatan dipengaruhi pula oleh keadaan sosial, ekonomi, maupun kesehatan di kabupaten dimana kecamatan itu berada. Data yang digunakan pada penelitian di atas disebut sebagai data berstruktur hirarki.

Pada penelitian sosial biasanya terkonsentrasi pada masalah bagaimana menelusuri hubungan antara individu dengan komunitasnya. Konsep umum individu berkorelasi dengan komunitas sosialnya adalah suatu individu yang dipengaruhi lingkungan sosial dimana mereka berada. Penelitian semacam ini disebut penelitian multilevel. Model multilevel dapat digunakan untuk menganalisis data berstruktur hirarki yaitu data yang dianalisis dari beberapa level, dimana level yang lebih rendah tersarang dalam level yang lebih tinggi.

Awalnya analisis yang dilakukan tanpa memperhatikan informasi pada level makro, hal ini mengakibatkan ketidakpuasan pada hasil analisisnya dan menimbulkan heteroskedastisitas pada galat (Tantular, 2009).

Data Hirarki 3-level digunakan untuk lebih mengetahui model yang lebih spesifik dan dapat menentukan data terbaik. *Maximum Likelihood* adalah langkah pengestimasi parameter dengan nilai matriks varians-kovarians yang baru, kemudian hasil estimasi parameter tetap tersebut digunakan untuk mengestimasi parameter acak. Selanjutnya dilakukan estimasi berulang-ulang secara bergantian antara parameter tetap dan parameter acak sampai konvergen.

Untuk mengatasi masalah-masalah di atas model regresi yang digunakan adalah model regresi multilevel yang diperkenalkan oleh Goldstein. Untuk data Gaussian yaitu variabel dependen berjenis variabel kontinu dan berdistribusi normal dengan efek campuran maka model multilevel yang diterapkan yaitu model linear campuran *(linear mixed models)* dan pendugaan parameter menggunakan Metode Kemungkinan Maksimum *(Maximum Likelihood Methods)*. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai Metode *Maximum Likelihood* serta pemodelan regresi 3 level dengan *Metode Maksimum Likelihood*.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

Menerapkan model regresi 3 level pada data berhirarki untuk mengetahui faktor-faktor yang berpengaruh terhadap kepadatan penduduk di Provinsi Lampung.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

Dapat menerapkan metode *Maximum Likelihood* pada data untuk mencari model regresi multilevel.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Data Hirarki

Pada berbagai disiplin ilmu, antara lain ilmu sosial, sering dijumpai data populasi yang berstruktur hirarki. Data berstruktur hirarki adalah data yang terdiri dari unit-unit yang diobservasi bersarang atau terkelompokkan dalam unit level yang lebih tinggi. Data Hirarki disebut juga data multilevel atau data bersarang, (Tantular, 2009). Dalam suatu penelitian terkadang dijumpai data populasi yang berstruktur hirarki atau data berjenjang. Data yang berstruktur hirarki merupakan data yang timbul karena individu-individu terkumpul dalam kelompok yang diperoleh melalui multistage sampling dari populasi berjenjang yang variabel-variabelnya dapat didefinisikan dari setiap level, dimana level yang lebih rendah tersarang pada level yang lebih tinggi. Data hirarki disebut juga sebagai data multilevel (Hox, 2002).

Menurut Hox (1995), jika data hirarki dianalisis dengan menggunakan metode regresi linier berganda, maka akan menimbulkan beberapa masalah, diantaranya:

1. Jika dianalisis pada level tertinggi, maka informasi di level terendah akan hilang.

Akibatnya power dari pengujian statistik pada level ini juga akan berkurang karena banyaknya informasi hilang di level terendah.

2. Jika analisis dilakukan pada level terendah, maka pengelompokan data diabaikan, artinya model regresi dibentuk dari seluruh pengamatan level terendah. Masalah yang akan timbul adalah multikolinieritas sehingga model yang dihasilkan menjadi kurang baik.

2.2 Model Regresi

Analisis regresi linier merupakan suatu alat analisis statistik yang digunakan untuk menguji ada tidaknya pengaruh antara variabel bebas terhadap variabel terikat. Variabel bebas adalah variabel yang mempengaruhi atau menjadi sebab perubahan atau timbulnya variabel tak bebas, sedangkan variabel terikat adalah variabel yang dipengaruhi atau yang menjadi akibat karena adanya variabel bebas. Secara umum regresi adalah metode yang digunakan untuk meramalkan nilai harapan yang bersyarat (Kutner, dkk, 2004). Analisis regresi pertama kali dikembangkan oleh Sir Francis Galton pada abad ke-19. Bentuk hubungan antara variabel dependen dengan variabel independen dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan atau model regresi. Persamaan regresi linear biasa ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \text{ } \textit{dengan } \boldsymbol{\varepsilon} \sim N\,(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}) \tag{2.1}$$

dengan :

$\boldsymbol{Y}$ = vektor dependen

$\boldsymbol{X}$ = matriks independen

$\boldsymbol{\beta}$ = koefisien regresi

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor galat

Analisis regresi dengan satu variabel independen dan satu variabel dependen disebut analisis regresi linear sederhana. Persamaan umumnya adalah :

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,.....n \tag{2.2}$$

dengan :

Y = variabel dependen

X = variabel independen

α = konstanta regresi

β = koefisien regresi

ε = galat

Sedangkan analisis regresi yang melibatkan lebih dari satu variabel independen dengan satu variabel dependen disebut analisis regresi linear berganda. Persamaan umumnya adalah :

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{i_1} + \beta_2 X_{i_2} + \ldots\ldots + \beta_p X_{i_p} + \varepsilon_i \quad i=1,2,\ldots.,n \tag{2.3}$$

Dalam suatu persamaan regresi terdapat koefisien yang merupakan nilai duga perameter atau kondisi yang sebenarnya. Kuat tidaknya hubungan antara variabel independen dengan variabel dependen dapat diukur menggunakan koefisien korelasi, sedangkan besarnya pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen dapat diukur menggunakan koefisien determinasi.

Asumsi-asumsi pada analisis regresi adalah sebagai berikut:

1. Galat menyebar normal $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$;
2. Ragam galat homogen $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$; $i = 1,2,\ldots, n$;
3. Nilai ε_i adalah independent satu dengan yang lainnya $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$;

   $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ *dan* $Var(\varepsilon) = \sigma^2$
4. *X* dan *Y* terkait secara linear, untuk setiap nilai *X* yang dihubungkan dengan nilai *Y* maka akan membentuk garis lurus.

Dalam melakukan analisis regresi, asumsi-asumsi tersebut perlu dipenuhi terlebih dahulu (Myers, 1990).

2.3 Model Regresi Linier Berganda

Untuk mengkaji hubungan atau pengaruh dua atau lebih variabel bebas terhadap variabel tak bebas, maka model regresi yang digunakan adalah model regresi linier berganda *(multiple linier regression model)*. Analisis regresi linier berganda merupakan perluasan dari regresi linier sederhana. Perluasan tersebut dapat dilakukan dengan penambahan variabel bebas (Baroroh, 2013).

Untuk memahami model regresi linier berganda digunakan model regresi yang dinyatakan dalam persamaaan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i_1} + \beta_2 X_{i_2} + \ldots . + \beta_k X_{i_k} + \varepsilon_i \tag{2.4}$$

Y_i = variabel dependen untuk pengamatan ke-*i*, dimana *i* = 1,2,...,n

X_{i_k} = variabel independen ke-*k* untuk pengamatan ke-*i*,

β_0 = intersep (titik potong garis regresi terhadap sumbu *y*

β_1, β_2,...., β_k = kemiringan *(slope)* garis regresi yang menunjukkan besarnya perubahan nilai jika X berubah 1 unit.

ε_i = variabel error ke-i, diasumsikan {ε_i ~ NID (0, σ^2)}.

2.4 Model Linear Campuran (*Linear Mixed Model*)

Model linear campuran merupakan suatu model yang menggabungkan efek tetap *(fixed effect)* dan efek acak *(random effect)* ke dalam suatu persamaan. Sebuah variabel independen dikatakan memiliki efek tetap jika koefisien regresinya bernilai sama bagi seluruh anggota sampel dan sebuah variabel independen dikatakan memiliki efek acak jika nilai koefisien regresinya berbeda antar dua atau lebih grup anggota sampel (Harlan, 2016). Secara umum model linear campuran menurut Bryck dan Raudenbush (1987) meliputi tiga hal yaitu sebagai berikut:

1. Efek acak, yaitu efek yang ditimbulkan oleh adanya pengaruh dari suatu variabel yang nilainya berasal dari sampel acak.

2. Efek hirarki, yaitu efek yang ditimbulkan oleh adanya pengaruh peubah yang diukur pada level yang berbeda.

3. Pengukuran berulang, dalam hal ini pengamatan-pengamatan berkaitan dengan pengamatan sebelumnya.

Menurut Rencher dan Schaalje (2007), persamaan model linear campuran dalam bentuk sederhana adalah :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Z_1 u_1} + \boldsymbol{Z_2 u_2} + \ldots + \boldsymbol{Z_m u_m} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad j = 1,2,\ldots..m \qquad (2.5)$$

dengan :

$\boldsymbol{Y}$ = vektor respon (n x 1)

$\boldsymbol{X}$ = matriks prediktor efek tetap (n x p)

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter efek tetap (p x 1)

$\boldsymbol{Z_j}$ = matriks prediktor efek acak (n x r_i)

$\boldsymbol{u_j}$ = vektor parameter efek acak (r_i x 1)

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor galat (r_i x 1)

2.5 Model Regresi 3-Level

Analisis regresi 3-level mengkaji pola hubungan antara satu variabel respon dengan satu atau lebih variabel penjelas. Jika datanya berjenjang, regresi multilevel lebih tepat digunakan dalam masalah ini. Pada regresi multilevel, satu variabel respon hanya diukur pada level terendah dan variabel penjelas dapat berbeda pada setiap level.

Dalam model regresi 3-level dapat digolongkan menjadi beberapa bentuk sub model yaitu model intersep, model intersep acak *(Random intersep model)* dan model kemiringan acak *(Random slope model)*.

2.5.1 Model Intersep Tanpa Variabel Bebas

Model intersep adalah model yang tidak memiliki variabel bebas dalam setiap levelnya atau sering disebut dengan *intersep only model*. Model intersep untuk model level-1 dapat dituliskan sebagai berikut :

$$Y_{tij} = \beta_{oij} + \varepsilon_{tij} \tag{2.6}$$

Model untuk level-2 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\beta_{oij} = \gamma_{00j} + u_{0ij} \tag{2.7}$$

Model untuk level-3 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\gamma_{00j} = \alpha_{000} + w_{00j} \tag{2.8}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 2.8 , 2.9 dan 2.10 diperoleh persamaan:

$$Y_{tij} = \alpha_{000} + w_{00j} + u_{0ij} + \varepsilon_{tij} \tag{2.9}$$

Dalam persamaan 2.11 hanya menguraikan variansi Y ke dalam 3 komponen yaitu variansi error level-1 (ε_{tij}) , variansi error level-2 (u_{0ij}), variansi error level-3 (w_{00j}).

2.5.2 Model Intersep Acak dengan Variabel Bebas

Menurut Fahrmeir dan Gerhard (1994), model intersep acak merupakan salah satu bentuk model regresi 3-level dimana koefisien intersep (perpotongan) dalam model bersifat acak, bukan bersifat tetap seperti pada model regresi biasa. Untuk pemodelan dapat diasumsikan terdapat P variabel bebas X pada level-1, Q variabel bebas pada level-2 dan K variabel bebas pada level-3. Model intersep acak dapat dijelaskan dengan model sebagai berikut:

- Untuk model level-1, dapat ditulis:

$$Y_{tij} = \beta_{oij} + \sum_{p=1}^{P} \beta_{pij} X_{ptij} + \varepsilon_{tij} \tag{2.10}$$

dengan:

Y_{tij} = variabel dependen untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3

β_{oij} = intersep untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3

β_{pij} = efek tetap variabel independen ke-p untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3

X_{ptij} = variabel independen ke-p di level-1 untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3

ε_{tij} = galat untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3 (galat level-1), diasumsikan berdistribusi N(0,σ_{ε}^{2}).

- Untuk model level-2

$$\beta_{0ij} = \gamma_{00j} + \sum_{q=1}^{Q} \gamma_{0qj} V_{qij} + u_{0ij} \tag{2.11}$$

dengan:

β_{0ij} = variabel dependen untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-*j* pada level-3

γ_{00j} = intersep untuk unit ke-*j* pada level-3

γ_{0qj} = efek tetap untuk variabel independen ke-q untuk unit unit ke-j pada level-3

V_{qij} = variabel independen ke-*q* di level-2 untuk unit ke-*i* pada level-2 dan unit ke-*j* pada level-3

u_{0ij} = galat untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-*j* pada level-3 (galat level-2), diasumsikan berdistribusi N(0,σ_u^2).

- Untuk model level-3

$$\gamma_{00j} = \alpha_{000} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_{00k} S_{qj} + w_{00j} \quad (2.12)$$

dengan:

γ_{00j} = = variabel dependen untuk unit ke-*j* pada level-3

α_{000} = intersep

α_{00k} = efek tetap untuk variabel bebas ke-*k*

S_{qj} = variabel independen ke-*k* di level-3 untuk unit ke-*j* pada level-3

w_{00j} = galat unit ke-*j* pada level-3 diasumsikan berdistribusi N(0, σ_w^2).

Setelah diperoleh model pada setiap level dari 3 tingkatan level tersebut dapat di substitusikan sebagai berikut :

$$Y_{tij} = \alpha_{000} + \sum_{p=1}^{P} \alpha_{p00} X_{ptij} + \sum_{q=1}^{Q} \alpha_{0p0} V_{qij} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_{00k} S_{qj} + w_{00j} + u_{0ij} + \varepsilon_{tij} \quad (2.13)$$

Y_{tij} merupakan penjumlahan dari parameter tetap dan parameter acak. parameter dalam model yang akan diestimasi adalah α_{000}, α_{0qj}, α_{00k} serta σ_ε^2 menyatakan variansi unit level-1, σ_w^2 menyatakan varians unit level-2 dan σ_u^2 menyatakan varians unit level-3.

2.5.3 Model Kemiringan Acak (*Random Slope Model*)

Berbeda dengan model intersep acak, pada model kemiringan acak memungkinkan garis-garis regresi untuk tiap unit level-2 mempunyai kemiringan *(slope)* yang berbeda. Representasi multilevel dari model kemiringan acak dinyatakan dalam bentuk :

- Model Level-1 :

$$Y_{tij} = \beta_{0ij} + \sum_{p=1}^{P} \beta_{pij} X_{ptij} + \varepsilon_{tij} \quad (2.14)$$

  dengan:

  Y_{tij} = variabel independen untuk unit ke-*t* pada level-1 dalam unit ke-*i* pada level-2 dan unit ke-*j* pada level-3

  β_{0ij} = intersep untuk unit ke-*i* pada level-2 dan unit ke-*j* pada level-3

  β_{pij} = kemiringan acak untuk variabel dependen ke-*p*, *p = 1,2,...,P*

  X_{ptij} = variabel dependen ke-*p* untuk unit ke-*t* pada level-1 dalam unit ke-*i* pada level-2 dan unit ke-*j* pada level-3dengan *p = 1,2,...,P*

  ε_{tij} = galat untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3 diasumsikan berdistribusi N(0, σ_{ε}^2).

- Model Level-2 :

$$\beta_{0ij} = \gamma_{00j} + \sum_{q=1}^{Q} \gamma_{0qj} V_{qij} + u_{0ij}$$

$$\beta_{pij} = \gamma_{0qj} + u_{0ij} \quad (2.15)$$

dengan :

γ_{000} = intersep

V_{qij} = variabel dependen ke-q untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3

u_{0ij} = galat untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3 diasumsikan berdistribusi N(0,$\sigma^2_{u\delta 0}$).

u_{pij} = galat untuk unit ke-p pada level-2 dan unit ke-j pada level-3, diasumsikan berdistribusi N(0, $\sigma^2_{u\delta 0}$).

γ_{0qj} = galat dari Z_{qij} pada level-2

- Model level-3

$$\gamma_{00j} = \alpha_{000} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_{00k} S_{kj} + w_{00j}$$

$$\gamma_{00j} = \alpha_{00k} + w_{00j}$$

$$\gamma_{p0j} = \alpha_{p00} + w_{p0j} \tag{2.16}$$

dengan :

α_{000} = intersep

S_{kj} = variabel dependen ke-*k* untuk unit ke-*j* pada level-3

w_{00j} = galat untuk unit ke-*j* pada level-3, diasumsikan berdistribusi $N(0, \sigma^2_{u\delta 0})$

w_{p0j} = galat dari S_{kj} pada level-3.

2.6 Uji Asumsi Regresi

2.6.1 Uji Normalitas

Uji normalitas adalah uji untuk melihat apakah data berdistribusi normal atau tidak. Uji statistik yang sering digunakan untuk menghitung uji normalitas adalah uji Kolmogorov-Smirnov. Uji Kolmogorov-Smirnov bekerja dengan cara membandingkan dua distribusi atau sebaran data, yaitu distribusi yang dihipotesiskan dan distribusi yang teramati. Apabila distribusi yang teramati mirip dengan distribusi yang dihipotesiskan, maka dapat disimpulkan bahwa data yang diamati memiliki distribusi atau sebaran normal (Kurniawan, 2008). Selain uji *Kolmogorov-Smirnov* uji normalitas dapat dilakukan dengan melihat Normal Probability Plot.

2.6.2 Uji Multikolinearitas

Uji multikolinearitas adalah uji untuk melihat ada atau tidaknya korelasi yang tinggi antara variabel-variabel independen dalam suatu model regresi linear berganda. Uji statistik yang sering digunakan untuk menguji gangguan multikolinearitas adalah *Variance Inflation Factor (VIF)*. VIF dapat menginterpretasikan akibat dari korelasi antar peubah prediktor ke-i pada ragam penduga koefisien regresi. Perhitungan VIF sebagai berikut :

$$VIF_i = \frac{1}{1-R_i^2} \text{ ; dimana } \quad i = 1, 2, \ldots, p \qquad (2.17)$$

Pada uji statistik Variance Inflation Factor (VIF), apabila nilai VIF lebih besar dari sepuluh mengindikasi adanya multikolinearitas yang serius (Zulmi, 2011).

2.6.3 Uji Heteroskedastisitas

Menurut Imam Ghozali (2016) menyatakan bahwa uji heteroskedastisitas adalah untuk menguji apakah dalam model regresi terjadi ketidaksamaan varians dari galat satu pengamatan ke pengamatan yang lain. Jika varian dari galat satu pengamatan ke pengamatan lain tetap, maka disebut homoskedastisitas dan jika berbeda disebut heteroskedastisitas. Dasar pengambilan keputusan untuk uji heteroskedastisitas dengan menggunakan Uji Park Gleyser adalah jika variabel independen signifikan secara statististik mempengaruhi variabel dependen, maka adanya indikasi terjadi heteroskedastisitas. Sebaliknya jika variabel independen tidak signifikan mempengaruhi variabel dependen maka tidak terjadi heteroskedastisitas. Dalam pengujian Park Gleyser menggunakan koefisien signifikasi probabilitas pada tingkat ketelitian 5%, jika lebih besar dari sama dengan 5% maka dapat disimpulkan model regresi tidak menggandung adanya heteroskedastisitas.

2.6.4 Uji Autokolerasi

Uji autokolerasi yang dilakukan penelitian ini bertujuan untuk mengetahui apakah dalam sebuah model regresi linier ada kolerasi antara kesalahan penganggu pada periode t dengan kesalahan pada periode t-1 (sebelumnya). Jika terjadi kolerasi, maka dinamakan ada problem autokorelasi. Tentu saja model regresi yang baik adalah regresi yang bebas dari autokolerasi (Singgih Santoso, 2012). Pada prosedur pendeteksian masalah autokolerasi dapat digunakan besaran Durbin-Waston. Untuk memeriksa ada tidaknya autokolerasi, maka dilakukan uji Durbin-Watson dengan keputusan sebagai berikut:

- Jika (D-W) < d_l, maka ho ditolak
- Jika (D-W) > d_u , maka ho diterima
- Jika d_l < (D-W) < d_u , maka tidak dapat diambil kesimpulan

Uji dilakukan dengan menggunakan uji Durbin-Watson, dengan rumus:

$$\mathrm{D-W} = \frac{\sum(e_t - e_{t-1})}{\sum e_t^2}\ . \qquad (2.18)$$

2.7 Metode Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter pada regresi multilevel ini pada dasarnya mempunyai kegunaan yang sama pada regresi linear biasa, yaitu untuk mengetahui nilai-nilai parameter yang akan digunakan dalam proses regresi. Pada analisi multilevel, pendugaan parameter yang paling lazim digunakan adalah *Maximum Likelihood Estimation*. Metode *Maximum Likelihood* mengestimasi parameter dengan cara memaksimumkan fungsi *likelihood* (Hox, 2010). Berikut ini adalah pendugaan parameter dengan metode *Maximum Likelihood*.

Diberikan persamaan model linear campuran sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.19)$$

dimana $\boldsymbol{E(\varepsilon)} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{cov(\varepsilon)} = \boldsymbol{\sigma^2 I_n} = \boldsymbol{\Sigma_i}$ dan $\boldsymbol{E(u_i)} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{cov(u_i)} = \boldsymbol{\sigma^2 Ir_i} = \boldsymbol{D}$

atau $\begin{bmatrix} \boldsymbol{u_i} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \sim \boldsymbol{N_{mq+n}}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{0_{mq\times n}} \\ \boldsymbol{0_{n\times mq}} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}\right)$.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{g} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{g} \end{bmatrix} dan \;\; \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma_1} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma_2} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma_n} \end{bmatrix}$$

dengan :

$\boldsymbol{Y}$ = vektor respon (n x 1)

$\boldsymbol{X}$ = matriks desain efek tetap (n x p)

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter efek tetap (p x 1)

$\boldsymbol{Z}$ = matriks desain efek acak (n x q)

$\boldsymbol{u}$ = vektor parameter efek acak (q x 1)

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor galat (n x 1)

$\boldsymbol{G}$ = matriks kovarian dari efek acak u

$\boldsymbol{R}$ = matriks kovarian dari vektor galat ε

misalkan :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zu} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon^*} \qquad (2.20)$$

dengan :

$\boldsymbol{\varepsilon^*} = \boldsymbol{Zu} + \boldsymbol{\varepsilon}$

$$= (\boldsymbol{Z} \quad \boldsymbol{I}_{n\times n}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^* \sim N_n\ (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{V})$

dimana :

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \end{pmatrix} \boldsymbol{A}^t$$

$$= (\boldsymbol{Z} \quad \boldsymbol{I}_{n\times n}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}^t \\ \boldsymbol{I}_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$= (\boldsymbol{ZG} \quad \boldsymbol{R}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}^t \\ \boldsymbol{I}_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{ZGZ}^t + \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{ZGZ}^t + \boldsymbol{R}$$

Vektor parameter kovarian θ diduga oleh $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ dengan memaksimumkan fungsi likelihood.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zu} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan $\begin{bmatrix} u_i \\ \varepsilon \end{bmatrix} \sim N_{mq+n} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G & 0_{mq+n} \\ 0_{n\times mq} & R \end{bmatrix} \right)$.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

dengan $\boldsymbol{\varepsilon}^* \sim N_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{V}(\theta))$ *dengan* $\boldsymbol{V}(\theta) = \boldsymbol{ZG}(\theta)\boldsymbol{Z}^t + \boldsymbol{R}(\theta)$.

Diberikan fungsi *likelihood* sebagai berikut :

$L = \prod_{i=1}^{n} \; f(y_i \,|\theta)$

$= \prod_{i=1}^{n} \; f(y_i \,, \mu, \sigma^2)$

$= \prod_{i=1}^{n} \; \frac{1}{\sqrt{2\pi\, \sigma^2}}$ exp - $\frac{1}{2}\,(\frac{y_i - \mu)}{\sigma})^2$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \sigma^{2n}}$ exp - $\frac{1}{2}\sum(\frac{y_{i-\mu}}{\sigma})^2$

$\ln L = \ln\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \sigma^{2n}} \exp - \frac{1}{2}\sum(\frac{y_{i-\mu}}{\sigma})^2\right]$

$= \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \sigma^{2n}} + \ln\,(\exp - \frac{1}{2}\sum(\frac{y_{i-\mu}}{\sigma})^2\,)$

$= \ln \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \sigma^{2n}} - \frac{1}{2}\sum(\frac{y_{i-\mu}}{\sigma})^2$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\; V(\theta)}$ exp - $\frac{1}{2}$ $((y-\mu)^T\, V(\theta)^{-1}\,(y-\mu))$

melalui fungsi likelihood dengan variabel acak galat (ε) diberikan oleh :

$L \;\; = \prod_{i=1}^{n} f\,(\varepsilon, 0, V(\theta)\,)$

$= \prod_{i=1}^{n} \; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\; V(\theta)}$ exp - $\frac{1}{2}\,(\varepsilon - \mu_{\varepsilon})^T\, V(\theta)^{-1}\,(\varepsilon - \mu)$

$L \;\; = \prod_{i=1}^{n} \; \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\; V(\theta)}$ exp - $\frac{1}{2}\,(Y - X\beta)^t\; V(\theta)^{-1}(Y - X\beta)$

$$L(\beta,\, \sigma^2) = -\frac{1}{2}\{l_n \,|\, \boldsymbol{V(\theta)} \,| + \boldsymbol{(Y - X\beta)^t\; V(\theta)^{-1}(Y - X\beta)}\} \tag{2.21}$$

dengan memaksimumkan log *likelihood* untuk $\boldsymbol{\theta}$ tetap terhadap $\boldsymbol{\beta}$ maka diperoleh

$$\boldsymbol{\widehat{\beta}(\theta) = (X^tV(\theta)^{-1}X)^{-1}X^tV(\theta)^{-1}Y} \tag{2.22}$$

$\boldsymbol{Y} \sim Nn(\boldsymbol{X\beta}, \boldsymbol{V})$ dan $\boldsymbol{u} \sim N_{mq}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{G})$.

$Cov(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{u}) = Cov\,(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zu} + \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{u})$.

$= Cov\,(\boldsymbol{X\beta}, \boldsymbol{u}) + Cov\,(\mathbf{Zu}, \boldsymbol{u}) + Cov\,(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{u})$

$= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{ZG} + \boldsymbol{0}$

$$= \boldsymbol{ZG}$$

$$Cov\ \boldsymbol{(Y, u) = ZG} \tag{2.23}$$

$$E\boldsymbol{(u|Y) = E(u) + Cov\ (u, Y)\ [cov(Y)]^{-1}\ [Y - E(Y)]}$$

$$\boldsymbol{= 0 + GZ^{t}V^{-1}(Y - X\beta)}$$

$$\boldsymbol{= GZ^{t}V^{-1}(Y - X\beta)}$$

$$E\boldsymbol{(u|Y) = GZ^{t}V^{-1}(Y - X\beta)} \tag{2.24}$$

Menurut West, *et al*, (2007) efek tetap $\boldsymbol{\beta}$ dan efek acak $\boldsymbol{u}$ diduga oleh

$$\boldsymbol{\hat{\beta} = (X^{t}\hat{V}^{-1}X)^{-1}X^{t}\hat{V}^{-1}Y} \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{\hat{u} = (GZ^{t}\hat{V}^{-1}(Y\text{-}X\hat{\beta})} \tag{2.26}$$

dimana $\boldsymbol{\hat{V} = V(\hat{\theta}_{ML})}$.

Metode *Maximum Likelihood* memiliki dua kelebihan dibandingkan dengan REML yaitu relatif lebih mudah dari segi komputasi dan metode ini lazim digunakan untuk mengestimasi efek tetap, sedangkan untuk efek acak lebih baik menggunakan REML. Walaupun demikian, perbedaan hasil antara kedua metode relatif kecil, dan untuk sampel besar perbedaan hasil antara keduanya dapat diabaikan (Hox, 1995).

2.8 Pengujian Hipotesis

Pendugaan parameter yang selanjutnya digunakan untuk menguji signifikansi paremeter pada model regresi 3 level secara individual.

Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut :

a. Peremeter level 1

$H_0: \beta_{pj} = 0$

$H_1: \beta_{pj} \neq 0$

Dengan indeks p = 1,2,..., P dan P merupakan banyaknya variabel bebas level 1. Statistik uji yang digunakan adalah statistik Wald sebagai berikut :

$$t = \frac{\hat{\beta}_{pj}}{\sqrt{V(\hat{\beta}_{pj})}}$$

b. Parameter level 2

$H_0: \gamma_{qj} = 0$

$H_1: \gamma_{qj} \neq 0$

Dengan indeks q = 1,2,..., Q dan Q merupakan banyaknya variabel bebas level 1. Statistik uji yang digunakan adalah statistik Wald sebagai berikut :

$$t = \frac{\hat{\gamma}_{qj}}{\sqrt{V(\hat{\gamma}_{qj})}}$$

c. Parameter level 3

$H_0: \alpha_{kj} = 0$

$H_1: \alpha_{kj} \neq 0$

Dengan indeks k = 1,2,..., K dan K merupakan banyaknya variabel bebas level 1. Statistik uji yang digunakan adalah statistik Wald sebagai berikut :

$$t = \frac{\hat{\alpha}_{kj}}{\sqrt{V(\hat{\alpha}_{kj})}}$$

2.9 Pemilihan Model Terbaik

Dalam regresi multilevel, pemilihan model terbaik dilakukan dengan melihat nilai deviasi. Deviasi merupakan suatu ukuran yang dapat digunakan untuk menentukan kesesuaian suatu model. Menurut Tantular (2009), untuk memilih model regresi 3 level yang terbaik dapat menggunakan uji rasio *likelihood* atau disebut juga sebaran deviasi yaitu ukuran untuk menentukan cocok tidaknya suatu model. Perhitungan untuk pengujian ini adalah selisih nilai deviasi antara dua model atau *diff* yaitu sebagai berikut:

$$Diff = -2log_e\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \tag{2.27}$$

dengan

λ_0 = nilai deviasi untuk *null* model

λ_1 = nilai deviasi untuk *full* model

Menurut Hox (2010) , semakin kecil nilai deviasi pada model tersebut maka model tersebut dikatakan semakin cocok dan apabila nilai *diff* > $\chi^2_{(\alpha,db)}$ maka tolak H_0, dimana db merupakan selisih jumlah parameter dari kedua model. Sehingga dapat disimpulkan bahwa efek acak signifikan, artinya terdapat keragaman atau variasi variabel dependen yang signifikan antar kelompok.

2.10 Korelasi Intraklas (*Intra-class Corelation*)

Korelasi intraklas dapat diperoleh pada setiap level kelompok. Pada model regresi 3 level terdapat dua korelasi intraklas (Goldstein, 1999). Korelasi intraklas menunjukan proporsi kevarianan yang dapat dijelaskan oleh struktur kelompok dalam populasi (Hox, 2002). Korelasi intraklas (ρ) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\rho = \frac{\sigma^2_{w_{00j}}}{\sigma^2_{w_{00j}} + \sigma^2_{u_{0ij}} + \sigma^2_{s_{tij}}} \qquad 0 \leq \rho \leq 1 \tag{2.28}$$

dengan :

$\sigma^2_{w_{00j}}$ = varian ragam galat pada level 3

$\sigma^2_{u_{0ij}}$ = varian ragam galat pada level 2

$\sigma^2_{s_{tij}}$ = varian ragam galat pada level 1

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2018/2019 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder hasil survei Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung tahun 2016. Variabel dependen yaitu berupa kepadatan penduduk per kecamatan di Provinsi Lampung. Sedangkan variabel independen yang terdapat pada setiap levelnya meliputi:

Level 1 (Kabupaten):

1. Indeks pembangunan manusia (IPM) = (X1)
2. Laju pertumbuhan ekonomi (LPE) = (X2)

Level 2 (Kecamatan):

1. Pertambahan penduduk per kecamatan (PP) = (V1)

2. Pendapatan asli kecamatan (PAK)

Level 3 (Desa) :

1. Rasio jenis kelamin (RJK) = (S1)

2. Jarak tempuh desa ke kecamatan atau kabupaten (JTDK) = (S2)

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan studi pustaka yaitu dengan pengkajian secara teoritis dan praktik komputasi. Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membentuk Model Regresi 3 level berdasarkan data kepadatan penduduk provinsi lampung tahun 2017 serta :
    a) Melakukan analisis deskriptif pada data.
    b) Melakukan uji asumsi pada data :
        a) Uji normalitas
        b) Uji multikolinearitas
        c) Uji heteroskedastisitas
        d) Uji autokorelasi.
    c) Menduga model dengan metode *Maximum Likelihood* dengan model sebagai berikut :

        Model Level 1

        $Y_{tij} = \beta_{0ij} + \beta_{1ij}X_{1tij} + \beta_{2ij}X_{2tij} + \varepsilon_{tij}$

Model Level 2

$$\beta_{0ij} = \gamma_{00j} + \gamma_{01j}V_{1tij} + \gamma_{02j}V_{2tij} + u_{0ij}$$

Model Level 3

$$\gamma_{00j} = \alpha_{000} + \alpha_{001}S_{1j} + \alpha_{002}S_{2j} + w_{00j}$$

2. Mengevaluasi model regresi 3 level dengan metode *Maximum Likelihood* pada data kepadatan penduduk Provinsi Lampung tahun 2016.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Faktor-faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk di Provinsi Lampung tahun 2016 adalah laju pertumbuhan ekonomi dan pertumbuhan penduduk.

2. Berdasarkan hasil analisis regresi 3 level diperoleh model regresi yaitu :

   $$\hat{Y}_{tij} = \hat{\alpha}_{000} + \hat{\alpha}_{110}X_{2tij} + \hat{\alpha}_{010}V_{1ij}$$

   Kepadatan Penduduk = -13,390 + 0,022 Laju Pertumbuhan Ekonomi + 1,059 Pertumbuhan Penduduk.

   Artinya, apabila terjadi peningkatan laju pertumbuhan ekonomi memberikan pengaruh terhadap kepadatan penduduk di Provinsi Lampung sebesar 0,022 dan apabila terjadi peningkatan pertumbuhan penduduk akan memberikan pengaruh terhadap kepadatan penduduk di Provinsi Lampung sebesar 1,059. Nilai korelasi intraklas antar kecamatan sebesar 0,234. Hal ini menunjukkan proporsi ragam pada level kecamatan sebesar 23,4%. Artinya tanpa mempertimbangkan faktor-faktor yang memperngaruhi variabel kepadatan penduduk, 23,4% proporsi keragaman variabel kepadatan penduduk dapat dijelaskan oleh variasi antar kecamatan.

DAFTAR PUSTAKA

Badan Pusat Statistik. 2018. Provinsi Lampung dalam Angka 2018. CV. Jaya Wijaya, Bandar Lampung.

Baroroh, A. 2013. *Analisis Multivariat dan Time Series dengan SPSS 21*. PT. Elex Media Komputindo, Jakarta.

Bryck, A.S. dan Raudenbush, S.W. 1987. Applying the Hierarchical Linear Models to Measurement of Change Problems. *Psychological Bulletin*. 101: 147-158.

Ghozali, I. 2016. *Aplikasi Analisis Multivariete Dengan Program IBM SPSS 23 (Edisi 8)*. Cetakan ke VIII. Badan Penerbit Universitas Diponegoro, Semarang.

Goldstein, H. 1999. *Multilevel Statistical Model*. Ed. ke-2. E-Book of Arnold, London.

Harlan, J. 2016. *Analisis Multilevel*. Gunadarma. Depok.

Hox, J.J. 1995. *Applied Multilevel Analysis*. TT-Publikaties, Amsterdam.

Hox, J.J. 2010. *Multilevel Analysis: Techniques and Applications*. Ed ke-2. Routledge, New York.

Kurniawan, D. 2008. *Regresi Linear*. R Development Core Team, Australia.

Kutner, M.H., Nachtsheim, C.J., dan Neter, J. 2004. *Applied Linear Regression Models*. Ed ke-4. McGraw-Hill Companies, New York.

Ludwig, F. dan Gerhard, T. 1994. *Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models*. Springer Series in Statistics. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg.

Myers, R.H. 1990. *Classical and Modern Regression with Application*. Ed ke-2. PWS.

Rencher, A.C. dan Schaalje, G.B. 2007. *Linear Model in Statistics*. Ed ke-2. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Santoso, S. 2012. *Panduan Lengkap SPSS Versi 20*. Jakarta: PT Elex Media Komputindo.

Tantular, B. 2009. Penerapan Model Regresi Linier Multilevel Pada Data Pendidikan dan Data Nilai Ujian. Tesis. Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Pertanian Bogor, Bogor.