FUNGSI HIPERGEOMETRI DARI DISTRIBUSI *GENERALIZED* LOG LOGISTIK

(Skripsi)

Oleh

Ai Mila Nurhayati

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

FUNGSI HIPERGEOMETRI DARI DISTRIBUSI *GENERALIZED* LOG LOGISTIK

By

AI MILA NURHAYATI

Hypergeometric function is one of the special functions of Ordinary Differential Equations (ODE). Hypergeometric functions are used in economics, mathematical engineering, and mathematical physics. Hypergeometric functions are solutions of the second order Ordinary Differential Equations (ODE). One method for obtaining solutions from second order Ordinary Differential Equations (ODE) is the Frobenius method. The frobenius method is used for Ordinary Differential Equations (ODE) with variable coefficients and regular singular at $x = 0$ where a series of the solutions will be obtained. By using the differential calculus the second order Ordinary Differential Equation (ODE) of the generalized log logistic distribution is obtained by differentiating the Probability Density Function (PDF) of the generalized log logistic distribution to the random variable x. Generalized log logistic distribution is used for survival analysis and economics. So obtained the hypergeometric function of the generalized log logistic distribution is

$$y = (a_1 + a_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e)_n (f)_n}{(f)_n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Keywords: Hypergeometri Fuction, Ordinary Differential Equation (ODE), Frobenius Method, Generalized Log Logistic Distribution.

ABSTRAK

FUNGSI HIPERGEOMETRI DARI DISTRIBUSI *GENERALIZED* LOG LOGISTIK

Oleh

AI MILA NURHAYATI

Fungsi hipergeometri adalah salah satu fungsi khusus dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Fungsi hipergeometri banyak digunakan dalam bidang ilmu ekonomi, teknik matematika, dan fisika matematika. Fungsi hipergeometri merupakan solusi dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde dua. Salah satu metode untuk memperoleh solusi dari persamaan diferensial biasa orde dua yaitu metode frobenius. Metode frobenius digunakan untuk Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan koefisien variabel dan singular regular di $x = 0$ yang mana akan diperoleh solusi berbentuk suatu deret. Dengan menggunakan kalkulus diferensial diperoleh Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde dua dari distribusi *generalized* log logistik dengan mendiferensialkan Fungsi Kepekatan Peluang (FKP) dari distribusi *generalized* log logistik terhadap peubah acak x. Distribusi *generalized* log logistik banyak digunakan untuk analisis survival dan ekonomi. Sehingga diperoleh fungsi hipergeometri dari distribusi *generalized* log logistik yaitu $y = (a_1 + a_0)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e)_n (f)_n}{(f)_n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Kata Kunci: Fungsi Hipergeometri, Persamaan Diferensial Biasa (PDB), Metode Frobenius, Distribusi *Generalized* Log Logistik

FUNGSI HIPERGEOMETRI DARI DISTRIBUSI *GENERALIZED* LOG LOGISTIK

Oleh

Ai Mila Nurhayati

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **FUNGSI HIPERGEOMETRI DARI DISTRIBUSI *GENERALIZED* LOG LOGISTIK**

Nama Mahasiswa : *Ai Mila Nurhayati*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031014

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.
NIP 196903051996032001

Ir. Warsono, M.S., Ph.D
NIP 196302161987031003

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 196311081989022001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ....

Sekretaris : **Ir. Warsono, M.S., Ph.D** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Eri Setiawan, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 196406041990031002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **18 Oktober 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah in:

Nama	: **Ai Mila Nurhayati**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1517031014**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Fungsi Hipergeometri dari Distribusi *Generalized* Log Logistik**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 Oktober 2019
Yang Menyatakan,

Ai Mila Nurhayati

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung, pada tanggal 25 Mei 1997, sebagai anak kelima dari enam bersaudara, dari pasangan bapak Suganda dan Ibu Euis Arum.

Pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD N 2 Tanjung Jaya, Lampung Tengah pada tahun 2009, Sekolah Menengah Pertama (SMP) diselesaikan di SMP N 2 Bangunrejo pada tahun 2012, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) diselesaikan di SMA N 1 Bangunrejo.

Tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa penulis aktif di organisasi Rohani Islam (Rois) FMIPA Unila pada tahun 2015 sebagai Anggota Bidang Kajian dan pada tahun 2016 sebagai Bendahara Bidang Kajian. Pada tahun 2017 penulis aktif sebagai Staff ahli Bendahara Kabinet Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) Universitas Lampung, pada tahun 2018 penulis aktif di organisasi Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unila sebagai Kepala Departemen Pemberdayaan Wanita.

PERSEMBAHAN

Alhamdulillaahi Rabbil 'Alamin

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan keberkahan tak terhingga kepada umat-Nya sehingga dapat merasakan indahnya Islam dan tempat penulis mengabdi sebagai hamba serta menggantungkan segala doa dan harapan. Shalawat dan salam semoga tercurahkan kepada Rasulullah SAW.

Penulis persembahkan karya ini untuk:

Ibu, yang selalu mendoakan dan memberikan semangat tanpa henti.

Bapak, yang selalu berkerja keras memberikan yang terbaik untuk keluarga.

Saudara penulis, Agus Sudrajat, Deti Rosmiyati, Yaya Sutarya, Tatang Kuswara, Dede Kurniawan, Ema Wati, Dede Kosasih, Siti Mariam, dan Eva Yuliana yang selalu mendoakan dan membantu disetiap kesulitan.

Guru-guru penulis, dengan penuh kesabaran memberikan pengetahuan dalam setiap bidang ilmu.

Teruntuk almamater tercinta Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

"Apabila hamba-hambaKu bertanya kepadamu (Wahai Muhammad) tentang Diriku, maka jawablah, bahwa Aku ini dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila ia memohon kepadaKu, maka hendaknya mereka itu memenuhi perintahKu dan hendaklah mereka yakin kepadaKu, agar mereka selalu berada dalam kebenaran"

QS: Al-Baqarah:186

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

QS: Al-Insyirah:6

"Cukuplah Allah menjadi Penolong kami dan Allah adalah sebaik-baik Pelindung"

QS: Al-Imran:173

" Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan suatu kaum sampai mereka merubah keadaannya sendiri"

QS: Ar- Ra;du: 11

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu padahal ia amat baik bagimu dan boleh jadi pula kamu menyukai sesuatu padahal ia amat buruk bagimu, Allah mengetahui sedang kamu tidak mengetahui"

QS: Al-Baqarah:216

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena atas berkah dan hidayah-Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Skripsi dengan judul *"Fungsi Hipergeometri dari Distribusi Generalized Log Logistik"* adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Si.) di Universitas Lampung.

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk membimbing penulis, memberikan motivasi, serta kritik dan saran kepada penulis selama menyusun skripsi.
2. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberi masukan dan arahan kepada penulis selama menyusun skripsi.
3. Bapak Drs. Eri Setiawan, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembahas yang memberi masukan dan evaluasi kepada penulis selama menyusun skripsi.
4. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D., selaku Pembimbing Akademik yang telah mengarahkan penulis dari awal sampai lulus kuliah.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan bantuan kepada penulis.
8. Bapak, Ibu, kakak dan adik yang telah memberikan doa, motivasi, dan material kepada penulis.
9. Saudari penulis, Ario, Azam, Rahmat, Dony, Riana, Uli, Cynthia, Liza, Ribut, Risna, Uli, dan Wilda yang telah memberikan doa dan motivasi kepada penulis.
10. "CIS" atau "Sahabat K" Azzahra, Finu, Gita, Resvy, dan Sindi yang selalu membantu, menemani suka dan duka serta memberikan motivasi kepada penulis.
11. Teman seperjuangan Randi, Sindi, Atika, Azizah, Silvy, Indah, Kiki, Lena, Yunda Nurul yang selalu membantu dan mendo'akan penulis..
12. Yunda Ulfa dan Yunda Indri yang telah banyak membantu dan memberikan semangat kepada penulis.
13. Keluarga besar Rois FMIPA, BEM FMIPA, dan BEM Unila yang telah memberikan ruang kepada penulis untuk mengembangkan potensi diri serta memberikan doa dan motivasi selama kepengurusan.

Semoga seluruh kebaikan yang telah diberikan mendapatkan balasan dari Allah SWT dengan limpahan keberkahan. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sebagai acuan di penelitian selanjutnya.

Bandar Lampung, 18 Oktober 2019

Ai Mila Nurhayati

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan yang terdiri dari satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap satu variabel bebas. Menurut Hilary *et al.* (2018), salah satu penerapan kalkulus dan Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yaitu perhitungan dalam menyelesaikan fungsi peluang dari suatu distribusi peluang. Diferensial kalkulus sering digunakan dalam ilmu statistika yaitu dalam pendugaan parameter contohnya adalah metode *maximum likelihood*. Terlepas dari pendugaan parameter, *Probability Density Function (PDF)* dari suatu distribusi peluang dapat dinyatakan sebagai Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Contohnya yaitu distribusi *beta*, distribusi *lomax*, distribusi *laplace* dan distribusi *kosinus*. Selain itu, Persamaan Diferensial Biasa (PDB) juga sering digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang sains dan teknologi dan memegang peranan penting dalam rekayasa fisika, ilmu ekonomi dan berbagai macam disiplin ilmu Marwan and Said (2009).

Dalam persamaan diferensial terdapat beberapa kelas fungsi khusus, diantaranya polinomial ortogonal *(jacobi, laguerre, hermitte)*, bola harmonik, persamaan bassel, dan fungsi hipergeometri. Kelas persamaan diferensial yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah kelas fungsi hipergeometri. Fungsi hipergeometri atau pada beberapa referensi disebut fungsi hipergeometri gauss merupakan salah satu bentuk fungsi khusus dari persamaan diferensial. Sebagian besar aplikasi fungsi hipergeometri digunakan dalam bidang ekonomi, teknik matematika, dan fisika matematika. Dalam matematika, fungsi hipergeometri ${}_pF_q(a, b, c; z)$ adalah fungsi khusus yang merupakan jumlah dari deret hipergeometri. Fungsi hipergeometri adalah solusi dari persamaan diferensial biasa orde dua. Setiap persamaan diferensial biasa orde dua dapat ditransformasikan ke dalam fungsi hipergeometri (Yukcu, 2017).

Telah dilakukan penelitian sebelumnya oleh Jamei (2010), mengenai hubungan antara fungsi hipergeometri gauss dengan distribusi Pearson. Dalam penelitian itu dijelaskan bahwa fungsi hipergeometri gauss dan distribusi Pearson saling berhubungan sehingga distribusi Pearson dapat di transformasikan dalam bentuk fungsi hipergeometri gauss. Distribusi Pearson dan fungsi hipergeometri gauss memenuhi persamaan diferensial unik dari fungsi hipergeometri. Distribusi Pearson adalah solusi dasar dari persamaan diferensial biasa dan berhubungan dengan fungsi hipergeometri gauss sehingga distribusi Pearson dan fungsi hipergeometri gauss terkait langsung satu sama lain. Oleh karena itu peneliti tertarik untuk melakukan penelitian dalam memperoleh persamaan diferensial orde dua dari distribusi *generalized* log logistik dengan menggunakan metode frobenius untuk mengembangkan penelitian sebelumnya.

Metode frobenius digunakan untuk memperoleh solusi dari persamaan diferensial biasa yang mempunyai koefisien berupa variable dan singular regular di $x = 0$. Metode ini sangat efisien digunakan pada persamaan diferensial koefisien variabel, sebab koefisien dari persamaan diferensial tidak dipersyaratkan mempunyai bentuk tertentu kemudian dapat dipertimbangkan solusi dalam bentuk sebuah deret yang disebut deret frobenius (Mubeen, 2014).

Dalam bidang ilmu matematika dan statistika distribusi log logistik merupakan salah satu distribusi dalam statistik yang dapat digunakan untuk menganalisis data *survival*. Analisis *survival* merupakan analisis mengenai lamanya waktu hidup suatu subjek pada suatu keadaan, Misalnya dalam kasus analisis kelangsungan hidup sebagai model parametrik untuk peristiwa yang laju awalnya meningkat dan kemudian menurun, misalnya dalam studi kasus tingkat kematian akibat kanker setelah diagnosis atau perawatan. Distribusi log logistik juga telah digunakan dalam hidrologi untuk memodelkan aliran air dan curah hujan, dan dalam ekonomi sebagai model sederhana dari distribusi kekayaan atau pendapatan. Selain itu, distribusi log logistik juga dapat diaplikasikan dalam bidang *actuarial sciences*, dan *reliability* (Cordeiro *et al.*, 2016).

Distribusi *generalized* log logistik adalah *generalized* dari distribusi log logistik dengan menambahkan parameter m_1 dan m_2 Distribusibusi *generalized* log logistik $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ merupakan distribusi peluang kontinu dengan empat parameter, yaitu α yaitu parameter lokasi *(threshold)* yang menunjukan lokasi waktu, yang mana pada saat lokasi waktu tersebut belum ada obyek pengamatan yang mati/rusak/gagal. β yaitu parameter skala yang menunjukkan besarnya keragaman data distribusi generalisasi log logistik, dan m_1 dan m_2 yaitu parameter bentuk yang menunjukan laju kematian/kerusakan/kegagalan data distribusi *generalized* log logistik (Warsono, 2010).

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mendapatkan Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde dua dari distribusi *generalized* log logistik.
2. Mendapatkan solusi dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde dua distribusi *generalized* log logistik dalam bentuk fungsi hipergeometri.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah :

1. Memahami metode frobenius dalam memperoleh solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde dua dari distribusi *generalized* log logistik.
2. Mengetahui Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde dua dari distribusi *generalized* log logistik.
3. Mengetahui solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde dua dari distribusi *generalized* log logistik dalam bentuk fungsi hipergeometri.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang terdiri dari variabel bebas, variabel tak bebas, dan turunan dari variabel tak bebas terhadap variabel bebas n. Bentuk umum persamaan diferensial yaitu,

$$F(x, y', y'', y''' \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

Persamaan diferensial yang terdiri dari satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Berdasarkan bentuk fungsi atau pangkatnya persamaan diferensial dibedakan menjadi persamaan linear dan persamaan non linear (Marwan and Said, 2009).

2.1.1. Persamaan Diferensial Linear

Menurut Marwan and Said (2009), sebuah persamaan differensial termasuk persamaan diferensial linear jika memenuhi dua hal berikut:

1. Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu dan tidak terdapat fungsi transenden dalam bentuk peubah tak bebas.

2. Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.

Istilah linear berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, variabel-variabel $y, y', \dots, y^n$ berderajat satu atau nol.

Bentuk umum persamaan differensial linear orde n adalah:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

dimana $a_0, a_1, \dots a_n, F$ merupakan fungsi dari x.

2.1.2 Persamaan Diferensial Non Linear

Menurut Marwan and Said (2009), persamaan differensial non linear merupakan persamaan yang bukan persamaan differensial linier.

Dengan demikian persamaan differensial $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ adalah persamaan differensial tak linier, jika salah satu dari syarat berikut dipenuhi oleh F:

1. F tidak berbentuk polinom dalam $y, y', \dots y^{(n)}$.
2. F tidak berbentuk polinom berpangkat lebih dari 2 dalam $y, y', \dots y^{(n)}$.

2.1.3 Persamaan Diferensial Homogen dan Tak Homogen

Menurut Stewart (1999), secara umum bentuk persamaan diferensial linear orde dua yaitu:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \tag{2.2}$$

Dengan P, Q, R ,dan G adalah fungsi kontinu. Persamaan (2.2) adalah persamaan diferensial linear tak homogen jika $G(x) \neq 0$. Jika $G(x) = 0$, untuk semua x dalam persamaan (2.2) disebut persamaan linear homogen. Jadi bentuk persamaan diferensial linear homogen orde dua adalah :

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ keduanya adalah solusi persamaan diferensial linear homogen dan c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang, maka fungsi $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ adalah solusi persamaan diferensial linear homogen. Sedangkan, jika fungsi koefisien P, Q dan R adalah fungsi konstan, yakni jika persamaan diferensial mempunyai bentuk:

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2.3}$$

Dengan $a, b,$ dan c konstanta dan $a \neq 0$. Jika fungsi eksponensial $y = e^{rx}$ (dengan r konstanta) mempunyai sifat bahwa turunannya adalah suatu konstanta dikali dirinya sendiri: $y' = re^{rx}$. Selanjutnya $y'' = r^2e^{rx}$. Jika kita substitusi bentuk ini kedalam persamaan (2.3), kita lihat bahwa $y = e^{rx}$ adalah solusi jika

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

Tetapi jika e^{rx} tidak pernah 0. Jadi, $y = e^{rx}$ adalah solusi dari persamaan (2.2) jika r adalah akar dari persamaan

$$ar^2 + br + c = 0$$

Dengan demikian basis-basis y_1 dan y_2 penyelesaian umum persamaan diferensial homogen, tergantung pada akar-akar persamaan karakteristik diatas. Akar-akar persamaan karakteristik dapat ditinjau dengan tiga kasus berikut :

a. Kasus 1 Akar-akar, r_1 dan r_2 adalah riil berbeda jika $b^2 - 4ac > 0$

Dalam kasus ini akar-akar r_1 dan r_2 dari persamaan indisial adalah real dan berbeda, sehingga $y_1 = e^{r_1 x}$ dan $y_2 = e^{r_2 x}$ adalah dua solusi yang bebas linear dari persamaan (2.3) dengan $e^{r_2 x}$ bukan kelipatan konstanta dari $e^{r_1 x}$ maka jika akar-akar r_1 dan r_2 dari persamaan indisial $ar^2 + br + c = 0$ yaitu:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Maka persamaan karakteristik, $a\lambda^2 + b\lambda + c > 0$ memiliki akar-akar yang berbeda, yaitu :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b. Kasus 2 Akar-akar $r_1 = r_2 = r$ riil berganda jika $b^2 - 4ac = 0$

Dalam kasus ini $r_1 = r_2$ yaitu akar-akar dari persamaan indisial adalah real dan sama. Jika nilai r_1 dan r_2 adalah r maka $r = -\frac{b}{2a}$ sehingga $2ar + b = 0$. Diketahui bahwa $y_1 = e^{rx}$ dan $y_2 = xe^{rx}$ adalah solusi bebas linear maka jika persamaan indisial $ar^2 + br + c = 0$ hanya mempunyai satu akar real r, maka solusi umum dari $ay'' + by' + cy = 0$ adalah:

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

c. Kasus 3 Akar-akar r_1 dan r_2 komplek konjugate jika $b^2 - 4ac < 0$

Dalam kasus ini, akar-akar r_1 dan r_2 dari persamaan indisial berupa bilangan kompleks sehingga dapat dituliskan

$$r_1 = \alpha + i\beta$$

$$r_2 = \alpha - i\beta$$

Dengan α dan β bilangan real dan $c_1 = C_1 + C_2$, $c_2 = i(C_1 - C_2)$. Jika akar-akar persamaan indisial $ar^2 + br + c = 0$ adalah bilangan kompleks $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ maka solusi umum dari $ay'' + by' + cy = 0$ dengan akar-akar kompleks konjugate basis-basisnya adalah $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ dan $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$. Jadi penyelesaian umum persamaan diferensial diberikan oleh,

$$\begin{aligned} y &= k_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + k_2 e^{(\alpha-\beta i)x} \\ &= k_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\, sin\,\beta x) + k_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\, sin\,\beta x) \\ &= (k_1 + k_2)e^{\lambda x}\cos\beta x + i(k_1 - k_2)\, e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

Selanjutnya ambil $c_1 = k_1 + k_2$ dan $c_2 = i(k_1 - k_2)$, dengan demikian penyelesaian umum persamaan diferensialnya diberikan oleh,

$$y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)\, e^{\lambda x}$$

2.1.4 Persamaan Diferensial Linear Orde Kedua dengan Koefisien Konstan

Persamaan diferensial linear orde kedua dengan koefisien konstanta dituliskan dalam bentuk umum, yaitu

$$ay'' + by' + cy = r(x) \qquad (2.4)$$

a, b, c merupakan konstanta yang dinamakan koefisien persamaan itu dan r dapat merupakan fungsi dari x atau konstanta (David and Edward, 1992).

2.1.5 Persamaan Diferensial Linear Orde Kedua dengan Koefisien Variabel

Persamaan diferensial linear orde kedua dengan koefisien variabel yang paling sederhana adalah persamaan Euler-Cauchy. Persamaan ini mempunyai bentuk khusus yaitu:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + by = 0, x \neq 0 \qquad (2.5)$$

Dimana α dan b adalah konstanta. Pangkat dari x dalam setiap suku pada ruas sebelah kiri dari persamaan (2.5) sesuai dengan orde turunan yang tampak dalam suku itu, x^2 dengan turunan kedua, x dengan turunan pertama dan x^0 dengan y sendiri (David and Edward, 1992).

2.2 Fungsi Hipergeometri

Menurut Yukcu (2017), fungsi Gaussian atau fungsi hipergeometri ${}_pF_q(a, b, c; z)$ adalah fungsi khusus yang merupakan penjumlahan dari deret hipergeometri. Sebagian besar aplikasi fungsi hipergeometri digunakan dalam bidang ekonomi, matematika teknik, dan fisika matematika. Fungsi hipergeometri adalah solusi dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde kedua. Setiap Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde kedua dapat ditransformasikan ke dalam persamaan fungsi hipergeometri.

Definisi 2.1

Diberikan suatu deret $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ disebut deret hipergeometri jika rasio $\frac{c_n+1}{c_n}$ adalah fungsi rasional dari n.

Dengan faktorisasi, ini berarti bahwa:

$$\frac{c_n+1}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)...(n+a_p)z}{(n+b_1)(n+b_2)...(n+b_q)(n+1)} \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Diketahui bahwa,

$$c_n = \frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_p)_n z^n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_q)_n n!} c_0 \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$(a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1), \quad n = 0, 1, 2, ...$ dan $\quad (a)_0 = 1$

Sehingga,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_q)_n} . \frac{z^n}{n!}$$

Definisi 2.2

Fungsi hipergeometri ${}_pF_q(a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_p; \ b_1, b_2, \ . \ . \ . \ . \ , b_q; z)$ didefinisikan menggunakan deret geometri, sebagai berikut:

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, & ... & a_p \\ b_1, b_2, & ... & b_q \end{matrix}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdot ... (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdot ... (b_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

p adalah peluang kejadian berhasil sedangkan q adalah peluang kejadian gagal.

Definisi 2.3

Suatu fungsi khusus dinyatakan sebagai deret tak berhingga yang merupakan penjumlahan dari deret hipergeometri disebut fungsi hipergeometri yang di definisikan dalam bentuk :

$${}_2F_1(a, b, c; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \ (2.6)$$

$${}_2F_1(a, b, c; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \equiv 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2} + \cdots$$

Dimana a dan b adalah parameter pembilang, c adalah parameter penyebut, dan z adalah peubah acak. p adalah peluang kejadian berhasil sedangkan q adalah peluang kejadian gagal dengan $p = q + 1$.

2.3 Distribusi *Generalized* Log Logistik

Menurut Warsono (2010), fungsi kepekatan peluang (FKP) dari distribusi *generalize* log logistik sebagai berikut:

$$g(x;\alpha,\beta,m_1,m_2) = \left(\frac{\alpha}{xB(m_1,m_2)}\right)[F(x)]^{m_1}[1-F(x)]^{m_1} \tag{2.7}$$

Dengan $F(x) = \frac{1}{(1+e^{-(\beta+\alpha lnx)})}$ merupakan fungsi distribusi log logistik. Misalkan $F(x) = u = \frac{1}{(1+e^{-(\beta+\alpha lnx)})}$ maka $du = \left(-\frac{\alpha}{x}\right)(-1)\frac{e^{-(\beta+\alpha lnx)}}{(1+e^{-(\beta+\alpha lnx)})}dx$ sehingga fungsi distribusi *generalize* log logistik $g(x;\alpha,\beta,m_1,m_2)$ sebagai berikut:

$$G(x) = \frac{1}{B(m_1,m_2)}\int_0^{F(x)} u^{m_1}(1-u)^{m_2}du$$

Dimana x menyatakan peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu mati/rusak/gagal *(failure time)*, α yaitu parameter lokasi *(threshold)* yang menunjukan lokasi waktu, yang mana pada saat lokasi waktu tersebut belum ada obyek pengamatan yang mati/rusak/gagal. β yaitu parameter skala yang menunjukkan besarnya keragaman data distribusi generalisasi log logistik, dan m_1 dan m_2 yaitu parameter bentuk yang menunjukkan laju kematian/kerusakan/kegagalan data distribusi generalisasi log logistik.

2.4 Metode Frobenius

Menurut David and Edward (1992), metode frobenius diperkenalkan oleh matematikawan asal Jerman Georg Frobenius pada tahun 1870. Metode Frobenius merupakan metode yang digunakan untuk memperoleh solusi dari persamaan diferensial biasa koefisien variable pada titik singular regular $x = 0$ yang berbentuk sebagai berikut:

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2.8)$$

Dengan fungsi-fungsi $p(x), q(x)$ merupakan deret pangkat. bentuk umum dari deret frobenius adalah sebagai berikut:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad (2.9)$$

Dimana pangkat r merupakan bilangan riil dan $a_0 \neq 0$.

Prosedur metode frobenius untuk menyelesaikan persamaan diferensial (2.8) adalah pertama-tama tulis persamaan (2.8) kedalam bentuk $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$. Kemudian $p(x)$ dan $q(x)$ diuraikan dalam bentuk deret pangkat dari x yaitu

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots \quad (2.10)$$

$$q(x) = q_0 + q_1x + qx^2 + qx^3 + \cdots \quad (2.11)$$

Dan mendiferensialkan suku demi suku, yaitu

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)a_n\, x^{n+r-1} = x^{r-1}(ra_0 + (r + 1)a_1x + \cdots) \quad (2.12)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)(n + r - 1)a_n\, x^{n+r-2} = x^{r-2}(r(r - 1)a_0 + (r + 1)ra_1x + \cdots) \quad (2.13)$$

Persamaan (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) selanjutnya disubstitusikan kedalam persamaan diferensial (2.8) dan menyamakan jumlah semua koefisien dari setiap pangkat x sama dengan nol. Hal ini akan menghasilkan suatu persamaan yang mengandung koefisien-koefisien a_n yang tidak diketahui. Pangkat terkecil adalah x^r dan persamaan indisialnya adalah:

$$(r(r-1)+p_0 r+q_0)a_0 = 0 \tag{2.14}$$

Karena diasumsikan bahwa $a_0 \neq 0$ maka

$$r(r-1)+p_0 r+q_0 = 0 \tag{2.15}$$

$$r^2+(p_0-1)r+q_0 \tag{2.16}$$

Persamaan (2.16) dinamakan persamaan indisial yang akan berperan menentukan basis solusi. Salah satu dari kedua solusi yang membentuk basis solusi akan selalu berbentuk

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Dengan r adalah akar dari persamaan indisial. Bentuk dari solusi lainnya akan ditunjukkan oleh persamaan indisial bergantung pada akar-akarnya. Misalkan r_1 dan r_1 maka ada tiga kasus yaitu

1. Akar-akar yang berbeda yang tidak dibedakan oleh bilangan bulat.

   Basis solusinya adalah

   $y_1 = x^{r1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ dan $y_2 = x^{r2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, x^n$

2. Akar rangkap $r_1 = r_1 = r$.

   Basis solusinya adalah

   $y_1 = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ dan $y_2 = y_1 \ln(x) + x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, x^n$

3. Akar-akar yang dibedakan oleh suatu bilangan bulat.

   $y_1 = x^{r1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ dan $y_2 = ky_1 \ln(x) + x^{r2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, x^n$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019. Bertempat di Jurusan Matematika Fakutas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji bahwa distribusi *generalized* log logistik dengan 4 parameter memiliki hubungan dengan fungsi hipergeometri sehingga distribusi *generalized* log logistik dapat diubah menjadi bentuk fungsi hipergeometri dengan menggunakan metode frobenius.

Langkah-langkah yang dilakukan sebagai berikut :

1. Mengubah distribusi *generalized* log logistik kedalam bentuk persamaan diferensial biasa orde 2 dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menurunkan distribusi *generalized* log logistik sampai turunan kedua terhadap peubah acak x.

b. Mensubstitusikan parameter $\alpha, \beta, m_1, m_2 = 1$ kedalam persamaan diferensial biasa orde 2 distribusi *generalized* log logistik.

2. Mengubah persamaan diferensial biasa orde 2 distribusi *generalized* log logistik menjadi bentuk deret dengan menggunakan metode frobenius.

   Adapun langkah-langkah mengubah persamaan diferensial biasa orde dua distribusi *generalized* log logistik menjadi deret dengan metode frobenius adalah sebagai berikut:

   a. Periksa singularitas dari persamaan diferensial biasa orde dua distribusi *generalized* log logistik.
   b. Menentukan turunan pertama dan turunan kedua dari bentuk deret frobenius $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$.
   c. Mensubstitusikan deret frobenius kedalam persamaan diferensial distribusi *generalized* log logistik sehingga akan terbentuk suatu deret.
   d. Mencari akar-akar dari persamaan indisial. Persamaan indisial didapat dari koefisien pangkat x terkecil yang diperoleh dari deret.
   e. Mencari nilai a_n dengan menyamakan pangkat x terkecil dalam persamaan diferensial distribusi *generalized* log logistik.

3. Mengubah deret frobenius dari persamaan diferensial orde dua dari distribusi *generalized* log logistik ke dalam bentuk fungsi hipergeometri

$$ {}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}. $$

4. Menentukan parameter $a, b, c,$ dan z dari fungsi hipergeometri ${}_pF_q(a, b, c; z)$.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian ini dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

Distribusi *generalized* log logistik adalah

$$f(x;\alpha,\beta,m_1,m_2)=\left(\frac{\alpha}{xB(m_1,m_2)}\right)\left[\frac{1}{1+e^{-(\beta+\alpha lnx)}}\right]^{m_1}\left[1-\frac{1}{1+e^{-(\beta+\alpha lnx)}}\right]^{m_2}$$

diperoleh persamaan diferensial orde dua dari distribusi *generalized* log logistik adalah

$$y''+\left[\frac{2e}{(1+ex)^1}\right]y'-\left[\frac{2e^2}{x(1+ex)^2}+\frac{2e}{x(1+ex)^1}\right]y=0$$

dan solusi dari persamaan diferensial orde dua dari distribusi *generalized* log logistik dengan menggunakan metode frobenius $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$, diperoleh solusi

$$y=$$

$$(a_1+a_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(n-1)(n-2)ne^n+2e^{2n-2}(n-1)]}{(n-1)!}\frac{x^n}{n!}+$$

$$a_1\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{[(n-1)e^{n-1}-2(n-1)e-(n-1)][(n-1)e^{n-1}-(n+1)(n-1)e-n(n-1)]}{n!}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Atau dapat dituliskan dalam

$y=(a_1+a_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e)_n(f)_n}{(f)_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ atau

$y = (a_1 + a_0)\ {}_1F_1(a, c; x) +\ a_1\ {}_2F_1(e, f, g; x)$

5.2 Saran

Adapun saran dari penelitian ini yaitu, algoritma fungsi hipergeometri dapat dikembangkan lebih lanjut dengan menggunakan jenis distribusi berbeda, seperti distribusi *Generalized T*, *Generalized Chi Square*, *Generalized Gamma* dan sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Cordeiro, Santana T.V.F.D., Edwin M.M., Ortega G.M., and Giovana O.S. 2012. "The Kumaraswamy Log Logistic Distribution". *Statistical Theory and Applications*. **11**(03):1538-7887.

David, E.P. and Edward, C.H. 1992. *Elementary Differential Equation with Boundary Value Problems Third Edition*. New Jersey: The United States ofAmerica

Hilary, I., Okagbue, Member, IAENG, P.E., Oguntunde, A.A., Opanuga dan Patience I.A., 2018. "Classes of Ordinary Differential Equations Obtained for the Probability Functions of Logistic and Log-Logistic Distributions". *Engineering and Computer Science*, **01**(07):2078-0966.

Jamei, M.M. 2010. "On Relationships Between Classical Pearson Distribution and Gauss Hypergeometric Function". *Science and Business Media*. **10**(09): 401-411.

Marwan and Said. 2009. Persamaan Diferensial Ed. Ke-1. Graha Ilmu: Yogyakarta.

Mubeen, S., 2013. "Solution of Some Integral Equations Involving Conuent *K* Hypergeometric Functions," *Applied Mathematics*. **04**(07): 9–11.

Stewart, James. 1999. *Calculus Fourth Edition.* International.Brooks/Cole Publishing Company: New York.

Warsono. 2010. Remarks on Moment Properties of Generalized Distribution. *Proccedings of The Third International Conference on Mathematics and Natural Sciences.* ITB, Bandung

Yukcu, Niyazi. 2017. “Hypergeometric Functions in Mathematics and Theoretical Physics”. *Arts and Science*. **09**(04):273-282.