PERBANDINGAN METODE $1/3$ SIMPSON DENGAN METODE ROMBERG DALAM PENYELESAIAN INTEGRAL RANGKAP DUA

(Skripsi)

Oleh

AKIKA MEGA FADILLAH

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2019

ABSTRAK

PERBANDINGAN METODE 1/3 SIMPSON DENGAN METODE ROMBERG DALAM PENYELESAIAN INTEGRAL RANGKAP DUA

Oleh

AKIKA MEGA FADILLAH

Tidak semua bentuk integral rangkap dua dapat diselesaikan secara analitik. Namun demikian, hal tersebut tidak menjadi kendala karena dapat digunakan pendekatan lain untuk menemukan solusinya dengan pendekatan numerik diantaranya metode 1/3 Simpson dan metode Romberg. Penyelesaian numerik integral rangkap dua dengan menggunakan metode 1/3 Simpson dan Romberg mampu memberikan nilai integrasi dalam waktu yang lebih cepat. Hasil penyelesaian integral rangkap dua yang diperoleh dengan menggunakan metode Romberg menunjukkan nilai galat yang lebih kecil dibandingkan dengan nilai galat dengan menggunakan metode 1/3 Simpson, sedangkan waktu komputasi yang dihasilkan metode 1/3 Simpson lebih kecil dibandingkan dengan metode Romberg. Oleh karena itu hasil perbandingan yang diperoleh menunjukkan bahwa metode Romberg memberikan hasil integrasi lebih baik daripada metode 1/3 Simpson, sedangkan metode 1/3 Simpson memiliki kecepatan yang lebih tinggi dalam penyelesaiannya.

Kata Kunci : Integral Rangkap Dua, metode 1/3 Simpson, metode Romberg.

ABSTRACT

A COMPARISON OF 1/3 SIMPSON METHOD AND ROMBERG METHOD IN DOUBLE INTREGRAL COMPLETION

By

AKIKA MEGA FADILLAH

Not all forms of double integral can be solved analytically. However, this should not be a problem because it can be used another approach to find a solution with such numerical approximation 1/3 Simpson and Romberg methods. Numerical solution of the double integral using 1/3 Simpson method and Romberg method are able to provide value integration in a faster time. The result of the completion of the double integral obtained by using Romberg method show the error value is smaller than the error value by using 1/3 Simpson's method, whereas computing time generated 1/3 Simpson method is smaller than the Romberg method. Therefore, the comparative results obtained showed that the Romberg method provides better results than the integration of 1/3 Simpson's method, while 1/3 Simpson's method has a higher speed in the solution.

Keyword : Double integral, 1/3 Simpson’s method, Romberg method.

PERBANDINGAN METODE 1/3 SIMPSON DENGAN METODE ROMBERG DALAM PENYELESAIAN INTEGRAL RANGKAP DUA

Oleh

AKIKA MEGA FADILLAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGTAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN METODE 1/3 SIMPSON DENGAN METODE ROMBERG DALAM PENYELESAIAN INTEGRAL RANGKAP DUA**

Nama Mahasiswa : *Akika Mega Fadillah*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031130

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.
NIP 19730314 200012 1 002

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **16 Juli 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : **Akika Mega Fadillah**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1517031130**

Judul : **PERBANDINGAN METODE 1/3 SIMPSON DENGAN METODE ROMBERG DALAM PENYELESAIAN INTEGRAL RANGKAP DUA**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Juli 2019

Akika Mega Fadillah
NPM. 1517031130

Riwayat Hidup

Penulis bernama lengkap Akika Mega Fadillah, anak pertama dari dua bersaudara. Penulis dilahirkan di Bandar Lampung, pada tanggal 9 Oktober 1997 dari pasangan Almarhum Bapak Anang Kiswo Adi dan Ibu Ika Kartika.

Penulis menempuh pendidikan di Sekolah Dasar Negeri 3 Perumnas Wayhalim Kota Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2008. Pada tahun 2009 melanjutkan di Madrasah Tsanawiyah Al-Hikmah 2 Jawa Tengah diselesaikan pada tahun 2013. Kemudian pada tahun 2013 melanjutkan di Madrasah Aliyah Al-Hikmah 2 Jawa Tengah diselesaikan pada tahun 2015.

Pada tahun 2015, penulis diterima sebagai Mahasiswi di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Pada awal tahun 2018, penulis melaksanakan kerja praktik di Kantor Pelayanan Pajak Pratama Kedaton, selain itu melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Harapan Jaya Kec. Way Ratai Kabupaten Pesawaran.

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu terdapat

kemudahan

(Q. S. Al-Insyirah / 94:5)

Barang siapa yang bersungguh – sungguh,

sesungguhnya kesungguhan tersebut untuk kebaikan

dirinya sendiri

(Q.S. Al – Ankabut / 6)

Bertaqwalah kepada Allah, maka Dia akan

membimbingmu. Sesungguhnya Allah mengetahui

segala sesuatu

(Q.S. Al – Baqarah / 282)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil alamin

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang dan Segala Puji dan Syukur kepada Allah SWT

Kupersembahkan karya sederhanaku ini teruntuk :

Kedua Orang tua ku, Ayahanda tercinta Alm. Anang Kiswo Adi dan Ibunda tercinta Ika Kartika yang tak henti – hentinya memberikan kasih sayangnya, do'a, dan motivasi dalam segala hal. Serta adikku tersayang Lintang Antika Fadillah yang selalu memberikan semangat.

Guru – guru yang selalu membagi ilmunya untukku

Seluruh keluarga ku

Teman dan sahabatku

Almamater Unila

SANWACANA

Assalamualaikum Wr. Wb.

Dengan mengucap Alhamdulillah penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT berkat Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, suri tauladan terbaik sepanjang masa.

Penulis memperoleh banyak bantuan, dukungan, bimbingan serta kritis dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu diselesaikan.

Dengan ketulisan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih banyak kepada :

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang telah membimbing penulis dengan setulus hati, menyumbangkan ilmunya, memberikan motivasi serta telah banyak meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing hingga skripsi ini terselesaikan.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak membantu, memberi masukan serta dengan sabar memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.

3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan saran, pengarahan, nasehat, kesabaran, dan bantuan yang sangat berharga untuk perbaikan penulisan skripsi.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Pd.D. selaku Kepala Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
5. Bapak Drs. Suratman, M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung .
6. Para Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung .
7. Kedua orang tua ku yang aku sayangi (Ayahanda Alm. Anang Kiswo Adi & Ibunda Ika Kartika) adikku tersayang (Lintang Antika Fadillah) serta untuk seluruh keluarga terima kasih atas kasih sayang, do'a, nasehat perhatian dan dukungan yang tidak henti – hentinya.
8. Tiwi, Desun, Dai, Mona, Yuni, Rizka, Ratri yang telah memberikan semangat serta patner sharing terbaik.
9. Teman – teman matematika angkatan 2015 khususnya kelas C, terima kasih suka duka selama kurang lebih 4 tahun.
10. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Akhir kata, semoga ketulusan serta bantuan dari semua pihak tersebut kiranya mendapat berkah dan anugrah dari Allah SWT.

Bandar lampung, Juli 2019

Akika Mega Fadillah

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika pada dasarnya merupakan alat, sarana atau pelayanan ilmu lain. Hal ini tidak dapat dipungkiri dengan munculnya berbagai aplikasi matematika, baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai displin ilmu lain yang membutuhkan banyak perhitungan. Matematika memiliki banyak cabang ilmu, salah satu diantaranya yaitu kalkulus. Kalkulus memiliki dua cabang utama yaitu kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Integral merupakan salah satu topik dalam kalkulus yang digunakan dalam beberapa bidang studi seperti fisika, teknik dan lain sebagainya.

Penerapan integral rangkap dua banyak ditemui dalam bidang sains dan rekayasa, seperti menghitung persamaan volume, luas, massa dan lain-lain. Contoh-contoh tersebut umumnya memiliki fungsi yang bentuknya rumit sehingga tidak dapat diselesaikan secara analitik. Maka solusi persoalan intergral rangkap dua dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik.

Metode numerik merupakan teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa. Ada beberapa pendekatan numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan integral rangkap dua diantaranya metode 1/3 Simpson dan metode Romberg.

Dalam penulisan ini, penulis bermaksud untuk menyusun skripsi dengan judul "Perbandingan Metode 1/3 Simpson Dengan Metode Romberg Dalam Penyelesaian Integral Rangkap Dua".

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Penyelesaian integral rangkap dibatasi pada dua variabel bebas yaitu x dan y.
2. Batas integral rangkap bernilai konstan (a, b, c dan d).
3. f (x,y) merupakan fungsi aljabar.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menyelesaikan solusi numerik integral rangkap dua dengan metode 1/3 Simpson dan metode Romberg.
2. Memberi informasi tentang tingkat keakuratan (galat) metode 1/3 Simpson dan metode Romberg pada penyelesaian integral rangkap dua.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui langkah-langkah penyelesaian numerik integral rangkap dua dengan menggunakan metode $1/3$ Simpson dan metode Romberg.
2. Mengetahui tingkat keakuratan metode $1/3$ Simpson dan metode Romberg pada penyelesaian integral rangkap dua.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Dalam metode numerik terdapat beberapa bentuk proses hitungan atau algoritma untuk menyelesaikan suatu tipe persamaan matematis. Hitungan numerik dapat dilakukan dengan menggunakan salah satu dari bentuk proses hitungan yang paling efisien yang memerlukan waktu hitungan paling cepat. Operasi hitungan yang dilakukan dengan iterasi dalam jumlah yang paling banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu, diperlukan komputer untuk melaksanakan operasi hitung tersebut. Tanpa bantuan komputer metode numerik tidak banyak memberikan manfaat (Triatmodjo, 2002).

2.2 Integral Rangkap Dua

Dalam bidang teknik, integral sering muncul dalam bentuk integral rangkap dua atau integral rangkap tiga.

Persamaan integrasi rangkap dua termasuk integrasi *Qubature mechanic*, dengan fungsi integran mempunyai dua variable bebas. Integrasi dinyatakan sebagai:

$$I = \iint_A f(x,y)dA$$

Atau

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \qquad (2.1)$$

Penyeselaian integral rangkap paling mudah diselesaikan dengan integrasi parsial secara berturut-turut, yang merupakan kebalikan dari diferensial parsial. Dengan demikian, untuk menghitung integral rangkap, suatu fungsi dari dua variable bebas diintegrasikan terhadap salah satu variabel bebas tadi sementara variabel yang lain dianggap konstan, hasil integrasi parsial ini kemudian diintegrasikan terhadap variabel bebas yang tadinya dianggap konstan (Nasution, 2001).

2.3 Fungsi

Sebuah fungsi *f* adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek *x* dalam suatu himpunan, dengan sebuah nilai tunggal *f* (*x*) dari suatu himpunan kedua.

2.3.1 Fungsi Aljabar

Fungsi *f* disebut fungsi aljabar jika *f* dinyatakan sebagai jumlahan, selisih, hasil kali, hasil bagi, pangkat, ataupun akar fungsi suku banyak.

Contoh : $f(x) = \frac{3x - x^2 \; (x+1)^{2/3}}{\sqrt{x^2+1}}$

Adapun fungsi suku banyak berderajat *n* mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$f(x) = P_n(x) = \; a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Dengan *n* bilangan bulat tak negatif $a_1, \ldots, a_n$ adalah bilangan-bilangan real dan *a* ≠ 0 (Purcell dkk, 1987).

2.3.2 Fungsi Transenden

Fungsi yang bukan fungsi aljabar disebut fungsi transenden. Beberapa contoh fungsi transenden adalah fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi eksponensial, fungsi hiperbolik (Purcell dkk, 1987).

2.4 Metode $1/3$ Simpson

Kaidah simpson merupakan turunan dari metode Newton-Cotes. Metode atau kaidah ini dikenalkan oleh seorang ahli matematika bernama Thomas Simpson (1710-1761) dari Leicestershire, Englad. Metode $1/3$ Simpson dapat didefinisikan sebagai luas daerah yang dibatasi oleh hampiran fungsi parabola. Integral $1/3$ Simpson secara numerik didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_c^d \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left((S_0) + \; 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} S_{2i-1} + \; 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} S_{2i} + (S_n) \right)$$

Keterangan :

$n =$ subinterval

h = jarak antar titik ($h = \frac{(b-a)}{n}$)

a, b, c, d = interval

$f_{i,j} = f(x_i, y_j)$

x_i = titik absis pias pada variabel x ($x_i = x_0 + ih$)

y_j = titik absis pias pada variabel y ($y_i = y_0 + ih$)

$$S_i = \frac{k}{3}\left(f_{i,0} + 4\left(f_{i,1} + f_{i,3} + \cdots + f_{i,m-1}\right) + 2\left(f_{1,2} + f_{i,4} + \cdots + f_{i,m-2}\right) + f_{i,m}\right)$$

(Purcell dkk, 1987).

Algoritma penyelesaian integral rangkap dua dengan menggunakan metode $1/3$ Simpson adalah sebagai berikut :

1. Mendefinisikan fungsi integral $f(x, y)$.
2. Menentukan batas-batas integral rangkap dengan nilai konstan.
3. Mensimulasikan jumlah iterasi.
4. Menentukan nilai *h*

$$h = \frac{b-a}{n}$$

5. Menginput program tic toc untuk mengetahui waktu komputasi metode $1/3$ Simpson dalam penyelesaian integral rangkap dua.
6. Menghitung nilai S_i dengan rumus

$$S_i = \frac{k}{3}\left(f_{i,0} + 4\left(f_{i,1} + f_{i,3} + + f_{i,m-1}\right) + 2\left(f_{1,2} + f_{i,4} + \cdots + f_{i,m-2}\right) + f_{i,m}\right)$$

7. Menghitung nilai integrasi dengan rumus

$$\mathrm{I} = \frac{h}{3}\left((S_0) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} S_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} S_{2i} + (S_n)\right)$$

2.5 Aturan Trapesium Rekursif

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada $[a,b]$ dan $h = (b - a)$. Untuk $n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ atau untuk $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k$, didefinisikan barisan aturan trapesium

$T_0, T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$

Dengan

$T_0 = T_1(f,h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$ dan $T_k = T_{2^k}\left(f, \frac{h}{2^k}\right)$ $k = 1, 2, 3, \ldots$

Barisan aturan trapesium tersebut memenuhi hubungan

$$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$$

Dengan $f_i = f\left(a + i\frac{h}{2^{k+1}}\right)$

Bukti :

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisis pada $[a, b]$,

Misalkan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ suatu interval $[a, b]$ sedemikian hingga $x_k = x_0 + kh$ dengan $h = (b - a) / n$ untuk $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Berdasarkan rumusan ekstrapolasi Richardson, maka integrasi fungsi dilakukan dengan menghitung dua cara perkiraan $I(h_1)$ dan $I(h_2)$. Dapat diartikan mula-mula menghitung nilai integrasi untuk mendapatkan $I(h_1)$, kemudian menghitung kembali nilai integrasi untuk memperoleh $I(h_2)$ lalu akhirnya menghasilkan nilai integrasi yang lebih cermat.

T_n adalah arisan aturan trapesium dan n = 1, 2, 4, 8, 16, … atau $n = 2^0, 2^1, 2^2, \ldots,$ $2^k, \ldots$, maka :

Pertama : T_n dengan lebar setiap subinterval adalah h, maka didapat

$$T_n(f,h) = \frac{h}{2}\,\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\}$$

$$= \frac{h}{2}\{f_0 + f_1\} + h\,\{f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}\}$$

$$= \frac{h}{2}\{f_0 + f_1\} + h\ \sum_{k=1}^{n-1} f_k$$ dimana $f_k = f\,(x_0 + kh)$,

Kedua, jika lebar setiap subinterval diperkecil setengahnya, maka didapat

$$T_{2n}\left(f, \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{4}\{f_0 + f_{2n}\} + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{2n-1} f_k$$

$$= \frac{h}{4}\{f_0 + f_{2n}\} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n-1} f_{2j} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1}$$

$$= \frac{T_n(f,h)}{2} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1}$$ dimana $f_k = f\,(x_0 + kh / 2\,)$,

Dalam menghitung hampiran $\int_a^b f(x)dx$ dengan aturan trapesium rekursif, dilakukan langkah – langkah sebagai berikut :

$h = b - a$

$T_0 = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$

$T_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_1$

$T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{4} (f_1 + f_3)$

$T_3 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{8}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7)$

.

.

$T_n = \frac{T_{n-1}}{2} + \frac{h}{2^n} \sum_{j-1}^{2^{n-1}} f_{2j-1}$ dengan $f_i = f\left(a + i\,\frac{h}{2^{k+1}}\right)$

(Sahid, 2004).

2.6 Metode Romberg

Pada integrasi Romberg, mula – mula menghitung kuadratur dengan lebar interval h dan $2h$, untuk menurunkan galat hampiran integral dari $O(h^{2n})$ menjadi $O(h^{2n+2})$ dapat digunakan ektrapolasi Richardson. Dimana untuk *n* = 1 berhubungan dengan nilai dasar dari perhitungan rumus trapezoid, n = 2 berhubungan dengan nilai dasar perhitungan rumus Simpson atau $O(h^4)$, *n* = 3 berhubungan dengan nilai dasar dari perhitungan rumus Boole atau $O(h^6)$, jadi untuk *n* berhubungan dengan $O(h^{2n})$ (Munif dan Hidayatullah, 2003).

Tabel 1. Proses Integrasi Romberg

R(1, 1)					
R(2, 1)	R(2, 2)				
R(3, 1)	R(3, 2)	R(3, 3)			
R(4, 1)	R(4, 2)	R(4, 3)	R(4, 4)		
R(5, 1)	R(5, 2)	R(5, 3)	R(5, 4)	. . .	
:	:	:	:	:	
R(N, 1)	R(N, 2)	R(N, 3)	R(N, 4)	. . .	R(N,N)

Kolom pertama pada tabel 1 proses integrasi romberg memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan Trapesium rekursif. Kolom kedua merupakan hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan Simpson rekursif. Kolom ketiga memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan Boole rekursif. Kolom keempat, kolom kelima, kolom keenam memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan integrasi Romberg dan seterusnya (Sahid, 2004).

2.7 Integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson

Teorema 2.7.1

Jika diketahui dua buah hampiran R_k $(f,\ h)$ dan R_k $(f,\ 2h)$ untuk nilai Q yang memenuhi

$$Q = R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \cdots$$

Dan

$$Q = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \cdots$$

Maka

$$Q = \frac{4^k R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2})$$

Bukti :

Misalkan Q adalah nilai integrasi Romberg dengan jarak antar titik adalah h

$$Q = R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \cdots \qquad (2.2)$$

Ekstrapolasikan h menjadi $2h$, lalu hitung integrasi numerik nya

$$Q = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \cdots \qquad (2.3)$$

Eliminasikan *C* dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (2.2) dan (2.3) :

$R_k(f, 2h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \ldots = R_k(f, 2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \cdots$

$R_k(f, h) + c\, h^{2k} + O(h^{2k+2}) = R_k(f, 2h) + c\, 4^k h^{2k} + (h^{2k+2})$

$R_k(f, h) - R_k(f, 2h) = c\, 4^k h^{2k} - c\, h^{2k}$

$R_k(f, h) - R_k(f, 2h) = c_1 h^{2k}(4^k - 1)$

$$c_1 = \frac{R(f,h) - R(f,2h)}{(4^k - 1)h^{2k}} \qquad (2.4)$$

Subtitusikan (2.4) kedalam persamaan (2.2) untuk memperoleh

$$Q = R_k(f, h) + \frac{R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2}) \qquad (2.5)$$

Persamaan (2.5) merupakan integrasi Romberg. Jadi teorema diatas terbukti.

Jika teorema diatas dedefinisikan dalam barisan kuadratur $\{R(i, j): i \geq j, j = 1, 2, 3 \ldots\}$ untuk hampiran integral *f* (*x*) pada [*a*, *b*] sebagai

$R(i, 1) = T_{i-1}, i \geq 1$ (barisan aturan trapesium majemuk)

$R(i, 2) = S_{i-1}, i \geq 2$ (barisan aturan Simpson majemuk)

$R(i, 2) = B_{i-1}, i \geq 2$ (barisan aturan Boole majemuk)

Maka integrasi Romberg untuk meningkatkan keakuratan hampiran integral dapat ditulis sebagai Integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson

$$R(j, k) = \frac{4^{k-1} R(j, k-1) - R(j-1, k-1)}{4^{k-1} - 1}$$

Untuk $2 \leq k \leq j$, dengan awal adalah kuadratur trapesium

$$R(1,1) = T_0 = \frac{b - a}{2}\,(f(a) + f(b))$$

Algoritma Romberg menghasilkan suatu jajaran bilangan segitiga, yang semuanya merupakan nilai-nilai hampiran integral fungsi *f* (*x*) pada interval [*a*, *b*] (Sahid, 2004).

Algoritma penyelesaian integral rangkap dua dengan menggunakan metode Romberg yaitu sebagai berikut :

1. Mendefinisikan fungsi integral $f(x,y)$.
2. Menentukan batas – batas integral rangkap dua.
3. Mensimulasikan jumlah iterasi.
4. Menentukan nilai *h* karena pada integrasi pertama batas *x* yang dipilih maka

$$h = x_1 - x_2$$

5. Menginput program tic toc untuk mengetahui waktu komputasi metode Romberg dalam penyelesaian integral rangkap dua.
6. Menghitung nilai integrasi pada kolom pertama. karena pada integrasi pertama batas *x* yang dipilih maka

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x_1, y) + f(x_2, y)\right)$$

7. Menghitung nilai integrasi pada baris kedua dan seterusnya pada kolom pertama. karena pada integrasi pertama batas *x* yang dipilih maka

$$R(j,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$$

$$f(i) = f\left(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}\right)$$

8. Menghitung nilai integrasi pada kolom kedua dan seterusnya dengan menggunakan rumus

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

9. Menentukan nilai *h* pada batas *y* maka

$$h = y_1 - y_2$$

10. Menghitung nilai integrasi pada kolom pertama pada batas *y* yang dipilih maka

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x,y_1) + f(x,y_2)\right)$$

11. Menghitung nilai integrasi pada baris kedua dan seterusnya pada kolom pertama. karena pada integrasi pertama batas *x* yang dipilih maka

$$R(j,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$$

$$f(i) = f\left(y_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}\right)$$

12. Menghitung nilai integrasi pada kolom kedua dan seterusnya dengan menggunakan rumus

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1} - 1)}$$

13. Selanjutnya lakuakan integral yang kedua dengan menggunakan langkah – langkah yang sama pada integral pertama seperti diatas.

2.8 Analisis *Error*

Dalam melakukan analisis numerik perlu untuk memperhatikan bahwa solusi yang dihitung bukanlah solusi analitik. Ketelitian dari solusi numerik dapat mengurangi nilai *error*.

Kesalahan (*error*/galat) adalah besarnya perbedaan atau selisih antara nilai taksiran (hampiran/aproksimasi) dengan nilai sesungguhnya, kesalahan ini bisa timbul karena proses pengukuran atau penggunaan aproksimasi.

Besarnya kesalahan atas suatu nilai taksiran dapat dinyatakan secara kuantitatif dan kualitatif. Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kuantitatif disebut kesalahan absolut. Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kualitatif disebut dengan kesalahan relatif.

Kesalahan absolut menunjukkan besarnya perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan :

$$E_a = |s - s'|$$

Dimana :

E_a= Kesalahan absolut

s = nilai eksak

s' = nilai perkiraan/aproksimasi

Kesalahan relatif menunjukkan besarnya tingkat kesalahan antara nilai perkiraan dengan nilai eksaknya yang dihitung dengan membandingkan kesalahan absolut terhadap nilai eksaknya :

$$E_r = \frac{E_a}{s}$$

Dimana :

E_r= Kesalahan relatif

E_a= Kesalahan absolut

s = nilai eksak

Pada kesalahan absolut tidak menjelaskan seberapa besar kesalahan dibandingkan dengan nilai sebenarnya. Sedangkan , kesalahan relatif menjelaskan perbandingan kesalahan dengan nilai sebenarnya. Oleh karena itu, pada pembahasan skripsi ini akan menggunakan kesalahan relatif.

(Triatmodjo, 2002).

III. METODELOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2018/2019, bertempat di Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah – langkah penelitian yang akan dilakukan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Diberikan fungsi dua peubah integral rangkap dua.
2. Mencari solusi analitik integral rangkap dua.
3. Mencari solusi numerik integral rangkap dua dengan metode $1/3$ Simpson dan nilai galatnya.
4. Mencari solusi numerik integral rangkap dua dengan metode Romberg dan nilai galatnya.
5. Membandingkan solusi numerik integral rangkap dua dengan metode $1/3$ Simpson dan solusi numerik integral rangkap dua dengan metode Romberg.

V. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

Dalam kasus 1, 2 dan 3 integral rangkap dua yang diselesaikan dengan metode 1/3 Simpson rata – rata analisis *error* yang didapatkan adalah 0,000517 dengan rata - rata waktu komputasi adalah 0,03762 detik, sedangkan kasus 1, 2 dan 3 yang diselesaikan dengan metode Romberg dihasilkan nilai rata – rata analisis *error* nya adalah 0,000012 dengan rata – rata waktu komputasi adalah 0,047626. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dalam perhitungan integral rangkap dua metode Romberg memberikan nilai yang mendekati nilai analitik atau nilai sebenarnya, sedangkan metode 1/3 Simpson memiliki kecepatan yang lebih tinggi dalam penyelesaiannya.

DAFTAR PUSTAKA

Munif, M dan Hidayatullah, A. P. 2003. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik (Edisi Kedua).* ITS, Surabaya.

Nasution, Amrinsyah. 2001. *Metode Numerik Dalam Rekayasa Sipil*. ITB Bandung, Bandung.

Purcell, J. Edwin and Dale Varber. 1987. *Kalkulus Dan Geometri Analitis*. Erlangga, Jakarta.

Sahid. 2004. *Pengantar Komputasi Numerik Dengan MATLAB*. Andi, Yogyakarta.

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Pengantar Komputasi Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.

Weber, Jean E. 1999. *Analisis Matematik Penerapan Bisnis Dan Ekonomi Edisi Ke empat*. Erlangga, Jakarta.