ANALISIS RELIABILITAS
PADA DATA MASA HIDUP SISTEM YANG BERDISTRIBUSI LOGNORMAL
DENGAN PENDEKATAN BAYESIAN

(Skripsi)

Oleh

Caroline Aritonang

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

RELIABILITY ANALYSIS OF THE LOGNORMAL SYSTEM'S LIFETIME DATA IN THE BAYESIAN APPROACH

By

Caroline Aritonang

The global economic problem that has arisen over the past is an increasing demand for improved product and system performance and lower costs at the same time. In various applied fields, statistics play an important role as a common means of analysis. One statistical analysis is the dependability of systems or reliability. On reliability analysis a method is required to estimate the parameters and methods used it the Bayesian approach. The Bayesian approach is used by combining subjective knowledge (prior) with probability distribution within unknown parameters with the information provided. The data used is a lifespan a time of failure in the air conditioning engine 7912. The data failure of air conditioning is following lognormal distribution. With get older using the air conditioning, the value of reliability a air conditioning continues to decline.

Keywords: Bayesian, Lognormal Distribution, Reliability

ABSTRAK

ANALISIS RELIABILITAS PADA DATA MASA HIDUP SISTEM YANG BERDISTRIBUSI LOGNORMAL DENGAN PENDEKATAN BAYESIAN

Oleh

Caroline Aritonang

Permasalahan perekonomian global yang muncul selama ini adalah meningkatnya permintaan untuk meningkatkan kinerja produk dan sistem, serta mengurangi biaya yang dikeluarkan pada kondisi yang bersamaan. Dalam berbagai bidang terapan, statistika memiliki peranan yang penting sebagai alat analisis yang banyak digunakan. Salah satu analisis statistika yaitu analisis keterandalan sistem atau reliabilitas. Pada analisis reliabilitas diperlukan suatu metode untuk menduga parameter dan metode yang digunakan adalah pendekatan Bayesian. Pendekatan Bayesian digunakan dengan menggabungkan pengetahuan subjektif (prior) mengenai distribusi peluang dari parameter yang tidak diketahui dengan informasi yang diperoleh. Data yang digunakan adalah data masa hidup suatu sistem yang menunjukkan waktu kegagalan pada mesin pendingin pesawat 7912. Data waktu kegagalan mesin pendingin pesawat mengikuti distribusi lognormal. Semakin bertambahnya usia pakai mesin pendingin pesawat, nilai reliabilitas dari sebuah mesin pendingin pesawatjuga terus mengalami penurunan.

Kata kunci : Bayesian, Distribusi Lognormal, Reliabilitas

ANALISIS RELIABILITAS
PADA DATA MASA HIDUP SISTEM YANG BERDISTRIBUSI LOGNORMAL
DENGAN PENDEKATAN BAYESIAN

Oleh

CAROLINE ARITONANG

Skripsi
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul skripsi	: **ANALISIS RELIABILITAS PADA DATA MASA HIDUP SISTEM YANG BERDISTRIBUSI LOGNORMAL DENGAN PENDEKATAN BAYESIAN**
Nama Mahasiswa	: Caroline Aritonang
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031031
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.
NIP. 19560208198902l001

Ir. Warsono, M.S., Ph.D.
NIP. 19630216l987031003

2. Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D.
NIP.19631108l989022001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.** ....

Sekretaris : **Ir. Warsono, M.S., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan pembimbing: **Dr. Khoirin Nisa, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 196406041990031002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **8 Oktober 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Caroline Aritonang**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1517031031**
Judul	: **Analisis Reliabilitas pada Data Masa Hidup Sistem yang Berdistribusi Lognormal dengan Pendekatan Bayesian**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Oktober 2019
Penulis,

Caroline Aritonang
NPM. 1517031031

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 13 Januari 1997. Sebagai anak terakhir Bapak Jonner Aritonang dan Ibu Markhona.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar Negeri (SDN) 1 perumnas Way Halim pada tahun 2003-2009, Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 19 Bandar Lampung pada tahun 2009-2012, Sekolah Menengah Atas (SMAS) Al-Azhar 3 Bandar Lampung pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Direktorat Jenderal Pajak Kanwil Bengkulu-Lampung dan penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Kebangsaan di Desa Labuhan Ratu VI, Kecamatan Labuhan Ratu, Kabupaten Lampung Timur, Provinsi Lampung. Pengalaman organisasi penulis yaitu menjadi staf ahli bidang internal Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) Universitas Lampung tahun 2016-2017 dan anggota bidang eksternal Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) periode 2017.

KATA INSPIRASI

"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan sholat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah bersama orang-orang yang sabar."
(Q.S. Al-Baqarah: 153)

"Barang siapa keluar mencari ilmu, maka dia berada di jalan Allah hingga dia pulang."
(HR. Tirmidzi)

"Jika tak tahan lelahnya belajar, bersiaplah menanggung perihnya kebodohan."
(Imam Syafi'i)

"Kehidupan yang baik bukan tentang memedulikan lebih banyak hal, tapi tentang memedulikan hal yang sederhana saja, hanya peduli tentang apa yang benar dan mendesak dan penting."
(Mark Manson)

PERSEMBAHAN

Puji Syukur kepada Allah SWT, Karena atas limpahan berkah, rahmad, dan karunia-Nya skripsi ini dapat diselesaikan.

Ku persembahkan karya sederhana penuh perjuangan dan kesabaran ini kepada :

Ayahanda Jonner Aritonang dan Ibunda Markhona

Terimakasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, semangat, motivasi, serta doa dan sujud yang selalu menantikan keberhasilanku dengan sabar dan penuh pengertian. Karena atas do'a dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini.

Terimalah bukti kecil ini sebagai kado keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan jerih payah yang selama ini kalian lakukan.

Almamater yang kucintai, Universitas Lampung

SANWACANA

Penulis mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, karena dengan ridho dan karunia-Nya serta atas berkah dan rahmat-Nya sehinga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Reliabilitas pada Data Masa Hidup Sistem yang Berdistribusi Lognormal dengan Pendekatan Bayesian ”. Selesainya penulisan skripsi ini adalah berkat motivasi, pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Dengan segala kerendahan dan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si. selaku pembimbing pertama atas saran, bimbingan, arahan, motivasi, dan kesabaran dalam membimbing penulis.
2. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku pembimbing kedua yang telah memberihan arahan, saran, serta dukungan bagi penulis.
3. Ibu Dr. Khoirin Nisa, M.Si. selaku pembahas serta pembimbing akademik yang telah memberikan kritik dan saran sehingga terselesaikannya skripsi ini.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D. selaku Kepala Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
5. Bapak Drs. Suratman,M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung
6. Para Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

7. Orang tua tercinta, ayuk dan abang tersayang, serta adik kecil reina yang selalu memberikan motivasi, semangat, dan do’a yang tak terhingga kepada penulis.
8. Sahabat-sahabat penulis Almira, Mira, Sandria, Bella, dan Jinggan yang telah membantu, memberikan semangat dan keceriaan pada penulis.
9. Teman-teman seperjuanganku Loves, Rima, Siska, Lut, Ario, Topan, Dony, Rahmad, Nathan, Amar, Aul yang telah memberikan keceriaan dan semangat bagi penulis.
10. Teman-teman seperjuangan skripsi Maysita dan Putri Isnaini yang telah memberikan semangat dan dukungan bagi penulis.
11. Teman-teman Matematika 2015 yang memberikan keceriaan bagi penulis.
12. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dari skripsi ini, akan tetapi besar harapan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung,   Oktober 2019
Penulis

Caroline Aritonang

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Permasalahan perekonomian global yang muncul selama ini adalah meningkatnya permintaan untuk meningkatkan kinerja produk dan sistem, serta mengurangi biaya yang dikeluarkan pada kondisi yang bersamaan. Dalam berbagai bidang terapan, statistika memiliki peranan yang penting sebagai alat analisis yang banyak digunakan. Salah satu analisis statistika yaitu analisis keterandalan sistem atau reliabilitas. Reliabilitas adalah peluang suatu sistem akan bekerja sesuai dengan fungsinya tanpa adanya kerusakan, paling sedikit pada interval waktu tertentu.

Masa hidup sistem merupakan interval waktu yang diamati saat suatu sistem masuk ke dalam pengamatan sampai mengalami kerusakan dan tidak dapat digunakan lagi. Analisis uji reliabilitas suatu sistem dapat ditentukan dengan menentukan keterandalan sistem (*reliability function*), fungsi kepadatan peluang (*probability density function*), dan fungsi kegagalan (*hazard function*).

Untuk melakukan analisis dan mempresentasikan data uji keandalan sistem maka diperlukan suatu distribusi. Sehingga analisis terhadap data uji keandalan sistem dapat dilakukan secara parametrik. Data yang digunakan dalam penelitian berupa waktu yang betipe kontinu, sehingga probabilitas yang digunakan adalah bertipe kontinu. Beberapa distribusi yang dapat digunakan untuk menggambarkan masa hidup sistem diantaranya distribusi lognormal, distribusi eksponensial, distribusi gamma, dan lain-lain. Adapun distribusi yang digunakan pada penelitian ini adalah distribusi lognormal.

Diperlukan suatu metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulan mengenai suatu populasi yang biasa disebut statistika inferinsia. Analisis uji reliabilitas terhadap data masa hidup suatu sistem yang bertujuan untuk menentukan penduga parameter setiap distribusi menggunakan metode pendekatan Bayesian. Diana dan Soehardjoepri (2016) serta Sultan (2015) juga telah membahas pendugaan parameter berdistribusi lognormal menggunakan metode pendekatan Bayesian.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan penduga parameter distribusi lognormal dengan menggunakan metode Bayesian.
2. Menerapkan hasil penduga pada data masa hidup suatu sistem.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah menambah referensi terhadap ilmu statistika mengenai analisis reliabilitas dengan distribusi lognormal. Penelitian ini bersifat aplikatif, dapat diterapkan pada ilmu lain diluar statistika misalnya ilmu teknik.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Masa Hidup Sistem

Dalam analisis masa hidup, bagian menarik pada suatu kelompok atau kumpulan untuk setiap individu masing-masing didefinisikan sebagai suatu kejadian penting, yang sering disebut kegagalan, terjadi setelah jangka waktu tertentu yang disebut waktu kegagalan. Kegagalan dapat terjadi paling banyak sekali pada setiap individu. Contoh waktu kegagalan salah satunya masa hidup komponen mesin dalam keandalan industri (Cox & Oakes, 1984).

Masa hidup suatu sistem merupakan interval waktu saat suatu sistem masuk ke dalam penelitian sampai mengalami kegagalan. Fungsi-fungsi pada distribusi masa hidup merupakan suatu fungsi yang menggunakan variabel random masa hidup. Variabel random masa hidup biasanya dinotasikan dengan huruf T dan akan membentuk suatu distribusi peluang. Distribusi masa hidup dapat dijelaskan atau dikarakteristikan oleh tiga fungsi, yaitu fungsi reliabilitas $R(t)$, fungsi kepadatan peluang $f(t)$, dan fungsi *hazard* $h(t)$. Ketiga fungsi ini secara matematik ekuivalen, jika salah satu dari ketiganya diketahui, maka dua yang lainnya dapat dicari (Lee & Wang, 2003).

2.2 Fungsi Kepadatan Peluang Masa Hidup

Menurut Lee & Wang (2003), fungsi kegagalan dari masa hidup T memiliki fungsi kepadatan peluang yang didefinisikan sebagai limit dari peluang suatu individu gagal dalam interval waktu yang sangat pendek t sampai t + *Δt*, atau peluang kegagalan dalam interval kecil per satuan waktu. Yang dijelaskan sebagai berikut :

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(objek\ gagal\ pada\ (t, t + \Delta t)}{\Delta t} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t < T < t\ + \Delta t\ )}{\Delta t} \right] \quad (2.1)$$

Yang mempunyai sifat sebagai berikut :

a. $f(t) \geq 0, untuk\ semua\ t \geq 0$

   $f(t) = 0, untuk\ t < 0$

b. Luas daerah antara kurva kepadatan dengan sumbu t sama dengan 1, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt = 1.$

Variabel random T dengan fungsi kepadatan peluang *f(t)* merupakan variabel random non negatif, mempunyai fungsi distribusi kumulatif yang didefinisikan sebagai peluang suatu individu mengalami kejadian sampai dengan waktu t yang dinyatakan sebagai :

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(t)\ dt \quad (2.2)$$

Dimana :

$F(t)$ = fungsi distribusi kumulatif dari t

$P(t)$ = peluang suatu individu bertahan sampai waktu t

$f(t)$ = fungsi kepadatan peluang dari t

2.3 Fungsi Reliabilitas

Menurut Bain & Engelhardt (1992), fungsi reliabilitas R(t) didefinisikan sebagai peluang suatu individu dapat bertahan hidup lebih besar atau sama dengan waktu t. Jika suatu variabel random T melambangkan masa hidup atau waktu kegagalan suatu sistem, dengan demikian fungsi reliabilitas pada sistem pada waktu t didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - P(T \leq t) \\ &= 1 - F(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Menurut Kleinbaum & Klein (2005), secara teori fungsi reliabilitas dapat digambarkan dengan kurva mulus dan memiliki karakteristik sebagai berikut:

1. Tidak meningkat, kurva cenderung turun ketika t meningat.
2. Untuk t = 0 dan R(t) = 1, adalah awal dari penelitian, karena tidak ada objek yang mengalami peristiwa, peluang waktu reliabilitas 0 adalah 1.
3. Untuk t = ∞ dan R(t) = 0, secara teori, jika periode penelitian meningkat sampai tak berhingga maka tidak ada satu pun yang bertahan, sehingga kurva reliabilitas mendekati nol.

2.4 Fungsi *Hazard Rate*

Menurut Paramita dan Iriawan (2014), fungsi *hazard* dapat diartikan sebagai probabilitas suatu unit mengalami kerusakan setelah bertahan sampai waktu t. Fungsi *hazard* secara matematik dinyatakan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(t|T \geq t) &= F'(t|T \geq t) \\
&= \lim_{\Delta t}\left[\frac{F(t+\Delta t)|T \geq t) - F(t|T \geq t)}{\Delta t}\right] \\
&= \lim_{\Delta t}\left[\frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t|T \geq t)}{\Delta t}\right] \\
&= \lim_{\Delta t}\left[\frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t, T \geq t)}{\Delta t\, P(T \geq t)}\right] \\
&= \lim_{\Delta t}\left[\frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t\, (1 - F(t)}\right] \\
&= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad (2.4) \\
&= h(t)
\end{aligned}
$$

Peningkatan fungsi *hazard* pada waktu t menunjukkan bahwa sistem lebih mungkin gagal di selisih waktu berikutnya (t, t + Δt) itu akan berada dalam interval sebelumnya sama panjangnya. Artinya, unit tersebut usang atau memburuk seiring bertambahnya usia. Demikian pula, penurunan fungsi *hazard* berarti unit meningkat (bertambah baik) seiring bertambahnya usia (Bain & Engelhardt, 1992).

2.5 Distribusi Lognormal

Distribusi lognormal dalam bentuk sederhana adalah fungsi densitas dari sebuah peubah acak yang logaritmanya mengikuti hukum distribusi normal. Adapun definisi dari distribusi lognormal sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Distribusi Lognormal)

Misalkan sebuah peubah acak T bilangan real positif $(0 < t < \infty)$. Sedemikian sehingga $Y = \ln t$ merupakan distribusi normal dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. $T = e^y$ merupakan distribusi lognormal atau dapat ditulis dengan $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ dan $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Karena T dan Y dihubungkan oleh relasi , maka fungsi distribusi lognormal adalah sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, t^2 \sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \qquad t > 0 \tag{2.5}$$

(Aitchison & Brown, 1963).

2.5.1 Fungsi Distribusi Kumulatif Distribusi Lognormal

Fungsi distribusi kumulatif dan distribusi lognormal adalah sebagai berikut:

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P\left(\frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) \tag{2.6}$$

dimana $z = \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$ dan tanda positif untuk $z > 0$ dan tanda negatif untuk $z < 0$ (Walck, 1996).

Bukti persamaan (2.6)

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\,x} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dt \qquad (2.7)$$

Misalkan: $y = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \rightarrow \ln x = y\sigma + \mu \rightarrow x = exp(y\sigma + \mu)$

$dy = \frac{1}{x\sigma} dx \qquad\qquad dx = \sigma\, exp(y\sigma + \mu)dy$

batas: $x = t \rightarrow y = \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right); t = 0 \rightarrow y = -\infty$

Subtitusikan pemisalan di atas ke dalam persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy \qquad (2.8)$$

Misalkan: $z = \frac{y^2}{2} \rightarrow dz = y\,dy \rightarrow \frac{1}{y}dz = dy\,; y = \sqrt{2z}$

batas:$y = \frac{\ln t - \mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\;; y = -\infty \rightarrow z = \infty$

Subtitusikan pemisaalan di atas ke dalam persaaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\frac{(\ln t-\mu)}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\sqrt{z\pi}} exp(-z)dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{\exp(-z)\,z^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} dz + \int_0^{\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{\exp(-z)\,z^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \exp(-z)\,z^{\frac{1}{2}-1}\,dz + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \exp(-z)\,z^{\frac{1}{2}-1} dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,P\left(\frac{1}{2}, \frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

2.5.2 Nilai Harapan Distribusi Lognormal

Definisi 2.2 (Nilai Harapan)

Misalkan T variabel acak, jika T variabel acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f(t)$ dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t) dt$$

Maka nilai harapan dari T adalah

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t) dt$$

(Hogg & Craig, 1995).

Adapun nilai harapan distribusi lognormal sebagai berikut:

$$E(T) = exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (2.9)$$

(Walck,1996).

Bukti persamaan (2.9)

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t \; \frac{1}{\sqrt{2\pi\, t^2 \sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dt \quad (2.10)$$

Misalkan: $y = \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \rightarrow \ln t = y\sigma \rightarrow t = exp(y\sigma + \mu)$

$dy = \frac{1}{t\sigma} dt$ $\qquad$ $dt = \sigma\, exp(y\sigma + \mu)$

batas: $t = \infty \rightarrow y = \infty\, ; t = 0 \rightarrow y = -\infty$

Subtitusikan pemisalan di atas ke dalam persamaan (2.10) sebagai berikut:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] \; exp[y\sigma + \mu] \; dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}y^2 + y\sigma + \mu\right] \; dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}y^2 + y\sigma + \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2}\right] \; dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}(y-\sigma)^2\right] \; exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] \; dy$$

$$= exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}(y-\sigma)^2\right] \; dy$$

$$E(t) = exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right]$$

2.5.3 Nilai Ragam Distribusi Lognormal

Definisi 2.3 (Ragam)

Misalkan T sampel acak dengan rata-rata terbatas μ dan sedemikian sehingga $E[T-\mu]^2$ terbatas. Maka ragam dari T didefinisikan sebagai $E[T-\mu]^2$ dinotasikan dengan σ^2 atau $Var(T)$ (Hogg & Craig, 1995).

Adapun nilai ragam dari distribusi lognormal adalah sebagai berikut:

$$Var(T) = exp(2\mu + \sigma^2) \; exp(\sigma^2 - 1) \qquad (2.11)$$

(Walck, 1996).

Bukti persamaan (2.11)

$Var(T) = E[T-\mu]^2 = E(T^2) - \mu^2$

Mencari nilai $E(T^2)$:

$$E(T^2) = \int_0^\infty t^2\, f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\, t^2\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right]\, dt \qquad (2.12)$$

Subtitusikan pemisalan pada pembuktiaan persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp(y\sigma + \mu)}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] exp[y\sigma + \mu]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{y^2}{2} + 2y\sigma + 2\mu\right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{y^2}{2} + 2y\sigma + 2\mu + 2\sigma^2 - 2\sigma^2\right] dy$$

$$= exp[2\mu + 2\sigma^2] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}(y - 2\sigma)^2\right]$$

$E(T^2) = exp[2\mu + 2\sigma^2]$

sehingga,

$Var(T) = E[T-\mu]^2$

$$= E(T^2) - \mu^2$$

$$= exp(2\mu + 2\sigma^2) - \left[exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2$$

$$= exp(2\mu + 2\sigma^2) - exp(2\mu + \sigma^2)$$

$Var(T) = exp(2\mu + \sigma^2)[exp(\sigma^2) - 1]$

2.6 Distribusi Uniform

Definisi 2.4 (Distribusi Uniform)

Distribusi uniform kontinu memiliki sebaran probabilitas yang sama pada seluruh interval [p,q]. Fungsi distribusi uniform adalah sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{1}{q-p} \; ; t \in [p, q] \tag{2.13}$$

(Berger, 1990).

2.7 Fungsi *Likelihood*

Fungsi *likelihood* adalah fungsi densitas bersama dari n variabel random $T_1, T_2, \ldots,$ T_n dan dinyatakan dalam bentuk $f\,(t_1, t_2, \ldots, t_n\,;\,\theta)$. Jika $T_1, T_2, \ldots, T_n$ menyatakan suatu sampel random dari $f\,(t\,;\,\theta)$, maka

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2 |\, T_i) &= f(t_1;\theta) f(t_2;\theta) \ldots f(t_n;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(T_i;\theta) \end{aligned} \tag{2.14}$$

(Bain & Engelhardt, 1992).

2.8 Uji *Goodness of Fit* Anderson-Darling

Uji kebaikan (*Goodness of Fit*) adalah uji yang dilakukan untuk memperoleh model distribusi yang sesuai terhadap data observasi yang digunakan dalam sebuah penelitian. Uji kebaikan digunakan berdasarkan fungsi distribusi kumulatif secara lengkap dengan parameter-parameter yang telah ditentukan (Thode, 2002).

Uji Anderson-Darling ditunjukkan pada persamaan berikut:

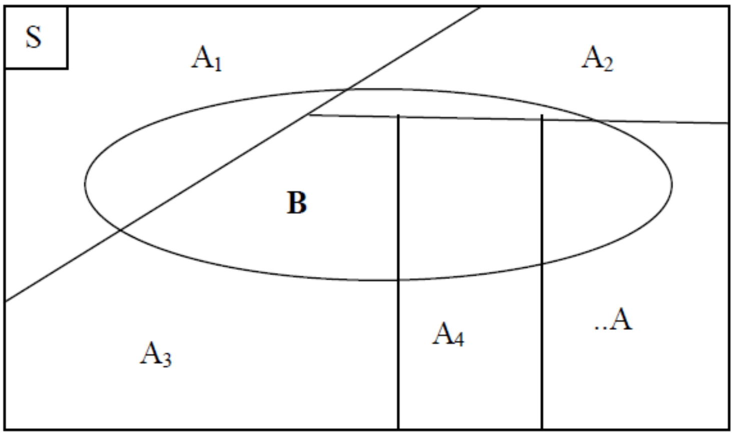
$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\begin{bmatrix} (2i-1)\ln F(x_i) + \\ (2n+1-2i)\ln(1-F(x_i)) \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

dengan $F(x_i)$ adalah fungsi distribusi kumulatif. Model distribusi dikatakan sesuai untuk data jika uji statistik A^2 pada suatu model distribusi tersebut benilai minimum (Pani, 2009).

2.9 Teori Bayesian

Definisi 2.5

Misal S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen dan $A_1, A_2, \ldots, A_k$ adalah peristiwa-peristiwa di dalam S sedemikian sehingga $A_1, A_2, \ldots, A_k$ saling asing dan $\bigcup_{i=1}^{k} A_k = S$ dikatakan bahwa $A_1, A_2, \ldots, A_k$ membentuk partisi di dalam *S*



Gambar 1. Teorema Bayes

Jika *k* peristiwa $A_1, A_2, \ldots, A_k$ membentuk partisi di dalam *S*, maka terlihat pada Gambar 1 bahwa peristiwa-peristiwa $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_k \cap B$ membentuk partisi dalam B sehingga dapat ditulis $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B), \dots, \cup (A_k \cap B)$. Karena peristiwa-peristiwa di ruas kanan saling asing maka

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) \tag{2.16}$$

Jika $P(A_i) > 0$ untuk $i = 1,2, \dots, k$ maka $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$ sehingga didapat $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)$. Misal peristiwa-peristiwa $A_1, A_2, \dots, A_k$ membentuk partisi di dalam ruang sampel S sedemikian sehingga $P(A_i) > 0$; i 1,2, … , k dan misalkan B sembarang peristiwa sedemikian sehingga $P(B) > 0$ maka untuk $i = 1,2, \dots, k$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)} \tag{2.17}$$

Teorema Bayes memberikan aturan sederhana untuk menghitung probabilitas bersyarat peristiwa A_i jika B terjadi, jika masing-masing perobabilitas tak bersyarat A_i dan probabilitas bersyarat B jika diberikan A_i (Soejoeti & Soebanar, 1988).

Bayesian merupakan suatu metode yang memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan informasi awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior. Sedangkan penentuan parameter distribusi prior dalam penelitian ini telah ditetapkan menggunakan distribusi uniform. Selanjutnya, maka diperolehlah informasi posterior (distribusi posterior) yang merupakan gabungan dari dua sumber informasi mengenai parameter dari model statistik yaitu, likelihood dari distribusi sampel dan informasi awal (distribusi prior). Hasil yang dinyatakan dalam bentuk distribusi posterior yang kemudian menjadi dasar dalam metode bayesian.

2.9.1 Distribusi Prior

Dalam metode Bayes, memilih distribusi prior $f\ (\theta)$ menunjukkan ketidakpastian tentang parameter θ yang tidak diketahui. Distribusi prior dikelompokkan menjadi dua kelompok berdasarkan bentuk fungsi *likelihood*-nya (Box & Tiao, 1973).

1. Berkaitan dengan bentuk distribusi hasil identifikasi pola datanya
   a. Distribusi prior konjugat, mengacu pada acuan analisis model terutama dalam pembetukan fungsi *likelihood*-nya sehingga dalam penelitian prior konjugat selalu dipikirkan mengenai penentuan pola distribusi prior yang mempunyai bentuk konjugat dengan fungsi kepadatan peluang pembangkit *likelihood*-nya.
   b. Distribusi prior tidak konjugat, apabila pemberian prior pada suatu model tidak memperhatikan pola pembentuk *likelihood*-nya.

2. Berkaitan dengan penentuan masing-masing parameter pada pola distribusi prior tersebut.
   a. Ditribusi prior informatif mengacu pada pemberian parameter dari distribusi prior yang telah dipilih baik distribusi prior konjugat atau tidak, pemberian nilai parameter pada distribusi prior ini akan sangat memperngaruhi bentuk distribusi posterior yang akan didapatkan dengan

menggabungkan informasi distribusi prior dengan informasi data yang diperoleh.

b. Distribusi prior non-informatif, pemilihannya tidak didasarkan pada data yang ada atau distribusi prior yang tidak mengandung informasi tentang parameter θ, salah satu pendekatan dari non-informatif prior adalah metode Jeffrey's.

2.9.2 Distribusi Posterior

Distribusi posterior adalah fungsi densitas bersyarat θ jika diketahui nilai observasi t. Pada metode Bayesian, inferensi dilandaskan pada distribusi posterior. Sehingga distribusi posterior dinyatakan sebagai berikut :

$$\pi(\theta|t) \propto L(\theta|t)p(\theta) \quad (2.18)$$

dengan

$\pi(\theta|t)$ = fungsi posterior

$L(\theta|t)$ =fungsi *likelihood*

$p(\theta)$ = fungsi prior

Lambang $\propto$ menyatakan bahwa distribusi posterior proposional atau sebanding terhadap distribusi prior jika dikalikan dengan fungsi *likelihood*. Adapun distribusi posterior dalam fungsi densitas bersyarat θ jika diketahui nilai observasi t. Ini dapat dituliskan sebagai:

$$f(\theta|t) = \frac{f(\theta,t)}{f(t)}$$

Fungsi kepadatan bersama dan marginal yang diperlukan dapat ditulis dalam bentuk distribusi prior dan fungsi *likelihood*,

$$f(\theta, t) = f(t|\theta)f(\theta)$$

$$f(t) = \int_0^\infty f(\theta, t)d\theta = \int_{-\infty}^\infty g(\theta)f(t|\theta)d\theta$$

Sehingga fungsi densitas posterior untuk variable random kontinu dapat ditulis sebagai:

$$f(\theta|t) = \frac{g(\theta)f(t|\theta)}{\int g(\theta)f(t|\theta)\, d\theta}$$

Menurut Box & Tiao (1973), jika $P(\theta)$ adalah prior dan $P(t|\theta)$ adalah fungsi *likelihood*, maka fungsi kepadatan posterior adalah sebagai berikut:

$$P(\theta|t) = C\, P(\theta)P(t|\theta) \tag{2.19}$$

dimana C adalah konstanta normal dan C dapat diperoleh dengan

$$C = \left[\int P(\theta)P(t|\theta)d\theta\right]^{-1} \tag{2.20}$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2018/2019 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Pada penelitian ini digunakan data sekunder yaitu data masa hidup suatu sistem yang menunjukkan waktu kegagalan pada mesin pendingin pesawat 7912.

3.3 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan fungsi kepadatan peluang, distribusi kumulatif, fungsi reliabilitas dan fungsi *hazard rate* terhadap distribusi lognormal.
2. Menentukan fungsi *likelihood* dari distribusi lognormal.

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(t_1; \mu, \sigma^2)$$

3. Menduga parameter (μ, σ^2) pada distribusi lognormal dengan pendekatan Bayesian dengan langkah-langkah sebagai berikut:

   a. Menentukan distribusi prior dari parameter μ dan σ^2 dengan asumsi berdistribusi uniform (0,1) dengan kepadatan peluang sebagai berikut:

   $$f(\theta) = \frac{1}{q-p} \; ; \theta \in [p, q]$$

   b. Menentukan distribusi posterior bersama $f(\mu, \sigma^2|t) = C \; p(\mu, \sigma^2)L(\mu, \sigma^2)$, dimana C adalah konstanta normal dan C dapat diperoleh dengan $C = \left[\iint p\left(\mu, \sigma^2\right) L(\mu, \sigma^2) \, d\mu \, d\sigma^2\right]^{-1}$

   c. Menentukan distribusi *posterior* marginal (μ, σ^2) pada distribusi lognormal

      - Menentukan distribusi posterior marginal dari μ dengan mengintegralkannya terhadap σ^2.

      $$f(\mu|t) = \int_0^\infty f(\mu, \sigma^2|t) \, d\sigma^2$$

      - Menentukan distribusi posterior marginal dari σ^2 dengan mengintegralkannya terhadap μ.

      $$f(\sigma^2|t) = \int_{-\infty}^\infty f(\mu, \sigma^2|t) \, d\mu$$

   d. Menduga parameter (μ, σ^2) pada distribusi lognormal

      - Menduga parameter μ pada distribusi lognormal

      $$E(\mu|t) = \int_{-\infty}^\infty \mu \; f(\mu|t) \, d\mu$$

      - Menduga parameter σ^2 pada distribusi lognormal

      $$E(\sigma^2|t) = \int_{-\infty}^\infty \sigma^2 \; f(\sigma^2|t) \, d\sigma^2$$

4. Melakukan analisis uji reliabilitas pada data masa hidup suatu sistem pendingin pesawat yang berdistribusi lognormal dengan langkah-langkah sebagai berikut:
    a. Melakukan uji kesesuain data dengan uji Anderson-Darling.
    b. Mensubtitusikan nilai hasil pendugaan parameter ke fungsi reliabilitas dan fungsi h*azard rate*.
    c. Menggambarkan fungsi reliabilitas dan fungsi h*azard rate* dalam bentuk grafik.

V. KESIMPULAN

Kesimpulan berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diperoleh adalah sebagai berikut:

1. Penduga parameter distribusi Lognormal adalah $\hat{\mu} = exp\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln t_i}{n} + \frac{\beta}{2(n-5)}\right]$ dan $\widehat{\sigma^2} = exp\left[2\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln t_i}{n} + \frac{\beta}{(n-5)}\right] exp\left[\frac{\beta}{(n-5)} - 1\right]$.
2. Berdasarkan hasil uji reliabilitas pada data masa hidup pendingin pesawat menunjukkan reliabilitas sistem semakin lama semakin menurun kinerja sistemnya, seiring dengan bertambahnya waktu dalam pengujian mengakibatkan reliabilitas yang semakin rendah yang ditunjukkan dengan plot grafik yang menurun.
3. Berdasarkan hasil uji reliabilitas pada grafik *hazard rate* (laju kegagalan) diperoleh bahwa distribusi lognormal memiliki laju kegagalan yang menunjukkan pola grafik menurun, artinya semakin meningkat waktu dari suatu sistem maka laju kegagalannya akan semakin menurun.

DAFTAR PUSTAKA

Aitchison, J. & Brown, J.A.C. 1963. *The Lognormal Distribution with Special Reference to It's Uses in Economi*. The Syndics of The Cambriadge University Press, Great Britain.

Bain, L. J. & Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Edisi ke-2. Duxbury, California.

Berger, C. 1990. *Statistical Inference*. Pasific Grove, New York.

Box, G.E.P. & Tiao, G.C. 1973. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Addision-Wesley Publising Company, Inc., Philippnes.

Cox, D. R. & Oakes, D. 1984. *Analysis of Survival Data*. Chapman & Hall, New York.

Diana, E. N. & Soehardjoepri. 2016. Pendekatan Metode Bayesian untuk Kajian Estimasi Parameter Distribusi Lognormal untuk Non-Informatif Prior. *Jurnal Sains dan Seni ITS*. **5**(2): 14-16.

Hogg, R.V. & Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Edisi ke-5. Pretice-Hall, Inc., New Jersey.

Kleinbeum, D.G. & Klein, M. 2005. *Survival Analysis, A Self-Learning Text*. Edisi ke-2. Springer-Verlag, New York.

Lee, E. T. & Wang, J. W. 2003. *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. John Wiley & Son, Inc., Canada.

Pani, A. 2009. *Model Statistik untuk Data Karbon Monoksida (CO)*. Prosiding Simposium Kebangsaan Sains Matematik, Fakulti Sains, Universiti Putra Malaysia.

Paramita, Z. H. & Iriawan, N. 2014. Analisis Reliabilitas Transformator (Trafo) di PT PLN APJ Surabaya Barat dengan Pendekatan Bayesian Mixture. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*. **3**(2): 2337-3520.

Soejoeti, Z. & Soebanar. 1988. *Inferensi Bayesian*. Karunika Universitas Terbuka, Jakarta.

Sultan, H., Sultan R., & Ahmad, S.P. 2015. Bayesian Analysis of Lognormal Distribution under Different Loss Functions. *International Journal of Modern Mathematical Sciences*. **13**(1): 17-28.

Thode, H. C. 2002. *Testing for Normality*. Marcel Dekker, Inc., New York.

Walck, C. 1996. *Hand-Book on Statistical Distributions for Experimentalists*. University of Stockholm, Stockholm.