DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$ UNTUK n GANJIL

(Skripsi)

Oleh

DEBY ANASTASYA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$ UNTUK n GANJIL

OLEH

DEBY ANASTASYA

Dimensi partisi diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 1998. Misalkan G suatu graf, dengan titik $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Titik-titik tersebut dibagi menjadi k-partisi, dinotasikan $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Himpunan $\prod = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ adalah himpunan k-partisi terurut. Representasi untuk setiap $v \in V(G)$ terhadap $\prod$ adalah jarak minimum dari suatu titik v ke S_i dengan $1 \leq i \leq k$, dinotasikan dengan $r(v|\prod) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik memiliki representasi yang berbeda, maka $\prod$ disebut partisi pembeda dengan k-partisi pembeda. Nilai k terkecil dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$. Pada penelitian ini diperoleh, dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ adalah 3. Selanjutnya dimensi partisi operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk layer $s = 1,2$ adalah 3, sedangkan untuk layer
$s \geq 3$ adalah 4.

Kata Kunci : Graf, Dimensi Partisi, Graf Petersen Diperumum

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF GENERALIZED PETERSEN GRAPHS $\boldsymbol{P_{n,1}}$ FOR $\boldsymbol{n}$ ODD

By

DEBY ANASTASYA

The partition dimension was introduced by Chartrand in 1998. Let G be a connected graph, with $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Those vertices are divided into k-partition, denoted by $S_1, S_2, \dots, S_k$. Set of $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ be an ordered set of k-partition. The representation of every $v \in V(G)$ with respect to $\prod$ is a minimum distance of a vertex to S_i with $1 \leq i \leq k$, denoted by $r(v|\prod) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. If every vertex has distinct representation, $\prod$ is called a resolving k-partition. The minimum k for which there is a resolving k-partition of $V(G)$ is called the partition dimension of G, denoted by $pd(G)$. The partition dimensions of generalized Petersen graph are $P_{n,1}$ is 3 for n odd. Furthermore, certain operation of partition dimensions of generalized Petersen graph $sP_{n,1}$ for layers $s = 1,2$ is 3, while for layer $s \geq 3$ is 4.

Keyword : Graph, Partition Dimension, Generalized Petersen Graph

DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$ UNTUK n GANJIL

Oleh

DEBY ANASTASYA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar

SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$ UNTUK n GANJIL**

Nama Mahasiswa : *Deby Anastasya*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031178

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1\. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP 19760411 200012 2 001	NIP 19631108 198902 2 001

2\. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **10 April 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama Mahasiswa	: DEBY ANASTASYA
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031178
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: DIMENSI PARTISI GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$ UNTUK n GANJIL

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 10 April 2019

Yang Menyatakan,

Deby Anastasya

NPM. 1517031178

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Deby Anastasya, anak pertama dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Jakarta pada tanggal 06 Mei 1997 oleh pasangan Bapak Wetman Hutagaol dan Ibu Novalina Nababan.

Penulis menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Sejahtera Jakarta Selatan pada tahun 2002-2003, kemudian bersekolah di SD Strada Bhakti Utama Bintaro pada tahun 2003-2006 dan di SD Xaverius 3 Way Halim Permai pada tahun 2006-2009, setelah itu melanjutkan sekolah di SMP Fransiskus Tanjungkarang pada tahun 2009-2012, dan bersekolah di SMA Negeri 7 Bandar Lampung pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2015, penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Pada tahun 2018, penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sumberhadi Kecamatan Melinting Kabupaten Lampung Timur, Provinsi Lampung selama 40 hari pada periode Januari-Februari 2018 dan pada tahun yang sama, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Politeknik Kesehatan Tanjungkarang.

KATA INSPIRASI

”Janganlah hendaknya kerajinanmu kendor, biarlah rohmu menyala-nyala dan layanilah Tuhan.”

(Roma 12:11)

”Keep your feet on the ground, when your head’s in the clouds.”

(Anonymous)

“Work hard in silence and let success make the noise.”

(Frank Ocean)

“Jangan ikuti kemana jalan menuju, tetapi buatlah jalan sendiri dan tinggalkan jejak.”

(Anonim)

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan kepada Tuhan Yesus Kristus yang senantiasa memberkati, mengasihi, dan melindungiku dalam setiap perjuanganku.

Kepada kedua orangtuaku yang kukasihi dan kuhormati bapakku Wetman Hutagaol dan ibuku Novalina Nababan, yang selalu sabar dan mendukungku selama ini.

Untuk adik-adikku Gessi Cesa Hutagaol dan Frederick Nataprawira Hutagaol serta semua saudara-saudaraku yang selalu mendukung dan menyemangatiku.

Untuk dosen-dosen yang telah membimbing dan mengajarkanku ilmu pengetahuan selama berkuliah di Matematika.

Untuk teman-temanku angkatan 2015 Matematika Universitas Lampung, ku bersyukur telah menjadi bagian dari kalian.

Serta Almamater Unila dan Negeriku Indonesia.

Tanpa kalian mungkin karya ini tidak akan terwujud.

SANWACANA

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan karunia serta kasih-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Dimensi Partisi Graf Petersen Diperumum* $P_{n,1}$ *untuk n Ganjil*". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan arahan, masukkan, ide, kritik, dan saran selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing II, dan Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan arahan dan masukannya selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediaannya untuk menguji dan memberikan saran serta kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Nusyirwan, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan dan masukkan selama menempuh pendidikan di Jurusan Matematika.

5. Bapak Drs. Suratman Umar, M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Universitas Lampung yang telah membagikan ilmu dan pembelajaran selama penulis menjadi mahasiswa.
7. Keluargaku, yaitu bapak Wetman Hutagaol, ibu Novalina Nababan, dan adikku Gessi Cesa Hutagaol dan Frederick Nataprawira Hutagaol, serta saudara-saudaraku yang telah memberikan dorongan secara material maupun spiritual selama ini dalam perkuliahan serta dalam penyelesaian skripsi ini.
8. Teman-teman seperjuangan skripsi Feli, Luthfi, Rini, Rina, Aura, Alif, Topan, Salma, Wilma, Debora, Nita, Wima yang selalu siap sedia dari usul, hasil, sampai ujian skripsi serta semangat hingga penyelesaian skripsi ini.
9. Seluruh rekan angkatan 2015 Matematika Universitas Lampung serta kakak dan adik tingkat yang telah mendukung dan mendoakan serta menjadi keluarga di Universitas Lampung selama ini.
10. Serta semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah membantu dan memberikan dukungan dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis berharap semoga Tuhan Yang Maha Esa membalas segala kebaikan kalian.

Bandar Lampung, 10 April 2019
Penulis

Deby Anastasya

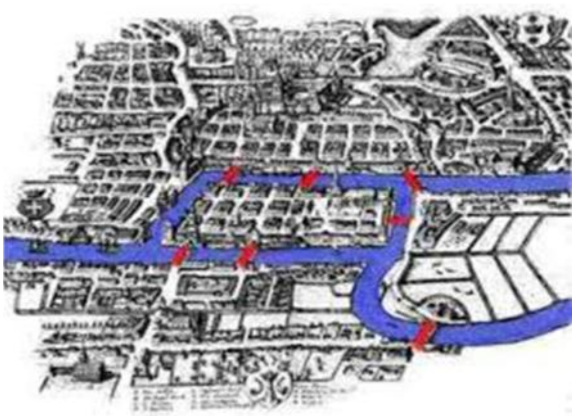
DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu bidang dalam ilmu matematika. Pada awalnya, teori graf diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736 dalam bukunya *Solution Problematics Ad Geometriam Situs Pertinentis.* Buku tersebut berisi tentang penyelesaian masalah jembatan Konigsberg yaitu kasus transportasi dimana hanya melewati sekali jalan dari empat daerah yang dihubungkan oleh tujuh jembatan dan kembali ke tempat awal. Berdasarkan representasi graf yang digunakannya, Euler membuktikan bahwa tidak mungkin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi awal.



Gambar 1. Jembatan Konisberg

Saat ini, perkembangan teori graf maju pesat. Teori graf banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah yang ada dalam kehidupan. Tidak hanya untuk bidang matematika saja, namun juga bidang ilmu yang lainnya. Salah satu kajian dalam teori graf adalah dimensi partisi. Dimensi partisi diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 1998. Dimensi partisi merupakan hasil pengembangan dari dimensi metrik.

Misalkan G graf suatu graf, dengan $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik *v* ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v,S)$ adalah $min\{d(v,x), x \in S\}$ dengan $d(v,x)$ adalah jarak antara titik v dan x. Misalkan $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \dots, S_k$ kelas kelas dari $\prod$. Representasi *v* terhadap $\prod$ dinotasikan dengan $r(v \mid \prod)$, adalah *k*-pasangan terurut $(d(v,S_1), d(v, S_2), \dots, d(v,S_k))$. $\prod$ disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u \mid \prod) \neq r(v \mid \prod)$ untuk setiap 2 titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari graf G, dinotasikan dengan $pd(G)$ adalah nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas (Chartrand dkk., 1998). Banyak penelitian tentang dimensi partisi pada graf yang telah dilakukan oleh Chartrand dkk., diantaranya pada graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang ganda, dan lain-lain.

Penelitian tentang dimensi partisi juga dilakukan oleh Asmiati pada tahun 2012, mengenai dimensi partisi graf amalgamasi bintang. Graf amalgamasi bintang $S_{k,m}$ adalah graf yang diperoleh dari m buah graf bintang $K_{1,m}$ dengan menyatukan sebuah daun dari setiap graf bintang tersebut (Asmiati, 2012). Misal $\prod$ adalah partisi pembeda dari graf $S_{k,m}, k, m \geq 2$, dengan $|\prod| \geq m - 1$. Partisi pembeda $\prod$ adalah hasil partisi dari graf $S_{k,m}$ jika dan hanya jika l_i dan $l_k, i = k$

dalam kelas yang sama pada kelas kombinasi $\{l_{ij} | j = 1,2, \dots, m-1\}$ dan jika $\{l_{ij} | j = 1,2, \dots, m-1\}$ adalah pembeda (Asmiati, 2012).

Graf Petersen adalah graf yang memiliki 10 titik, 15 sisi, dan setiap titiknya berderajat 3 dengan 5 titik di luar dan 5 titik di dalam yang dihubungkan dengan 5 sisi (Watkins, 1969). Graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Julius Petersen untuk menghargainya. Banyak topik pada teori graf yang bisa dikaitkan dengan graf Petersen, antara lain masalah Eulerian, Hamiltonian, faktorisasi, Planaritas, hingga automorfisma suatu graf.

Berdasarkan uraian di atas, akan dilakukan penelitian tentang dimensi partisi pada graf Petersen diperumum $P_{n,1}$. Menentukan bentuk umum dimensi partisi pada graf Petersen merupakan permasalahan yang rumit, karena belum adanya teorema yang dapat digunakan untuk menentukan dimensi partisi pada graf Petersen diperumum. Setelah menentukan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$, selanjutnya akan ditentukan hasil operasi pada graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$, dengan s adalah banyaknya lapisan graf Petersen.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Menentukan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ untuk *n* ganjil.
2. Menentukan dimensi partisi dari operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk n ganjil.

1.3 Manfaat Penelitian

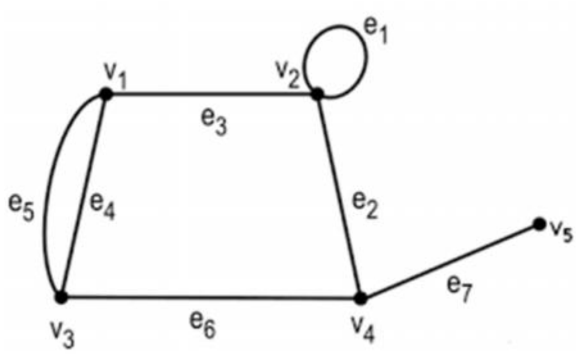
Manfaat yang didapat dari penelitian ini adalah :

1. Mengembangkan wawasan mengenai teori graf terutama tentang dimensi partisi dari graf Petersen $P_{n,1}$.
2. Sebagai referensi lanjutan untuk penelitian mengenai dimensi partisi pada graf lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik (*vertex*) tak kosong dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi (*edge*) yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut *orde* dari graf G. Misalkan v dan w adalah titik pada graf G, jika v dan w dihubungkan oleh sisi e, maka v dan w dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik v dan w dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi *e*, demikian juga sisi *e* dikatakan menempel dengan titik v dan w. Himpunan tetangga (*neighbourhood*) dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v (Deo, 1989). Berikut contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi.



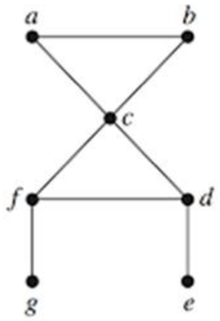
Gambar 2. Contoh Graf dengan 5 Titik dan 7 Sisi

Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G jika titik u dan v dihubungkan oleh sisi e, maka titik u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik u dan v menempel (*incident*) dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel pada titik u dan v. Himpunan tetangga dari v dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v. Pada Gambar 2, titik v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_3. Sisi $e_3$menempel pada titik v_1 dan v_2. Derajat (*degree*) dari v adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v. Derajat pada titik $v \in V(G)$ dinotasikan dengan $d(v)$. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat satu. Pada Gambar 2, $d(v_1) = 3, d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3, d(v_4) = 3, d(v_5) = 1$ dan pada graf tersebut terdapat daun yaitu pada titik v_5.

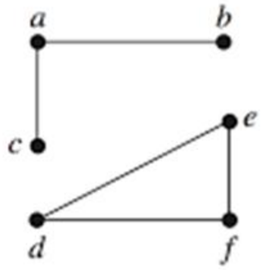
Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Pada Gambar 2 terdapat *loop* pada titik v_2 yaitu e_1. Sedangkan e_4 dan e_5 merupakan sisi paralel. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki dua atau lebih sisi yang menghubungkan dua titik yang sama (*multiple edge*) atau *loop*. Graf pada Gambar 2 bukan merupakan graf sederhana karena terdapat *loop* (e_1) dan sisi paralel (e_4 dan e_5). Suatu graf G disebut graf lengkap (*complete graph*) jika graf tersebut merupakan graf sederhana dan setiap titik terhubung ke setiap titik yang lain. Sedangkan pada graf tak lengkap terdapat pasangan titik yang tidak dihubungkan oleh sisi.

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik-titik yang berbeda. Contoh lintasan dapat ditunjukkan pada Gambar 2 yaitu $v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_7, v_5$. Siklus (*cycle*) adalah lintasan tertutup (*closed path*), yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Contoh siklus pada Gambar 2 adalah $v_1, e_3, v_2, e_2, v_4, e_6, v_3, e_4, v_1$.

Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat sekurang-kurangnya satu lintasan untuk sembarang dua titik berbeda. Jika tidak demikian, graf G disebut graf tak terhubung. Berikut contoh dari graf terhubung dan tak terhubung. Pada Gambar 4 tidak terdapat lintasan dari titik *a,b,c* ke titik *d,e.f* sehingga graf tak terhubung.



Gambar 3. Contoh Graf Terhubung

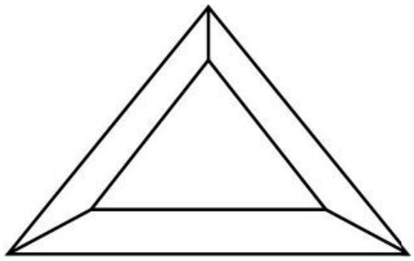


Gambar 4. Contoh Graf Tak Terhubung

2.2 Graf Petersen yang Diperumum

Menurut Watkins (1969), graf Petersen diperumum merupakan graf teratur berderajat tiga. Misalkan $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ menyatakan banyaknya titik lingkaran luar dan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menyatakan banyaknya titik lingkaran dalam untuk $n \geq 3$. Graf Petersen diperumum dinotasikan dengan $P_{n,k}, n \geq 3, 1 \leq k \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, 1 \leq i \leq$

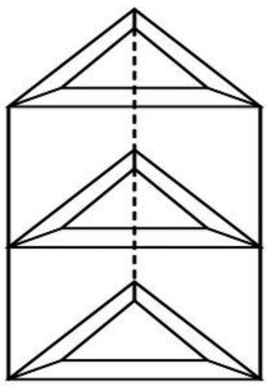
n adalah graf yang memiliki $2n$ titik $\{u_i\} \cup \{v_i\}$ dan sisi $\{u_i u_{i+1}\} \cup \{v_i v_{i+k}\} \cup \{u_i v_i\}$.



Gambar 5. Contoh Graf Petersen $P_{3,1}$

2.3 Operasi Tertentu Graf Petersen Diperumum

Misalkan terdapat s buah graf Petersen diperumum $P_{n,k}$. Titik luar u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ untuk graf Petersen yang ke-t , $t = 1, 2, \dots, s$, $s \geq 1$ dinotasikan dengan u_i^t. Titik dalam v_i , $i = 1, 2, \dots, n$ untuk graf Petersen diperumum yang ke-t , $t = 1, 2, \dots, s$, $s \geq 1$ dinotasikan dengan v_i^t. Graf Petersen diperumum $sP_{n,k}$ diperoleh dari $s \geq 1$ graf $P_{n,k}$, yang mana setiap titik luar u_i^t , $i \in [1, n], t \in [1, s]$ dihubungkan oleh suatu lintasan $(u_i^t u_i^{t+1}), t = 1, 2, \dots, s - 1, s \geq 2$.

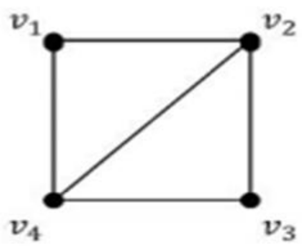


Gambar 6. Contoh Graf Petersen $3P_{3,1}$

2.4 Dimensi Partisi Graf

Misalkan G graf suatu graf, dengan $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak antara v dan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah *min* $\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak antara v dan x. Misalkan $\prod = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \ldots, S_k$ kelas kelas dari $\prod$. Representasi v terhadap $\prod$, dinotasikan dengan $r(v|\prod)$, adalah k-pasangan terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. $\prod$ disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$ untuk setiap 2 titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ adalah nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas (Chartrand dkk., 1998).

Berikut ini akan diberikan contoh dimensi partisi pada suatu graf.



Gambar 7. Graf dengan 4 titik dan 5 sisi

Ambil $\prod = \{S_1, S_2\}$, dengan $S_1 = \{v_1\}$; $S_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, sehingga representasi titiknya adalah $r(v_1|\prod) = (0,1)$; $r(v_2|\prod) = (1,0)$; $r(v_3|\prod) = (1,0)$; $r(v_4|\prod) = (1,0)$. Karena ada representasi titik yang sama untuk $\prod = \{S_1, S_2\}$, maka $\prod = \{S_1, S_2\}$

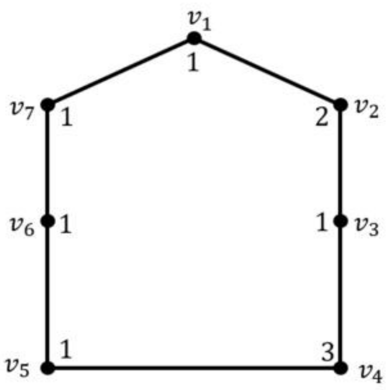
bukan partisi pembeda. Sehingga banyaknya anggota himpunan $\prod = \{S_1, S_2\}$ tidak dapat dikatakan dimensi partisi. Oleh karena itu, ambil $\prod$ yang lain. Ambil $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1\}$, $S_2 = \{v_2, v_3\}$, $S_3 = \{v_4\}$ sehingga representasi titiknya adalah $r(v_1|\prod) = (0,1,1)$; $r(v_2|\prod) = (1,0,1)$; $r(v_3|\prod) = (2,0,1)$; $r(v_4|\prod) = (1,1,0)$.

Karena representasi setiap titiknya berbeda untuk $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$, maka $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda. Selain itu banyaknya anggota basis ini merupakan yang minimum sehingga banyaknya anggota $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dapat dinyatakan sebagai dimensi partisi dari graf tersebut. Sehingga dimensi partisi dari graf tersebut adalah tiga.

Berikut ini Chartrand dkk. (1998) telah memberikan teorema dari dimensi partisi graf lingkaran.

Teorema 2.4.1 *(Chartrand dkk., 1998) Misalkan $n \geq 3$, maka dimensi partisi graf lingkaran adalah 3.*

Berikut ini adalah contoh dari penentuan dimensi partisi pada graf lingkaran C_n. Diberikan graf lingkaran C_7 akan ditentukan bahwa $pd(C_7) = 3$.



Gambar 8. Dimensi Partisi Graf Lingkaran C_7

Graf lingkaran C_7 dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, pemberian label pada graf C_7 adalah : $S_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_7\}$; $S_2 = \{v_2\}$; $S_3 = \{v_4\}$;

Maka representasi dari semua titik adalah :

$r(v_1|\Pi) = (0,1,3)$; $r(v_2|\Pi) = (1,0,2)$; $r(v_3|\Pi) = (0,1,1)$;

$r(v_4|\Pi) = (1,2,0)$; $r(v_5|\Pi) = (0,3,1)$; $r(v_6|\Pi) = (0,3,2)$;

$r(v_7|\Pi) = (0,2,3)$. Karena representasi dari setiap titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf lingkaran C_7 dan $pd(C_7) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(C_7) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$; $S_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, maka titik v_2, v_4, v_6 memiliki representasi yang sama yaitu (1,0), hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi $pd(C_7) \geq 3$. Akibatnya, $pd(C_7) = 3$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Waktu untuk dilakukannya penelitian adalah pada semester ganjil dan genap tahun ajaran 2018-2019.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah untuk menentukan bentuk umum dimensi partisi graf Petersen $P_{n,1}$ dengan n berbilangan ganjil adalah :

1. Mengkonstruksi graf Petersen $P_{n,1}$ tertentu.

2. Memilih titik tertentu dalam graf Petersen $P_{n,1}$ sebagai titik awal dalam graf Petersen $P_{n,1}$.
3. Memberi label pada kelas-kelas partisi dengan partisi seminimal mungkin.
4. Menentukan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ untuk n ganjil.
   - Metode yang dilakukan untuk menentukan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ untuk n ganjil adalah dengan menentukan batas bawah dan batas atas dari $pd(P_{n,1})$.
   - Batas bawah dimensi partisi graf Petersen diperumum untuk n ganjil dibutuhkan sekurang-kurangnya 3 partisi pembeda, berdasarkan Teorema 2.4.1. Hal ini disebabkan karena graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ memuat lingkaran.
   - Batas atas dimensi partisi graf Petersen diperumum untuk n ganjil dapat ditentukan dengan mengkontruksi partisi-partisi yang memenuhi persyaratan dimensi partisi pada graf Petersen diperumum. Kontruksi dapat diawali dari pemberian label partisi pada titik-titik graf Petersen diperumum, sehingga diperoleh partisi pembeda graf tersebut. Hal ini dilakukan dengan memperlihatkan struktur graf Petersen tersebut.
5. Menentukan dimensi partisi dari operasi tertentu beberapa graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk n ganjil.
   - Metode yang dilakukan adalah mendefinisikan graf Petersen diperumum dengan operasi tertentu, yaitu $sP_{n,1}$. Misalkan terdapat s buah graf Petersen diperumum $P_{n,k}$. Titik luar u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ untuk graf Petersen yang ke-t , $t = 1, 2, \dots, s$, $s \geq 1$ dinotasikan dengan u_i^t. Titik dalam v_i , $i = 1, 2, \dots, n$ untuk graf Petersen diperumum yang ke-t ,

$t = 1, 2, \ldots, s, s \geq 1$ dinotasikan dengan v_i^t. Graf Petersen diperumum $sP_{n,k}$ diperoleh dari $s \geq 1$ graf $P_{n,1}$, yang mana setiap titik luar $u_i^t, i \in [1, n], t \in [1, s]$ dihubungkan oleh suatu lintasan $(u_i^t u_i^{t+1}), t = 1, 2, \ldots, s-1, s \geq 2$. Notasi s dapat juga disebut layer dari graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$.

- Menentukan dimensi partisi dari operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ adalah dengan menentukan batas bawah dan batas atas dari $pd(sP_{n,1})$.
- Batas bawah dimensi partisi dari operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk n ganjil dibutuhkan sekurang-kurangnya 3 partisi pembeda untuk $s = 1,2$ dan sekurang-kurangnya 4 partisi pembeda untuk $s \geq 3$. Hal ini disebabkan graf Petersen diperumum memuat lingkaran (Teorema 2.4.1).
- Batas atas dimensi partisi dari operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk n ganjil dapat ditentukan dengan mengkontruksi partisi-partisi yang memenuhi persyaratan dimensi partisi pada graf Petersen diperumum. Kontruksi dapat diawali dari pemberian label partisi pada titik-titik operasi tertentu graf Petersen diperumum, sehingga diperoleh partisi pembeda graf tersebut. Hal ini dilakukan dengan memperlihatkan struktur graf Petersen tersebut.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ untuk $n \geq 3$ ganjil adalah 3. Selanjutnya dimensi partisi operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk $n \geq 3$ ganjil dan $s = 1,2$ adalah 3, sedangkan untuk $s \geq 3$ adalah 4.

5.2 Saran

Penelitian ini memberikan masalah terbuka untuk penelitian selanjutnya, yaitu menentukan dimensi partisi graf Petersen $P_{n,k}$ dengan $k > 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati. 2012. Partition Dimension of Amalgamation of Stars. *Bulletin of Mathematics,* **4**(2), 161-167.

Asmiati. 2016. *Graf dan Aplikasinya pada Jarak Terpendek*. Matematika, Yogyakarta.

Chartrand, G., Salehi E., & Zhang, P. 1998. On The Partition Dimension of Graph. *Congress Numer.,* **130**, 157-168.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. 2000. The Partition Dimension of Graph. *Aequationes Math.,* **59**, 45-54.

Chartrand, G. & Zhang, P. 2003. The Theory and Application of Resolvability in Graph. *Congress Numer.,* **160**, 47-68.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc., New York.

Watkins, M.E. 1969. A Theorem on Tait Colorings with Application to The Generalized Petersen Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **6**,152-164.