# RUANG BARISAN SELISIH $l_p(\Delta_2)$

**(Skripsi)**

**Oleh**

**Della Kharisma**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**2019**

## ABSTRACT

## RUANG BARISAN SELISIH $l_p(\Delta_2)$

**by**

**Della Kharisma**

Row is a function whose domain is a set of natural numbers. A linear space consisting of ranks is called a row room. One of the frequently studied row spaces is the $l_p$ space defined $l_p = \left\{\bar{x} = (x_n) \subset R : (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$ with $1 \leq p < \infty$. In this study, a row space difference in the $l_p$ sequence space is constructed with certain norms. The row of the difference in space is $l_p(\Delta)$, and $l_p(\Delta_2)$ . In this study the properties of the row space of the difference are shown. The results show that space $l_p, l_p(\Delta)$, dan $l_p(\Delta_2)$ are banach spaces.



**Key Words**: *Bernorm Space, Difference Row Space, Banach Space.*

**ABSTRAK**

**RUANG BARISAN SELISIH $l_p(\Delta_2)$**

**oleh**

**Della Kharisma**

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli. Ruang linier yang beranggotakan barisan disebut ruang barisan. Salah satu ruang barisan yang sering dikaji adalah ruang $l_p$ yang didefinisikan $l_p = \left\{\bar{x} = (x_n) \subset R : (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$ dengan $1 \leq p < \infty$ . Dalam penelitian ini dikonstruksikan ruang barisan selisih pada ruang barisan $l_p$ dengan norma tertentu. Ruang barisan selisih yang dimaksud adalah $l_p(\Delta)$, dan $l_p(\Delta_2)$. Pada penelitian ini ditunjukkan sifat-sifat dari ruang barisan selisih tersebut. Hasil menunjukkan bahwa ruang $l_p, l_p(\Delta)$, dan $l_p(\Delta_2)$ merupakan ruang banach.



**Kata Kunci** : *Ruang Bernorm, Ruang Barisan Selisih, Ruang Banach.*

# RUANG BARISAN SELISIH ($l_p\Delta_2$)

**Oleh**

**Della Kharisma**

**Skripsi**

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2019**

| | | |
|---|---|---|
| Judul Skripsi | : | **RUANG BARISAN SELISIH $l_p(\Delta_2)$** |
| Nama Mahasiswa | : | Della Kharisma |
| No. Pokok Mahasiswa | : | 1517031030 |
| Jurusan | : | Matematika |
| Fakultas | : | Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam |

**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing

**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP 19720227 199802 1 001

**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**
NIP 19740316 200501 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP 19631108 198902 2 001

## MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** .....

   Sekretaris : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** .....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** .....

2. Plt. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**Prof. Sutopo Hadi, M.Sc., Ph.D.**
NIP 19710415 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 Februari 2019**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

| | |
|---|---|
| Nama | : **Della Kharisma** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : **1517031030** |
| Jurusan | : **Matematika** |
| Judul Skripsi | : **Ruang Barisan Selisih $\ell_p(\Delta_2)$** |

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Dan Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar lampung, 20 Februari 2019

Yang Menyatakan,

**Della Kharisma**

# RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Della Kharisma, dilahirkan pada tanggal 11 Oktober 1997 di Metro. Penulis merupakan putri kedua dari Bapak Suparman dan Ibu Suratmi, adik dari Eko Andika dan kakak dari Gede Prestiwana.

Penulis menempuh pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Tri Tunggal Jaya pada tahun 2003 sampai 2009. Kemudian melanjutkan ke sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Gunung Agung Tulang Bawang Barat pada tahun 2009 sampai 2012. Dan belajar pada jenjang SMA di SMA Al-azhar 3 Bandar Lampung pada tahun 2012 sampai 2015.

Pada tahun 2015, melalui jalur SNMPTN, penulis diterima dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Pada tahun 2016 penulis terdaftar sebagai anggota Kaderisasi Himatika Unila. Dan di tahun-tahun terakhir menuntut ilmu di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan sebagai guru privat di IKSA Edugrup Lampung.

Di awal tahun 2018 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Dinas Pemberdayaan Perempuan dan Perlindungan Anak Kota Metro. Di pertengahan tahun 2018, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 32 hari di Desa Sumber Jaya, Kecamatan Gunung Agung, Kabupaten Tulang Bawang Barat.

## KATA INSPIRASI

"Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan?"

(QS. Ar-Rahman: 13)

"Hai orang-orang yanga beriman, jika kamu (menolong) agama Allah, niscaya Dia akan menolongmu dan meneguhkan kedudukanmu."

(Q.S. Muhammad: 7)

"Tidak ada hasil yang sia-sia jika dilakukan dengan sungguh-sungguh"

(Della Kharisma)

"Apalah arti usaha tanpa doa"

(Della Kharisma)

"Memaafkan, berusaha, bersabar dan bersyukur"

(Della Kharisma)

"Percayalah keajaiban meminta dengan sungguh-sungguh kepada Allah SWT"

(Della Kharisma)

## PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,
Puji dan syukur kita panjatkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena atas berkah dan nikmat-Nya kepada kita, Shalawat serta salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya yang sangat sederhana ini untuk:

### Ayah dan Ibu

Terimakasih untuk ayah dan ibu. Terimakasih atas upaya dan doa terbaik yang kalian berikan. Tidak ada kata-kata yang mampu diungkapkan untuk ucapan terimaksih ku kepada kalian. Atas ridho kalian, Allah memudahkan segala urusanku. Pengorbanan kalian takkan bisa aku balas semua. Semoga Allah SWT selalu melindungi dan menyayangi kalian. Dan semoga kami bisa selalu membuat kalian bangga.

### Kakakku dan adikku

Terimakasih telah mengajarkan banyak hal, membantu banyak hal dan selalu mendukung, terutama arti kebahagiaan. Doakan aku agar bisa menjadi sosok yang lebih baik lagi dan bisa membuat kalian bangga.

### Sahabat serta orang-orang tersayangku

## SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena atas limpahan karunia serta ridho-Nya sehingga skripsi dengan judul **"Ruang Barisan Selisih $\ell_p(\Delta_2)$"** dapat terselesaikan. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada suri tauladan kita Nabi Muhammad SAW. Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis menyadari banyaknya bimbingan, bantuan, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku pembimbing I yang senantiasa membimbing dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., MSi., selaku pembimbing akademik dan pembimbimng II yang selalu memberikan arahan kepada penulis.
3. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D., selaku penguji yang telah memberikan saran dan semangat sehingga terselesainya skripsi ini.
4. Ibu Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

6. Seluruh Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Bapak, Ibu, Kakak dan Adik yang tidak pernah lelah mendo'akan, mendukung dan memberi perhatian kepada penulis.
8. Bagus Erica Yuanta yang tidak pernah lelah membantu, mendukung serta sabar.
9. Teman-teman seperjuangan Aulia Rahman, Oppa Doni, Fadila Cahya Puri, Sucita, Irmaningsih, Irmawati, dan lainnya yang telah banyak memberikan support, nasehat dan bantuannya.
10. Para teman-temanku Anak mami, KKN Sumber Jaya, Bimbingan pak Muslim Squad, Math'A 2015, dan Matematika 2015 yang telah membantu, mendukung dan memberikan semangat kepada penulis.
11. Sahabat-sahabatku dari kampung halaman yang sudah seperti keluarga Laini, Feygy, Rizki Aulia, dan Diska yang telah membantu dan mendukung penulis.
12. Sahabat-sahabatku dari SMA Emida, Chintia, Tania dan Anggi yang telah mendukung penulis.
13. Keluarga besar HIMATIKA FMIPA UNILA.
14. Almamater tercinta UNILA.
15. Dan semua pihak yang terlibat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Bandar Lampung, 20 Februari 2019

Penulis

Della Kharisma

## DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR ISI ..... i

I. PENDAHULUAN ..... 1

1.1 Latar Belakang dan Masalah ..... 1
1.2 Tujuan Penelitian ..... 2
1.3 Manfaat Penelitian ..... 2

II. TINJAUAN PUSTAKA ..... 3

2.1 Barisan ..... 3
2.2 Ruang Vektor ..... 7
2.3 Ruang Bernorm ..... 7
2.4 Ruang Barisan ..... 10

III. METODOLOGI PENELITIAN ..... 17

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian ..... 17
3.2 Metode Penelitian ..... 17

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN ..... 18

4.1 Ruang Barisan $l_p$ ..... 18
4.2 Ruang Barisan Selisih $l_p(\Delta)$ ..... 22

4.3 Ruang Barisan Selisih $l_p(\Delta_2)$ ..... 31

V. KESIMPULAN ..... 40

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

# I. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Semakin berkembangnya teknologi, para matematikawan juga semakin mengembangkan teori-teori yang ada. Salah satu teori matematika yang banyak dikembangkan yaitu cabang keilmuan analisis. Analisis merupakan salah satu cabang matematika yang terus menerus mengalami perkembangan dari analisis klasik menjadi analisis modern. Analisis klasik berbicara tentang sistem bilangan, kekonvergenan suatu barisan maupun deret, kekontinuan, pendiferensialan, serta pengintegralan. Sedangkan analisis modern itu sendiri berbicara tentang konsep ruang yang bersifat abstrak. Salah satunya yaitu membahas tentang konsep ruang barisan.

Ruang barisan yang akan dibahas kali ini yaitu ruang barisan selisih kedua yang dinotasikan $l_p(\Delta_2)$. Sebelum kita menunjukkan bahwa $l_p(\Delta_2)$ merupakan ruang Banach (ruang bernorma lengkap) maka perlu diketahui terlebih dahulu apakah barisan tersebut ruang bernorma, konvergen dan terbatas.

Menurut Darmawijaya (2007), ruang bernorma adalah ruang linear *X* yang dilengkapi dengan suatu norma ||. || dan mempunya sifat-sifat:

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$

ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar $\alpha$ dan $x \in X$.

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

Dari konsep tersebut penulis mencoba mengkaji lebih dalam tentang ruang Banach salah satu ruang barisan, yaitu barisan $l_p$ , $l_p(\Delta)$ , dan $l_p(\Delta_2)$.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini yaitu menunjukkan bahwa $l_p$, $l_p(\Delta)$, dan $l_p(\Delta_2)$ merupakan ruang Banach.

## 1.3 Manfaat penelitian

Adapun tujuan penelitian ini diantaranya:

1. Memahami sifat-sifat ruang bernorm pada $l_p$ , $l_p(\Delta)$, dan $l_p(\Delta_2)$
2. Memahami kekonvergenan dan masalah ruang barisan selisih $l_p$ , $l_p(\Delta)$, dan $l_p(\Delta_2)$
3. Dapat menunjukkan $l_p$ , $l_p(\Delta)$, dan $l_p(\Delta_2)$ merupakan ruang Banach
4. Dapat memberi ide bagi penulis lain untuk meneliti lebih lanjut ruang barisan selisih.

# II. Tinjauan Pustaka

## 2.1 Barisan

**Definisi 2.1.1**

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli. Misal terdapat bilangan bulat positif $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ yang bersesuaian dengan bilangan real $x_n$ tertentu, maka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ dikatakan barisan (Mizrahi dan Sullivan, 1982).

**Contoh 2.1.1**

$\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan (barisan bilangan real dengan unsur ke-$n$ ) adalah

$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Jika barisan itu dipandang sebagai fungsi $g: N \rightarrow R$ maka

$g(n) = (x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dan jika barisan itu dipandang sebagai himpunan terurut dapat ditulis sebagai berikut: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \ldots \ldots\right)$.

**Definisi 2.1.2**

Misal $L$ adalah suatu bilangan real dan $\{x_n\}$ suatu barisan, $\{x_n\}$ konvergen ke $L$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli $N$, sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$

Suatu bilangan $L$ dikatakan limit dari suatu barisan takhingga $x_1, x_2, \ldots$ jika ada bilangan real positif $\varepsilon$ sehingga dapat ditemukan bilangan asli $N$ yang tergantung pada $\varepsilon$ sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$, dan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

**Contoh 2.1.2**

Tunjukkan barisan $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ konvergen ke 1.

Untuk menunjukkan barisan $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ konvergen ke 1, ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$

Pilih $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ untuk $n \geq n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

Berlaku $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

Dengan kata lain terbukti bahwa barisan $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ konvergen ke 1 atau

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

**Teorema 2.1.3**

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas (Martono, 1985).

**Bukti :**

Misalkan barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen ke $a$, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehinga $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in N$. Karena $(a_n)$ konvergen ke $a$, maka terapat suatu $n_0 \in N$ sehingga $n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < 1$. Akibatnya $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > n_0$. Ambillah $M = maks(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1)$, maka setiap $n \in M$ berlaku $|a_n| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a_n\}$ terbatas.

**Contoh 2.1.3**

Diberikan barisan $X = (a_n)$ dengan $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

Apabila $M \geq 0$ sehingga $|a_n| \leq M$, pilih $M = 1$

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1$$

Untuk setiap $n = 1,2,3, \dots \dots$

Dengan kata lain $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ barisan terbatas.

**Definisi 2.1.4**

Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M \; \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan $l_\infty$ (Maddox, 1970).

**Definisi 2.1.5**

Suatu barisan $(x_n)$ dikatakan mempunyai limit $L$ bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks $n_0$ sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku

$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ (atau $|x_n - L| < \varepsilon$) artinya jika $L$ adalah limit dari $(x_n)$ maka $x_n$ mendekati $L$ jika $n$ mendekati takhingga (Yahya, Suryadi, Agus, 1990).

**Contoh 2.1.5**

Diberikan barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ mempunyai limit $L = 0$ atau ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

**Definisi 2.1.6**

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen (Martono, 1985).

**Contoh 2.1.6**

Diberikan barisan $(x_n) = (n)$ dengan $\in N$ , maka

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Yang artinya setiap ditunjukkan bilangan $M > 0$ selalu terdapat bilangan asli $n$ sehingga

$$n > M$$

Atau setiap bilangan k yaitu $\lim_{n\to\infty} n \neq k$

Sehingga $(x_n) = (n)$ merupakan barisan divergen.

## 2.2 Ruang Vektor

**Definisi 2.2.1**

Misalkan V himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar bilangan riil V disebut ruang vektor atau ruang linier, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$ ( sifat komutatif)
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ ( sifat assosiatif)
4. Ada sebuah vektor $0 \in X$ sehingga $0 + u = u + 0$
5. $\forall u$ di $V$ terdapat vektor balikan dari $u$ atau $-u$ sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$
6. Jika $k$ skalar dan $u$ sebarang benda vektor di $V$ maka $ku$ berada di $ku \in V$
7. $k(u + v) = ku + kv$ (sifat distributif)
8. $(k + 1)u = ku + 1u$
9. $k(lu) = (kl)(u)$
10. Untuk sebarang real 1 dan untuk setiap $u \in V$ berlaku $1u = u$

(Anton, 2002).

## 2.3 Ruang Bernorm

**Definisi 2.3.1**

Diberikan ruang linear $X$. Fungsi $x \in X \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$

ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar $\alpha$ dan $x \in X$.

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada *X* dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut *norm* vektor *x*. Ruang linear *X* yang dilengkapi dengan suatu *norm* $\|.\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|.\|$ atau *X* saja asalkan *norm* nya telah diketahui (Darmawijaya, 2007).

**Lemma 2.3.2**

Dalam ruang linear bernorma *X* berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$ (Maddox, 1970).

**Bukti :**

untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|$$

.

**Definisi 2.3.3**

Barisan $(x_n)$ di dalam ruang bernorma *X* dikatakan **konvergen** (*convergent*) jika ada $x \in X$ sehingga untuk setiap bilangan asli $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0$ (bergantung pada $\varepsilon$), sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku.

$$||x_n - x|| < \varepsilon$$

Jika demikian halnya, dikatakan barisan $(x_n)$ konvergen ke $x$ atau barisan $(x_n)$ mempunyai limit x untuk $n \to \infty$ dan ditulis dengan

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

atau dapat ditulis dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sedangkan titik $x$ disebut titik limit barisan $\{x_n\}$ (Darmawijaya, 2007).

**Definisi 2.3.4**

Barisan $(x_n)$ di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ disebut barisan Cauchy atau **barisan fundamental** jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0$, sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m,n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ (Robert and Ronald, 2000).

**Teorema 2.3.5**

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorma $X$ merupakan barisan Chaucy (Robert and Ronald, 2000)**.**

**Bukti:**

Misalkan $(x_n)$ adalah barisan di X dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x,$ dan misalkan $\varepsilon < 0$ maka terdapat bilangan asli $N \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga berlaku $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq N,$ akibatnya untuk $n, m \geq N$ berlaku $d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x) + d(x_n) < \varepsilon$, jadi $(x_n)$ barisan Cauchy.

**Definisi 2.3.6**

Ruang bernorma dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Robert and Ronald, 2000).

**Definisi 2.3.7 Ruang Banach**

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorma *X* berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di *X* adalah konvergen (Darmawijaya, 2007).

## 2.4 Ruang Barisan

**Definisi 2.4.1**

Diberikan $\omega$ yaitu koleksi semua barisan bilangan *real* (Darmawijaya, 2007).

jadi :

$$\omega = \{\tilde{x} = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}\}$$

Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_p = \left\{\tilde{x} = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$$

dan *norm* pada $l_p$ yaitu

$$\|x\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

**Contoh 2.4.1**

Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_1 = \left\{\tilde{x} = (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^1 < \infty\right\}$$

dan norm pada $l_1$ yaitu

$$\|x\|_1 = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^1\right\}$$

**Definisi 2.4.2**

Ruang barisan $l_p$ merupakan himpunan dari barisan bilangan yang memiliki syarat

$$l_p = \left\{ \tilde{x} = (x_n) \in X : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

$l_p$ koleksi barisan bilangan yang $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

$$l_p(\Delta) = \{\tilde{x} = (x_n) : \Delta x \in l_p\}$$

$l_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in l_p$

$$l_p(\Delta_2) = \{\tilde{x} = (x_n) : \Delta_2 x \in l_p\}$$

$l_p(\Delta_2)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_2 x \in l_p$

(H.Kizmaz, 1981).

**Definisi 2.4.3**

Diperlihatkan barisan selisi bilangan sebagai berikut :

Jika $\tilde{x} = (x_n)$ suatu barisan bilangan dan

$\Delta\tilde{x} = \{x_{n+1} - x_n\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisan $\tilde{x} = (x_n)$

$$\vdots$$

$\Delta_m\tilde{x} = \left\{\Delta_m\tilde{x}_n = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} x_{n+m-i}\right\}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x} = (x_n)$

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan

$\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_n\}, \Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x_n\}, \ldots, \Delta_m x_m = \{\Delta_m x_n\}$ yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m

(H.Kizmaz, 1981).

**Contoh 2.4.3**

Diberikan barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \dots\right)$$

Akan dicari $\Delta\tilde{x} = \{x_{n+1} - x_n\}$

Untuk setiap $n = 1,2,3, \dots \dots$

$$\Delta\tilde{x} = \{(x_{1+1} - x_1), (x_{2+1} - x_2), (x_{3+1} - x_3), \dots \dots \dots \dots\}$$

$$\Delta\tilde{x} = \{(x_2 - x_1), (x_3 - x_2), (x_4 - x_3), \dots \dots \dots\}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2} - 1\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right), \dots \dots \dots\right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots \dots \dots \dots\right)$$

Sehingga terbentuklah barisan selisih yang pertama yaitu:

$$\Delta\tilde{x} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots \dots \dots \dots\right)$$

**Teorema 2.4.4**

$l_p$ $(1 \leq p < \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap *norm* $\|.\|_p$.

(Darmawijaya, 2007).

**Bukti :**

Akan dibuktikan bahwa $l_p$ merupakan ruang bernorma terhadap $\|.\|_p$.

Untuk setiap skalar $\alpha$ dan $\tilde{x} = (x_n), (y_n) \in l_p$ diperoleh:

i). $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_n| \geq 0$ untuk setiap $n$.

$\|\tilde{x}\|_p = \{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\}^{\frac{1}{p}} = 0$ maka $|x_n| = 0$ untuk setiap $n$

sehingga $\tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

ii). $\|\alpha\tilde{x}\|_{\mathrm{p}} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p$

karena $\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\}^{\frac{1}{p}} < \infty$ maka $\|\alpha\tilde{x}\|_p = \alpha\|x\|_p < \infty$ atau $\alpha\tilde{x} \in l_p$

iii). $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha y_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

berdasarkan i), ii) dan iii) terbukti bahwa merupakan ruang linear dan *norm* $\|\tilde{x}\|_p$ pada $l_p$. Dengan kata lain $\left(l_p, \|\tilde{x}\|_p\right)$ ruang bernorma.

**Teorema 2.4.6**

Jika bilangan *real* $p$ dengan $1 \leq p < \infty$, maka $\left(l_p, \|\tilde{x}\|_p\right)$ merupakan Ruang Banach (Darmawijaya, 2007).

**Teorema 2.4.7 ( Ketidaksamaan Young)**

Diketahui $0 < p, q < \infty$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ untuk sebarang dua bilangan $\alpha$ dan $\beta$

Benar bahwa

$$|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$$

**Bukti:**

Karena $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ diperoleh $p + q = pq, \frac{p}{q} = \frac{1}{q-1}\ dan\ \frac{q}{p} = \frac{1}{p-1}$ diambil kurva $y = x^{p-1}$; jadi $x = y^{q-1}$. Oleh Karena itu diperoleh $|\alpha\beta|$ =luas persegi panjang $\leq$ luas I + luas II yaitu

$$|\alpha\beta| \leq \int_0^{|\alpha|} x^{p-1}dx + \int_0^{|\beta|} y^{q-1}dy = \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$$

(Darmawijaya, 2007).

**Teorema 2.4.8** ( **Ketaksamaan Ho'lder** )

*i.* Untuk setiap $\tilde{x} = (x_n) \in \ell_1$ dan $\tilde{y} = (y_n) \in \ell_p$ benar bahwa

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_p$$

dengan $\|\tilde{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ dan $\|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

*ii.* Jika $1 < p, q < \infty \; dan \; \frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}} = 1$, maka untuk setiap $\tilde{x} = (x_n) \in \ell_p$ , dan $\tilde{y} = (y_n) \in \ell_p$ benar bahwa

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

dengan $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ dan $\|\tilde{y}\|_q = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$

(Robert and Ronald, 2000).

**Bukti :**

i. Jika $\tilde{x} = \{x_n\} \in l_1$ dan $\tilde{y} = \{y_n\} \in l_\infty$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| . |y_n|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| . \sup_{n \geq 1} |y_n| = \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

ii. Jika $\tilde{x} = \{x_n\} \in l_p$ dan $\tilde{y} = \{y_n\} \in l_q$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.|y_n|$$

Karena $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

Tinggal membuktikan bahwa

$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|.|y_n| \leq \|\tilde{x}\|_p.\|\tilde{y}\|_q$ atau $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{\|\bar{x}\|_p}.\frac{|y_n|}{\|\bar{y}\|_p} \leq 1$

Dengan teorema young diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{\|\bar{x}\|_p}.\frac{|y_n|}{\|\bar{y}\|_p} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{p}\left(\frac{|x_n|}{\|\bar{x}\|_p}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{|y_n|}{\|\bar{\bar{y}}\|_p}\right)^q\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x_n|}{\|\bar{x}\|_p}\right)^p+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q}\left(\frac{|y_n|}{\|\bar{\bar{y}}\|_p}\right)^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

**Teorema 2.4.9 ( Ketaksamaan Minkowski )**

Jika $1 \leq p < \infty$ maka untuk setiap $\tilde{x} = \{x_n\}, \tilde{y} = \{y_n\} \in \ell_p$ benar bahwa

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

(Robert and Ronald, 2000).

**Bukti :**

Jika $p=\infty$ , diperoleh

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_\infty = sup_{n\geq 1}|x_n+y_n| \leq sup_{n\geq 1}\{|x_n|+|y_n|\}$$

$$\leq sup_{n\geq 1}|x_n| + sup_{n\geq 1}|y_n| = \|\tilde{x}\|_\infty + \|\tilde{y}\|_\infty$$

Jika $p=1$ diperoleh

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|$$

$$= \|\tilde{x}\|_1 + \|\tilde{y}\|_1$$

Jika $1 < p < \infty$

$$|x_n+y_n|^p = |x_n+y_n|.|x_n+y_n|^{p-1} \leq |x_n|.|x_n+y_n|^{p-1} + |y_n|.|x_n+y_n|^{p-1}$$

Untuk setiap *n* dijumlahkan untuk seluruh *n* dan kemudian memanfaatkan ketidaksamaan Holder, diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p \le \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|.|x_n+y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|.|x_n+y_n|^{p-1}$$

$$\le \|x\|_p.\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\{|x_n+y_n|^{p-1}\}^q\right\}^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p.\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\{|x_n+y_n|^{p-1}\}^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p\right).\sum_{n=1}^{\infty}\{|x_n+y_n|^p\}^{\frac{1}{q}} \quad \text{atau}$$

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_p = \{\sum_{n=1}^{\infty}\{|x_n+y_n|^{p-1}\}^p\}^{\frac{1}{p}} \le \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

# III. METODOLOGI PENELITIAN

## 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

## 3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Menunjukkan $l_p$ merupakan ruang bernorma terhadap $\|.\|_p$, dan ruang Banach
2. Menunjukkan $l_p(\Delta)$ merupakan ruang bernorma terhadap $\|\tilde{x}\|_{\Delta,p} = \| x_1 \| + \|\Delta\tilde{x}\|_p$ , dan ruang Banach
3. Menunjukkan $l_p(\Delta_2)$ merupakan ruang bernorma terhadap $\|\tilde{x}\|_{\Delta_2,p} = \| x_1 \| + \| x_2 \| + \|\Delta\tilde{x}\|_p$, dan ruang Banach.

.

# V. KESIMPULAN

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Ruang Barisan $(l_p, \|.\|_p)$ dengan *norm* $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ merupakan ruang Banach
2. Ruang Barisan Selisih $(l_p(\Delta), \|\tilde{x}\|_{(\Delta,p)})$ dengan *norm* $\|\tilde{x}\|_{\Delta,p} = \| x_1 \| + \|\Delta\tilde{x}\|_p$ merupakan ruang Banach
3. Ruang Barisan Selisih $(l_p(\Delta_2), \|\tilde{x}\|_{(\Delta_2,p)})$ dengan *norm* $\|\tilde{x}\|_{\Delta_2,p} = \| x_1 \| + \| x_2 \| + \|\Delta\tilde{x}\|_p$, merupakan ruang Banach.

## 5.2 Saran

Ruang Barisan Selisih $l_p, l_p(\Delta), l_p(\Delta_2)$ yang telah dibahas dapat dilanjutkan kembali oleh pembaca yang ingin meneliti bidang analisis matematika modern terutama ruang barisan. Pembaca dapat melanjutkan hingga $l_p(\Delta_n)$ ataupun meneliti analisis modern lainnya yang berhubungan dengan ruang barisan.

## DAFTAR PUSTAKA


Anton, R. 2002. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi KedelapanJilid 1.Erlangga, Jakarta.

Bartle,R.G dan Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis,* John Wiley and Sons, Inc, USA,

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Kizmaz, H. 1981. *On Certain Sequance Spaces.* Karadeniz Teknik Universitas, Turkey.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982.*Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.