PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA GILL DAN RUNGE KUTTA MERSON

(Skripsi)

Oleh

DEWI SUNDARI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA GILL DAN RUNGE KUTTA MERSON

Oleh

DEWI SUNDARI

Persamaan diferensial Bernoulli merupakan salah satu bentuk dari persamaan diferensial biasa orde satu. Persamaan diferensial ini dapat diselesaikan secara analitik dan numerik. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial Bernoulli menggunakan metode Runge Kutta Gill dan Runge Kutta Merson lalu menganalisis perbandingan hasil penyelesaian numerik terhadap hasil penyelesaian analitik. Penyelesaian numerik persamaan diferensial Bernoulli menggunakan metode Runge Kutta Gill dan Runge Kutta Merson dimulai dengan penentuan nilai awal x_0 dan y_0, serta nilai langkah Δx. Pada kasus persamaan diferensial Bernoulli tak linear, persamaan diferensial tersebut dilinearisasi menggunakan transformasi Bernoulli sehingga diperoleh persamaan diferensial Bernoulli linear. Hasil penyelesaian numerik yang diperoleh selanjutnya dibandingkan dengan hasil penyelesaian analitik dengan mencari nilai galat dari kedua metode untuk mengetahui keakuratan nilai hampirannya. Perbandingan dari hasil penyelesaian numerik yang diperoleh menunjukkan bahwa metode Runge Kutta Merson menghasilkan nilai hampiran yang lebih akurat daripada metode Runge Kutta Gill.

Kata Kunci: Runge Kutta Gill, Runge Kutta Merson, Persamaan diferensial Bernoulli, Persamaan diferensial Linear, Persamaan diferensial Tak Linear

ABSTRACT

COMPLETION OF BERNOULLI DIFFERENTIAL EQUATION USING RUNGE KUTTA GILL AND RUNGE KUTTA MERSON METHODS

By

DEWI SUNDARI

Bernoulli differential equations are one form of ordinary first-order differential statistics. This differential equation can be solved analytical and numerical differences. This study aims to resolve Bernoulli differential equations using the method of Runge Kutta Gill and Runge Kutta Merson then analyze the results of numerical results on successful analytic results. Completion of numbers using the Runge Kutta Gill and Runge Kutta Merson method starts by specifying the initial values x_0 and y_0, as well as the step Δx value. In the case of Bernoulli differential equations non linear , this differential equation is linearized using Bernoulli transformations to obtain linear Bernoulli differential equations. The results of numerical solution obtained are then compared with the results obtained analytically by looking for the error value of the two methods to determine the accuracy of the close value. Comparison of the numerical results obtained shows that the Runge Kutta Merson method produces a more accurate close value than the Runge Kutta Gill method.

Keywords: Gill Runge Kutta, Merson Runge Kutta, Bernoulli Differential Equations, Linear Differential Equations, Non-Linear Differential Equations

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA GILL DAN RUNGE KUTTA MERSON

Oleh

DEWI SUNDARI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi	:	**PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA GILL DAN RUNGE KUTTA MERSON**
Nama Mahasiswa	:	*Dewi Sundari*
No. Pokok Mahasiswa	:	1517031137
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP 19610128 198811 2 001	NIP 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **08 April 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : **Dewi Sundari**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1517031137**

Judul : **PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA GILL DAN RUNGE KUTTA MERSON**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 8 April 2019
Penulis,

Dewi Sundari
NPM: 1517031137

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Lampung Barat pada tanggal 28 Maret 1998. Sebagai anak ketiga dari tiga bersaudara yang merupakan putri dari Bapak Suwadi dan Ibu Wagimah.

Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 1 Rajabasa Lama pada tahun 2009. Sekolah Menengah Pertama di SMPN 1 Labuhan Ratu pada tahun 2012 dan Sekolah Menengah Atas di SMAN 1 Way Jepara pada tahun 2015. Pada tahun yang sama Penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SBMPTN (Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri).

Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di PT Great Giant Pineapple PG 4 Lampung Timur. Pada tahun 2018 Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Tiyuh Toto Mulyo, Kecamatan Gunung Terang, Kabupaten Tulang Bawang, Provinsi Lampung.

Penulis juga aktif di organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila dan BEM FMIPA Unila. Magang Bidang Minat dan Bakat HIMATIKA periode 2015/2016 dan anggota Bidang Minat dan Bakat HIMATIKA periode 2017, Anggota Departemen Kajian Strategi BEM FMIPA Unila periode 2016/2017.

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang dan Segala Puji dan Syukur kepada Allah SWT

Kupersembahkan Karya sederhanaku ini Teruntuk:

Kedua Orang tua ku, Ayahanda tercinta Suwadi dan Ibunda tercinta Wagimah yang tak henti-hentinya memberikan kasih sayangnya, do'a, dan motivasi dalam segala hal. Dan terima kasih atas kepercayaan yang telah ibunda dan ayahanda berikan selama ini. Serta kedua kakakku, Imam Mahmudi dan Budi Setiawan yang selalu memberikan semangat dan kasih sayang.

Guru-guru yang slalu membagi ilmunya untukku

Seluruh keluargaku,

teman dan sahabatku

Almamater Unila

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya".

(Q.S. Al-Baqarah ayat 286)

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesunggunya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai dari suatu urusan tetaplah bekerja keras untuk urusan yang lain".

(Q.S. Asy - Syarh ayat 5-7)

"Barang siapa memudahkan urusan orang lain, pasti Allah akan memudahkan urusannya di dunia dan akhirat".

(HR. Muslim)

"Masa depan itu milik orang yang percaya akan mimpinya dan bekerja sepenuh hati untuk mewujudkannya".

(Wishnutama)

"Sebuah hari tanpa tertawa adalah hari yang tidak berguna".

(Charlie Chaplin)

SANWACANA

Assalamualaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah S.W.T, serta sholawat dan salam selalu tercurah pada nabi besar kita, Nabi Muhammad SAW. Atas segala rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul “Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli Menggunakan Metode Runge Kutta Gill dan Runge Kutta Merson”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Pada Kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberikan ilmu gagasan, bimbingan, bantuan, dukungan, arahan, saran dan kritik sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik sekaligus Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, semangat, motivasi, waktu,saran, nasehat, dan bantuan selama penulis menyelesaikan skripsi.
3. Bapak Suharsono S, M.S., M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan saran, pengarahan, nasehat, kesabaran, dan bantuan yang sangat berharga untuk perbaikan penulisan skripsi.

4. Ibu Prof. Dra.Wamiliana, MA, Ph.D. selaku Kepala Jurusan Matematika FakultasMatematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
5. Bapak Drs. Suratman, M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung
6. Para Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Kedua orang tua ku yang aku sayangi (Ayahanda Suwadi & Ibunda Wagimah) kakak ku tersayang (Imam Mahmudi & Budi Setiawan) serta untuk seluruh keluarga terima kasih atas kasih sayang, do'a, nasehat, perhatian, kepercayaan dan dukungan yang tidak henti-hentinya.
8. Lek Andi, Bik Ratna, Nurul, Nisa, Ale yang selalu memberikan semangat, motivasi serta senantiasa memberikan do'a untuk keberhasilanku.
9. Tiwi, Akikah, Diana, Mona,Yuni, Rizka yang telah memberikan semangat serta partner sharing terbaik.
10. Bang Rahmad, Anita selaku tutor yang telah membantu penulis menyelesaikan penelitian ini serta temen seperjuangan Aul, Mira, Dinda, Edwin, Nia yang selalu menyuntikkan energi semangat kepada penulis.
11. Antoni Awaldi Putra yang selalu memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.
12. Teman-teman matematika angkatan 2015 khususnya kelas C, terimakasih suka dan duka selama kurang lebih 3,5 Tahun perkuliahan.
13. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Akhir kata, semoga ketulusan serta bantuan dari semua pihak tersebut kiranya mendapat berkah dan anugrah dari Allah SWT.

Bandar Lampung, 8 April 2019
Penulis

Dewi Sundari

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan non linier adalah persamaan polinomial yang berderajat lebih dari satu atau kurang dari satu dan terjadi perkalian antara variabelnya. Penyelesaian (solusi) sistem persamaan nonlinier adalah adalah pengganti variabel jika disubtitusikan kedalam kumpulan persamaan nonlinier akan bernilai benar. Salah satu persamaan nonlinier adalah persamaan diferensial Bernoulli (Munir, 2003).

Persamaan diferensial (PD) Bernoulli adalah salah satu bentuk dari persamaan diferensial biasa (PDB) orde satu yang memiliki bentuk umum:

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x)y^n$$

Dengan A, B merupakan suatu fungsi dari x atau konstanta, dan n adalah bilangan real (Booth and Stroud, 2003).

PD Bernoulli dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Metode numerik adalah metode yang berlaku secara umum yang dapat menyelesaikan permasalahan matematika yang rumit dan sederhana. Penyelesaian PD Bernoulli menggunakan metode numerik menghasilkan suatu nilai penyelesaian yang mendekati nilai penyelesaian analitik dan jarang menghasilkan nilai penyelesaian yang eksak, sehingga nilai penyelesaian yang diperoleh disebut dengan nilai hampiran (Munzir, 2003).

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan metode numerik dapat diselesaikan dengan metode Euler, metode Heun, metode Gauss-Seddle, metode Runge-Kutta dan lain-lain. Dalam penelitian ini menulis menggunakan metode Rung-Kutta Gill dan metode Runge-Kutta Merson untuk menyelesaikan persamaan diferensial Bernoulli.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan diferensial Bernoulli menggunakan metode Runge-Kutta Gill dan Runge-Kutta Merson serta menganalisis perbandingan hasil penyelesaian numerik terhadap hasil penyelesaian analitik.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Sebagai salah satu cara pemecahan masalah pada persamaan diferensial Bernoulli.
2. Mengetahui metode terbaik diantara metode Runge-Kutta Gill dan metode Runge-Kutta Merson.
3. Dapat dijadikan referensi untuk penelitian selanjutnya dengan persamaan diferensial yang lain.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika *x* adalah fungsi dari *t*, maka contoh persamaan diferensial biasa adalah

$$\frac{dx}{dt} = t^2 cosx$$

dimana persamaan tersebut memiliki order satu. Order dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tak diketahui (peubah tak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial (Campbell & Haberman, 2008).

Berdasarkan sifat kelinieran dari peubah tak bebasnya, persamaan diferensial biasa dapat dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linier dan persamaan diferensial biasa nonlinier.

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Linier

Persamaan diferensial biasa linier memiliki bentuk umum :

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\ \frac{d^n x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)\frac{dy}{dt} + a_n(t)x = f(t) \tag{2.1}$$

dengan $a_n \neq 0, a_n, a_{n-1,} \cdots a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi *f*(*t*) disebut input atau unsur nonhomogen. Jika *f*(*t*) disebut *input*, maka solusi dari persamaan diferensial *x*(*t*) biasanya disebut *output*. Jika ruas sebelah kanan $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai *t* dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen. Contoh persamaan diferensial biasa linier adalah

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3t$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa linier nonhomogen order satu.

2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Nonlinier

Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial biasa linier, yaitu pada persamaan (2.1), maka persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinier. Contoh persamaan diferensial biasa nonlinier

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3x^2 = sint$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier nonhomogen order dua (Hidayat, 2006).

2.2 Persamaan Diferensial Bernoulli

Persamaan diferensial (PD) Bernoulli adalah salah satu bentuk dari persamaan diferensial biasa (PDB) orde satu yang memiliki bentuk umum :

$$\frac{dy}{dx} + A(x)y = B(x)y^n \tag{2.2}$$

Dengan A,B merupakan suatu fungsi dari x atau konstanta, dan n adalah bilangan real. PD Bernoulli merupakan PDB orde satu yang dapat berbentuk PD linier atau tak linier. Jika $n = 0$ atau $n = 1$, maka persamaan (2.2) merupakan PD Bernoulli linier. Sedangkan jika, $n \neq 0$ atau $n \neq 1$, maka persamaan (2.2) merupakan PD tak linier.

Pada kasus PD Bernoulli linier, persamaan (2.2) dapat langsung diselesaikan secara analitik dan numerik. Namun pada penyelesaian kasus PD Bernoulli tak linier persamaan (2.2) dilinierisasi menggunakan transformasi Bernoulli agar diperoleh PD Bernoulli linier, dengan langkah-langkah linearisasi sebagai berikut :

1. Membagi variabel terikat y dengan y^n; $n \neq 0$ atau $n \neq 1$ pada persamaan (2.2), sehingga diperoleh :

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + A(x)y^{1-n} = B(x) \tag{2.3}$$

2. Memisalkan y^{1-n} menjadi suatu variabel baru, misal variabel z sehingga:

$$z = y^{1-n} \tag{2.4}$$

3. Mencari diferensial dari z terhadap x dari persamaan (2.4) sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} \tag{2.5}$$

4. Mensubtitusikan persamaan (2.4) dan (2.5) ke dalam persamaan (2.3) sehingga diperoleh PD Bernoulli linier sebagai berikut :

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)A(x)z = (1-n)B(x) \tag{2.6}$$

(Booth and Stroud, 2003).

2.3 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah :

$$x_{i+1} = x_i + \Phi(t_i, x_i, h) \qquad (2.7)$$

dengan $\Phi(t_i, x_i, h)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama x_i ke nilai baru x_{i+1} sepanjang interval h . Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \qquad (2.8)$$

Dengan a adalah konstanta dan k adalah :

$$k_1 = f(t_i, x_i) \qquad (2.9)$$

$$k_2 = f(t_i + p_i h, x_i + q_{11} k_1 h) \qquad (2.10)$$

$$k_3 = f(t_i + p_i h, x_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \qquad (2.11)$$

.

.

$$k_n = f(t_i + p_{n-1} h, x_i + q_{n-1,2} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

Dengan p dan q adalah konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan k_2, yang keduanya juga muncul dalam persamaan k_3 dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta efisien untuk hitungan program MATLAB (Triatmodjo, 2002).

Ada beberapa tipe metode Runge-Kutta yang tergantung pada nilai (orde) yang digunakan. Misalnya, untuk disebut metode Runge-Kutta orde satu atau disebut juga metode Euler, yang diperoleh dari dan persamaan (2.8) :

$$\Phi = a_1 k_1 = a_1\, f(t_i, x_i)$$

Untuk a_1=1 maka persamaan menjadi :

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)h$$

Didalam metode Runge-Kutta, setelah nilai ditetapkan, kemudian nilai dicari a, p, q dengan menyamakan persamaan (2.7) dengan suku-suku dari deret Taylor. Metode yang sering digunakan adalah metode Runge-Kutta orde dua, metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Runge-Kutta orde empat.

2.3.1 Metode Runge-Kutta Orde Dua

Metode Runge-Kutta orde dua mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \tag{2.12}$$

Dengan nilai k_1 dan k_2 seperti pada persamaan (2.9) dan (2.10) serta untuk nilai $a_{1,} a_2, p_1$, dan q_1 dievaluasi dengan menyamakan persamaan (2.12) dengan deret Taylor orde dua, sehingga didapatkan nilai sebagai berikut :

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1 p_1 = a_1 q_1 = \frac{1}{2}$$

Dengan memilih $a_1 = \frac{1}{2}$ maka didapatkan $a_2 = \frac{1}{2}$ dan $p_1 = q_1 = 1$. Selanjutnya substitusikan nilai-nilai tersebut pada persamaan (2.12), sehingga didapatkan rumus metode Runge-Kutta orde dua sebagai berikut :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h$$

Dengan :

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f(t_i + h, x_i + k_1 h)$$

2.3.2 Metode Runge-Kutta Orde Tiga

Metode Runge-Kutta orde tiga diturunkan dengan cara yang sama seperti Runge-Kutta orde dua untuk nilai $n = 3$. Hasil dari turunan ini adalah enam persamaan dengan delapan bilangan tak diketahui. Oleh karena itu, dua bilangan tidak diketahui tersebut harus ditetapkan terlebih dulu untuk mendapatkan enam bilangan tak diketahui lainnya. Metode Runge-Kutta orde tiga memunyai bentuk sebagai berikut :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \qquad (2.13)$$

Dengan

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f(t_i + h, x_i + k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_i + h, x_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

2.3.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode yang paling teliti dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde dua dan orde tiga. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Metode Runge-Kutta orde empat diturunkan dengan cara yang sama seperti metode Runge-Kutta orde dua untuk nilai . Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{2.14}$$

Dengan

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(t_i + h, x_i + \frac{1}{2}k_3 h\right)$$

Metode Runge-Kutta orde empat ini mempunyai tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi daripada metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Metode Runge-Kutta orde empat juga mudah diprogram, stabil, kecil kesalahan pemotongan dan juga kecil kesalahan pembulatan (Triatmodjo, 2002).

2.4 Metode Runge-Kutta Gill (RKG)

Metode Runge-Kutta-Gill (RKG) tergolong dalam keluarga metode RK orde-4, yang memiliki 4 (empat) buah ‘konstanta perhitungan antara’ yang dikombinasikan dengan konstanta-konstanta lain (a, b, c, dan d) sebagai keluarga bilangan emas (golden numbers). Metode Runge-Kutta Gill mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_2) + \frac{1}{3}(bk_2 + dk_3) \tag{2.15}$$

Dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + ak_1 + bk_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + ck_2 + dk_3)$$

Dimana

$a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ $b = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $d = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Untuk $i = 0,1,2, \ldots, n-1$ dan nilai awal $x_0 = y_0$

(Mathews & Kurtis, 2004).

2.5 Metode Runge-Kutta-Merson (RKM)

Metode Runge-Kutta-Merson (RKM) tergolong dalam keluarga metode RungeKutta order-4, namun memiliki ketelitian sampai order-5. Keistimewaan ini dimungkinkan karena metode RKM memiliki 5 (lima) buah 'konstanta perhitungan antara' yang berperan untuk memprediksi harga solusi yang diinginkan pada 2 (dua) keadaan sedemikian rupa sehingga 'galat pembulatan' dapat diminimisasi sampai order-5. Metode Runge-Kutta-Merson mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 \quad (2.15)$$

Dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + \frac{1}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4\right)$$

Untuk $i = 0,1,2, \dots, n-1$ dan nilai awal $x_0 = y_0$

(Mathews & Kurtis, 2004).

2.6 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi).

Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematik tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik. Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan (*error*) (Triatmodjo, 2002).

2.7 Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) dari penyelesaian analitis. Berarti dalam penyelesaian numerik terdapat beberapa kesalahan terhadap nilai eksak.

Kesalahan (error/galat) adalah besarnya perbedaan atau selisih antara nilai taksiran (hampiran/aproksimasi) dengan nilai sesungguhnya (eksak), kesalahan ini bisa timbul karena proses pengukuran atau penggunaan aproksimasi.

Besarnya kesalahan atas suatu nilai taksiran dapat dinyatakan secara kuantitatif dan kualitatif. Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kuantitatif disebut Kesalahan Absolut. Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kualitatif disebut dengan Kesalahan Relatif. Nilai eksak dapat diformulasikan sebagai hubungan antara nilai perkiraan dan nilai kesalahan sebagai berikut :

$$V = V' + \xi$$

Dimana:

v= nilai eksak

v'= nilai perkiraan

ξ = kesalahan

Kesalahan absolut menunjukkan besarnya perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan :

$$\xi_a = |v - v'|$$

Kesalahan absolut tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan, tetapi hanya sekedar menunjukkan selisih perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan.

Kesalahan relatif menunjukkan besarnya tingkat kesalahan antara nilai perkiraan dengan nilai eksaknya yang dihitung dengan membandingkan kesalahan absolut terhadap nilai eksaknya (biasanya dinyatakan dalam %) :

$$\xi_r = \left|\frac{\xi_a}{v}\right| \times 100\%$$

dimana :

v = nilai eksak

ξ_r = kesalahan relatif

ξ_a = kesalahan absolut

Semakin kecil kesalahan relatifnya, maka nilai perkiraan yang diperoleh akan semakin baik (Triatmodjo, 2002).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penilitian ini adalah sebagai berikut :

1. Diberikan persamaan diferensial Bernoulli tak linier dengan nilai awal (x_0) dan (y_0) serta jarak (h).
2. Melinearisasi persamaan diferensial Bernoulli tak linier menjadi persamaan diferensial Bernoulli linier.
3. Menyelesaikan solusi analitik persamaan diferensial Bernoulli.
4. Menyelesaikan persamaan diferensial Bernoulli secara numerik dan manual menggunakan metode Rung-Kutta Gill.
5. Menyelesaikan persamaan diferensial Bernoullisecara numerik dan manual menggunakan metode Rung-Kutta Merson.

6. Mencari nilai error dari masing-masing metode.
7. Membandingkan metode Runge-Kutta Gill dan Runge-Kutta Merson dengan solusi analitik.

V KESIMPULAN

Adapun kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah nilai analisis *error* dari solusi analitik dan solusi numerik dengan menggunakan metode Rungge-Kutta Gill memiliki nilai galat yang semakin besar ketika jumlah partisi n semakin besar. Nilai analisis *error* terbesar dari metode Runge-Kutta Gill pada Kasus I yaitu sebesar 0.0682 dan pada Kasus II yaitu sebesar 0.0152 sedangkan nilai analisis *error* dari solusi analitik dan solusi numerik dengan menggunakan metode Rungge-Kutta Merson memiliki nilai galat yang semakin besar ketika jumlah partisi n semakin besar. Nilai analisis *error* terbesar dari metode Runge-Kutta Merson pada Kasus I yaitu sebesar 0.0482 dan Kasus II yaitu sebesar 0.0097. Dapat dikatakan bahwa pada Kasus I dan Kasus II metode Runge-Kutta Merson memiliki nilai yang lebih akurat menghampiri nilai solusi analitiknya dibandingkan metode Runge-Kutta Gill untuk penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli.

DAFTAR PUSTAKA

Campbell, S. L., & Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems.* Princeton University Press, New Jersey.

Hidayat, R. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. UPT Penerbitan Universitas Jember, Jember.

Mathews & Kurtis. 2004. *Numerical Methods Using Matlab.* 4th Editions. The Prentice Hall, New Jersey.

Munzir, M. 2003. *Metode Numerik*. Informatika, Bandung.

Stroud KA, Booth DJ. 2003. *Matematika Teknik*. Bondan A, alih bahasa. Ed kelima, Jilid 2. Erlangga, Jakarta.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.