PERBANDINGAN METODE NEWTON-RAPHSON DAN METODE JACOBIAN UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL NONLINEAR BERDASARKAN JUMLAH ITERASI DAN GALAT TERKECIL

(Skripsi)

Oleh
EDWIN SAPUTRA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

PERBANDINGAN METODE NEWTON-RAPHSON DAN METODE JACOBIAN UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL NONLINEAR BERDASARKAN JUMLAH ITERASI DAN GALAT TERKECIL

Oleh

EDWIN SAPUTRA

Persamaan polinomial adalah pernyataan matematika yang melibatkan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien. Sistem persamaan polinomial nonlinear merupakan kumpulan dari beberapa persamaan nonlinear. Metode Newton-Raphson dan metode Jacobian adalah metode yang digunakan untuk memecahkan sistem persamaan nonlinear. Dalam kasus ini, metode Jacobian dikonversikan dari persamaan nonlinear ke persamaan linear. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan metode mana yang lebih baik dalam mencari solusi sistem persamaan polynomial nonlinear berdasarkan Iterasi dan Galat Terkecilnya. Dalam penelitian ini terdapat tiga kasus sistem persamaan polinomial nonlinear yang akan digunakan untuk membandingkan metode Newton-Raphson dan metode Jacobian. Dari ketiga kasus tersebut, metode Newton-Raphson lebih baik dalam menyelesaikan solusi sistem persamaan polinomial nonlinear dengan rata-rata mencapai 6 Iterasi dan 0.000000032 galatnya dibandingkan metode Jacobian dengan rata-rata mencapai 39 Iterasi dan 0.0000008293 galatnya.

Kata Kunci : Persamaan polinomial, Sistem persamaan polinomial nonlinear, Metode Newton-Raphson, Metode Jacobian.

ABSTRACT

A COMPARISON OF NEWTON-RAPHSON METHOD AND JACOBIAN METHOD FOR THE SOLUTION OF SYSTEM OF NONLINEAR POLYNOMIAL EQUATIONS BASED ON THE SMALLEST ITERATIONS AND ERRORS

by

EDWIN SAPUTRA

Polynomial equations are mathematical expression involving a sum of powers in one or more variables multiplied by coefficients. System of nonlinear polynomial equations are collection of some nonlinear equations. The Newton-Raphson and Jacobian are used for solving system of nonlinear polynomial equations. In this case, Jacobian method converted from nonlinear equation to linear equation. this study aims to compare which method is better in finding a solution for system of nonlinear polynomial equations based on the smallest Iterations and Errors. In this study there are three cases of system of nonlinear polynomial equations that will be used to compare Newton-Raphson method and Jacobian method. From the three cases, Newton-Raphson method is better in solving the solution for system of nonlinear polynomial equations with an average up to 6 iterations and have errors 0.00000032, compared to Jacobian method with an average up to 39 iterations dan have errors 0.000000008293.

Key Words : Polynomial Equations, System of Nonlinear Polynomial Equations, Newton-Raphson Method, Jacobian Method.

PERBANDINGAN METODE NEWTON-RAPHSON DAN METODE JACOBIAN UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL NONLINEAR BERDASARKAN JUMLAH ITERASI DAN GALAT TERKECIL

Oleh

EDWIN SAPUTRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi	:	**PERBANDINGAN METODE NEWTON-RAPHSON DAN METODE JACOBIAN UNTUK SOLUSI SISTEM PERSAMAAN POLINOMIAL NONLINEAR BERDASARKAN JUMLAH ITERASI DAN GALAT TERKECIL**
Nama Mahasiswa	:	*Edwin Saputra*
No. Pokok Mahasiswa	:	1517031065
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dorrah

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.
NIP 19610128 198802 1 001

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dra. Dorrah Azis, M.Si.**	....
Sekretaris	: **Subian Saidi, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Amanto, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **23 Mei 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Edwin Saputra**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1517031065**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Perbandingan Metode Newton-Raphson Dan Metode Jacobian Untuk Sistem Persamaan Polinomial Nonlinear Berdasarkan Jumlah Iterasi dan Galat Terkecil**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Dan Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar lampung, 23 Mei 2019

Yang Menyatakan,

Edwin Saputra

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Edwin Saputra, anak ketiga dari empat bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 03 September 1997 oleh pasangan Bapak Yantoni Hidayat dan Ibu Fauziah.

Menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Aisyah pada tahun 2002-2003, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD N 2 Rajabasa pada tahun 2003-2009, kemudian bersekolah di SMP N 22 Bandar Lampung pada tahun 2009-2012, dan bersekolah di SMA N 1 Natar pada tahun 2012-2015. Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis ikut serta dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila.

Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Pendidikan dan Kebudayaan Provinsi Lampung dan pada tahun yang sama penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Setia Agung Kecamatan Gunung Terang, Kabupaten Tulang Bawang Barat, Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

"Ingatlah, Sesungguhnya Kepunyaan Allah Apa yang Ada di Langit dan di Bumi."

(Q.S Yunus: 55)

"Karena Sesungguhnya Sesudah Kesulitan itu ada Kemudahan, Sesungguhnya Sesudah Kesulitan itu ada Kemudahan."

(Q.S Al-Insyirah: 5-6)

"Allah tidak Membebani Seseorang Melainkan Sesuai dengan Kesanggupannya."

(Q.S Al-Baqarah: 286)

"Dibalik Usaha yang Keras ada Hasil yang Positif."

(Edwin Saputra)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kita haturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena atas berkah dan nikmat-Nya kepada kita, Shalawat serta salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya yang sangat sederhana ini untuk:

Ayah dan Ibu

Tidak ada kata yang dapat aku sampaikan untuk kalian kecuali terimakasih yang sebesar-besarnya atas semua yang telah kalian berikan untukku. Cinta, kasih sayang, waktu, pengorbanan, dan keringat yang belum bisa aku balas. Terimakasih karena selalu mendoakan dan mendukung setiap langkah yang aku pilih. Karena ridho Allah berawal dari ridho kalian.

Kakak dan adikku

Terimakasih telah mengajarkan banyak hal, terutama arti kebahagiaan. Doakan agar bisa menjadi sosok lelaki yang lebih baik lagi.

Sahabat-sahabatku.

SANWACANA

Puji syukur kepada Allah Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan kasih karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Perbandingan Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian Untuk Solusi Sistem Persamaan Polinomial Nonlinear Berdasarkan Jumlah Iterasi Dan Galat Terkecil". Skripsi ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Proses penulisan skripsi ini tidak akan berjalan lancar jika tanpa ada pihak yang membantu. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I dan Pembimbing Akademik, terima kasih untuk bimbingan dan kesedian waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.

4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Drs. Suratman Umar, M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Kedua Orang Tua tercinta, yang selalu mendoakan, memberikan dukungan dan semangat serta membantu dalam bentuk moril maupun materil.
8. Yuk Endah, Bang Edo, Meli dan keluarga besarku yang selalu menyemangati, menemani dan memberi motivasi kepada penulis.
9. Hilda Venelia yang selalu bersedia membantu dan memotivasi agar tetap konsisten.
10. Para sahabat terbaik, Doni, Aul, Amar, Atuy, Randy, Natan, Lut, Topan, Ario, Fadil, ,Rizkur, Nurah, Thalia, Rani, Anggun, Tirai, Diana, Desun, Reza, Ocha, Ayu, dan Amira terima kasih atas bantuan, dukungan dan motivasinya.
11. Rekan-rekan Pimpinan HIMATIKA 2017 dan rekan-rekan pengurus Minat dan Bakat 2016 dan Minat dan Bakat 2017.
12. Teman-teman KKN Periode II Tahun 2018 Desa Setia Agung, Nanda, Pandu, Nurmala, Rahma, Zakia dan Zealin.
13. Teman-teman angkatan 2015 jurusan matematika.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Akhir kata, semoga Laporan Skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi kita semua. Apabila terdapat kekeliruan dalam penulisan Laporan Skripsi ini penulis sangat mengharapkan kritik dan sarannya.

Bandar Lampung, 23 Mei 2019
Penulis

Edwin Saputra

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Pada kenyataannya matematika sebagai ilmu eksakta yang sangat erat dengan rumus dan perhitungan yang dapat dijadikan sebagai alat bantu untuk menyederhanakan penyajian pembahasan masalah. Dengan menggunakan bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis dan diselesaikan. Akan tetapi tidak semua permasalahan matematis atau perhitungan dapat diselesaikan dengan mudah. Bahkan dalam prinsip matematik, dalam memandang permasalahan terlebih dahulu diperhatikan apakah permasalahan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak. Hal ini menjelaskan bahwa tidak semua permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan biasa. Jika suatu permasalahan dalam matematika itu sulit diselesaikan dengan metode analitik, maka metode numerik yang dapat digunakan disini.

Permasalahan nonlinear merupakan kumpulan dari beberapa persamaan tak linear dengan fungsi tujuannya saja atau bersama dengan fungsi kendala berbentuk nonlinier, yaitu pangkat dari variabelnya lebih dari satu. Ada beberapa fungsi tujuan dalam persamaan taklinier yang tidak bisa diselesaikan secara analitik, tetapi dapat diselesaikan dengan metode-metode untuk menyelesaikan permasalahan persamaan taklinier terdapat banyak metode dan algoritma yang bisa digunakan, tetapi setiap metode dan algoritma yang ada mempunyai kelebihan dan kekurangan masing-masing. Salah satunya metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan dimana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan. Ada banyak metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan linear maupun sistem persamaan taklinear diantaranya metode Newton-Raphson dan metode Jacobian.

Metode Newton-Raphson adalah metode untuk mencari hampiran atau pendekatan terhadap akar fungsi real. Metode Newton-Raphson sering konvergen dengan cepat, terutama bila iterasi dimulai cukup dekat dengan akar yang diinginkan.

Metode Jacobian merupakan salah satu metode tak langsung, yaitu bermula dari suatu hampiran penyelesaian awal dan kemudian berusaha memperbaiki hampiran dalam tak berhingga namun langkah konvergen. Metode Iterasi Jacobi ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar.

Dalam penelitian ini, penulis akan memfokuskan mengenai Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian untuk solusi sistem persamaan polinomial taklinear dengan menggunakan tiga contoh kasus.

1.2 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas bagaimana membandingan persamaan polinomial nonlinear dengan metode Newton-Raphson dan metode Jacobian berdasarkan jumlah iterasi dan galat terkecil.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membandingkan antara metode Newton-Raphson dan metode Jacobian mana yang lebih efektif dan efisien jika digunakan dalam mencari solusi sistem persamaan polinomial taklinear dengan melihat galat dan jumlah iterasi terkecil dari kedua metode tersebut.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan penulis tentang Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian untuk solusi sistem persamaan polinomial taklinear.
2. Memberikan masukkan bagi para peneliti yang ingin mengkaji tentang perhitungan matematika pada solusi sistem persamaan poliomial taklinear dengan metode Newton-Raphson dan Jacobian.
3. Mengetahui metode yang lebih akurat mendekati konvergen dengan melihat jumlah iterasi dan galat terkecilnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan

Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan (=). Persamaan dapat digunakan untuk menyatakan kesamaan dua ekspresi yang terdiri dari satu atau lebih peubah. Sebagai contoh, untuk *x* anggota bilangan nyata, persamaan berikut selalu benar:

$$x(x - 1) = x^2 - \mathrm{x}$$

Persamaan di atas adalah contoh dari identitas: persamaan yang selalu benar, tak peduli berapa pun nilai peubah yang ada di dalamnya. Persamaan berikut bukanlah suatu identitas:

$$x^2 - x = 0$$

Persamaan di atas adalah salah untuk sejumlah tak hingga *x*, dan hanya benar untuk satu nilai. Karenanya, jika suatu persamaan diketahui bernilai benar, persamaan tersebut membawa informasi mengenai nilai *x*. Secara umum, nilai peubah di mana suatu persamaan menjadi benar disebut dengan solusi atau penyelesaian. Banyak pengarang yang menggunakan istilah persamaan untuk kesamaan yang bukan identitas. Sebagai contoh,

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

adalah identitas, sedangkan

$$(x + 1)^2 = 2x^2 + x + 1$$

adalah persamaan yang memiliki akar $x = 0$ dan $x = 1$. Apakah suatu pernyataan dimaksudkan sebagai suatu identitas atau suatu persamaan, menentukan informasi mengenai peubahnya sering dapat ditentukan berdasarkan konteksnya.

Huruf-huruf awal alfabet seperti $a, b, c, \ldots$ sering kali digunakan sebagai konstanta, dan huruf-huruf di akhir alfabet, seperti $x, y, z,$ umumnya digunakan sebagai lambang peubah (Sinaga, 2013).

2.1.1 Persamaan Linear

Persamaan linier adalah suatu persamaan dengan pangkat tertinggi dari variabel dalam persamaan tersebut adalah satu (Ayres dan Schmidt, 2004).

Suatu persamaan linier dalam n peubah (variabel) adalah persamaan dengan bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan real dan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah peubah (Leon, 2001).

2.1.2 Persamaan Non linear

Persamaan non linear adalah suatu kalimat matematika terbuka yang peubah berderajat tidak sama dengan satu atau mengandung nilai fungsi non linear, seperti log, sin dan lain sebagainya.

2.2 Matriks

Matriks adalah suatu kumpulan angkat-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut basis dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris (Supranto, 2003).

Sebuah matriks dinotasikan dengan simbol huruf besar seperti $A_1, A_2, \dots, A_n$ atau $A, B, \dots, X, Y, Z$ dan sebagainya. Sebuah matriks A yang berukuran m baris dan n kolom dapat ditulis sebagai berikut :

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

atau juga dapat ditulis :

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Matriks A disebut matriks m x n, karena terdiri dari m baris dan n kolom. Setiap a_{ij} disebut elemen (unsur) dari matriks A, sedangkan indeks i dan j berturut-turut menyatakan baris dan kolom. Jadi elemen a_{ij} terdapat pada baris ke-i dan kolom ke-j. Pasangan bilangan (m,n) disebut dimensi (ukuran atau bentuk) dari matriks A.

Contoh :

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

disebut matriks A dengan 2 baris dan 3 kolom. Jika A sebuah matriks, maka digunakan a_{ij} untuk menyatakan elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A. Dalam contoh ini i = 1, 2; dan j = 1, 2, 3 atau dapat ditulis

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$

2.2.1 Matriks Kuadrat Berorde n

Suatu matriks A dengan jumlah baris *n* dan jumlah kolom *n* disebut matriks bujursangkar ordo n (*square matrix of order n*) dan entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ pada contoh yang merupakan diagonal utama (main diagonal) matriks A (Anton dan Rorres, 2004).

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

2.2.2 Matriks Identitas

Jika R adalah bentuk eselon baris tereduksi dari matriks A, nxn, maka terdapat dua kemungkinan, yaitu R memiliki satu baris bilangan nol atau R merupakan matriks identitas I_n (Anton dan Rorres, 2004).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Matriks Bujursangkar

Matriks bujursangkar adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama. Matriks bujursangkar nxn dikatakan berordo n dan terkadang disebut matriks-n (Anton dan Rorres, 2004).

Contoh :

Matriks bujursangkar berukuran 3 x 3 atau sering juga disebut matriks bujursangkar orde 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2.4 Matriks Diagonal

Suatu matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal (Anton dan Rorres, 2004).

Berikut contohnya.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks diagonal umum D, nxn, dapat ditulis sebagai

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

2.3 Sistem Persamaan

2.3.1 Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari beberapa variabel. Persamaan linear adalah sebuah persamaan aljabar yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal satu. Sistem persamaan linear memiliki bentuk umum :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \tag{2.1}$$

Kuantitas-kuantitas a_{ij} (untuk $i, j = 1, 2, ..., n$) disebut koefisien. Nilai koefisien-koefisien a_{ij} dan ruas kanan b_i pada setiap persamaan diketahui. Kuantitas- kuantitas x_{ij} disebut variabel, yang nilainya belum diketahui dan hendak dicari. Sistem persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai :

$$Ax = b$$

Dengan A adalah sebuah matriks m x n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Lalu x dan b adalah vektor-vektor komponen :

x = $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ b = $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$

Dengan pangkat T menyatakan operasi *transpose* matriks, yakni mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Matriks A disebut matriks koefisien, vektor kolom B sering disebut vektor konstanta (Sahid, 2005).

2.3.1.1 Sistem Persamaan Linear Homogen

Sistem persamaan linear homogen adalah sistem persamaan linear yang semua suku konstannya nol, sehingga bentuk umum sistem persamaan linear homogen ini sebagai berikut :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix} \tag{2.3}$$

Sistem persamaan linear di atas sering disingkat tanpa memasukkan kolom suku konstan, yaitu :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Sistem persamaan linear homogen selalu konsisten dan mempunyai dua kemungkinan penyelesaian, yaitu:

1. Solusi Trivial

   Untuk $m > n$ dikatakan memiliki solusi trivial jika $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Sedangkan untuk $m = n$ dikatakan memiliki solusi trivial jika $\det(A) \neq 0$.

   Contoh:

   Diberikan sistem persamaan linear homogen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

   Dapat dinyatakan dalam matriks teraugmentasi sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

   Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{B2-B1, B3-2.B1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \text{B3+3.B2}$$

   Det = 1 x 1 x 3 = 3

Karena det ≠ 0, SPL homogen tersebut trivial yaitu $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

2. Solusi Non Trivial

   Untuk $m = n$ dikatakan memiliki solusi non trivial jika $\det(A) = 0$ dan jika $m < n$ memiliki solusi non trivial.

   Contoh:

   Diberikan sistem persamaan linear homogen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

   Dapat dinyatakan dalam matriks teraugmentasi sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

   Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \text{B2-B1, B3-2.B1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{B3+3.B2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{B1-2.B2}$$

   Det = 1 x 1 x 0 = 0. Maka, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$

2.3.1.2 Sistem Persamaan Linear Non Homogen

Sebuah sistem persamaan linear dapat dikatakan non homogen apabila mempunyai bentuk :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah bilangan-bilangan yang tidak diketahui dan a, b menyatakan konstanta-konstanta.

Dan apabila sistem persamaan linear tersebut dinyatakan dengan perkalian matriks $AX = B$, maka dapat dinyatakan dengan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

sehingga diperoleh matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Karena $B \neq 0$ maka sistem persamaan linear tersebut disebut dengan sistem persamaan linear non homogen. Persamaan linear akan mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu:

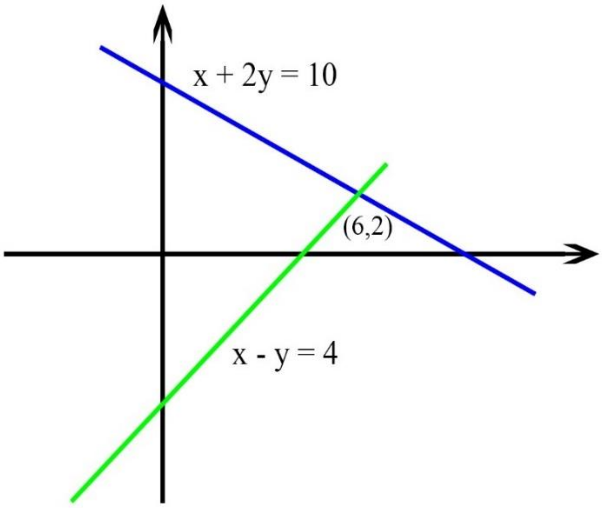
1. Solusi unik/tunggal

   Contoh :

   x + 2y = 10

   x – y = 4

   dalam bentuk grafik solusinya adalah



   Gambar 1. Grafik Sistem Persamaan Linear Non Homogen Solusi tunggal.

   Sistem persamaan linear memiliki solusi tunggal, x = 6, y = 2.

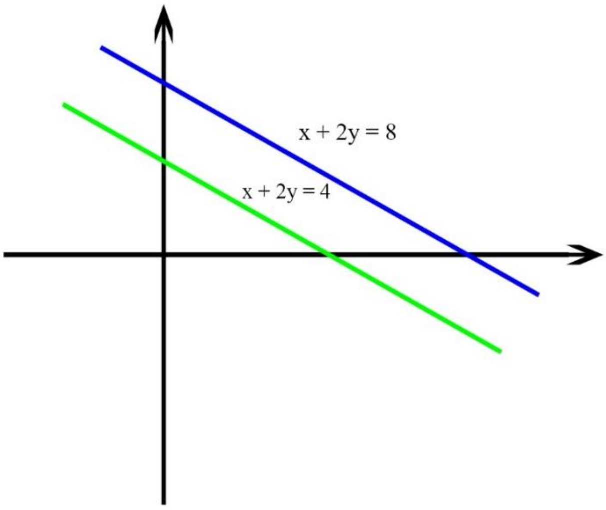
2. Tidak mempunyai solusi

   Contoh :

   x + 2y = 8

   x + 2y = 4

Dalam bentuk grafik adalah



Gambar 2. Grafik Sistem Persamaan Linear Non Homogen Tidak Memilik Solusi.

Sistem persamaan linear tidak konsisten, tidak memiliki solusi.

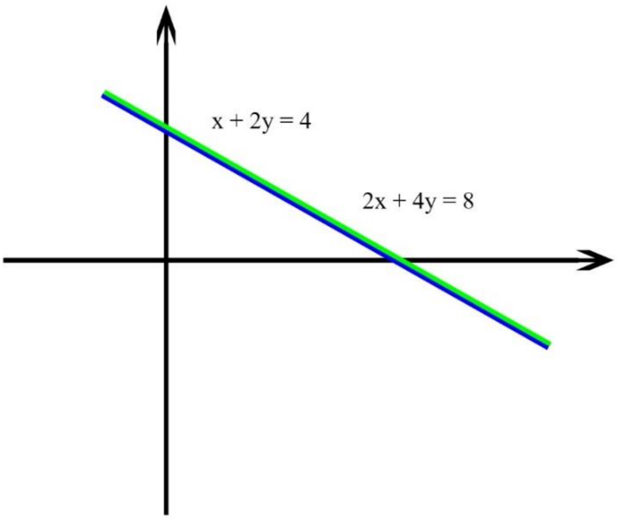
3. Solusi lebih dari satu

Contoh:

x + 2y = 4

2x + 4y = 8

Dalam bentuk grafik adalah



Gambar 3. Grafik Sistem Persamaan Linear Non Homogen Solusi Lebih dari Satu.

Sistem persamaan linear memiliki solusi lebih dari satu.

2.3.2 Sistem Persamaan Non Linear

Sistem persamaan non linear ialah kumpulan dari persamaan-persamaan non linear yang saling berhubungan untuk mencapai tujuan tertentu (Munir, 2006).

Bentuk persamaannya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\, x_2, \dots,\, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1,\, x_2, \dots,\, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1,\, x_2, \dots,\, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan hasil penyelesaiannya adalah $x = (x_1,\, x_2, \dots,\, x_n)^T$.

Pada umumnya penyelesaian sistem persamaan non linear sulit untuk diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, penyelesaian sistem persamaan non linear didekati dengan hampiran numerik. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan menggunakan operasi hitungan (*arithmatic*) yaitu operasi tambah, kurang, kali, dan bagi. Solusi yang dihasilkan dengan menggunakan metode numerik berupa hampiran. Hampiran, pendekatan, atau aproksimasi (*approximation*) didefinisikan sebagai nilai yang mendekati solusi sebenarnya atau sejati.

Contoh :

$4x^2 + 3y^3 - 4 = 0$ (1)

$8x^2 + y^3 - 3 = 0$ (2)

Eliminasi persamaan (1) dan (2)

$4x^2 + 3y^3 - 4 = 0$ | x1 |

$\underline{8x^2 + y^3 - 3 = 0}$ | x3 |

$4x^2 + 3y^3 - 4 = 0$

$\underline{24x^2 + 3y^3 - 9 = 0}$ –

$-20x^2 + 5 = 0$

$-20x^2 = -5$

$x^2 = 0.25$

$x = \pm 0.5$

Substitusi x ke persamaan (1)

$4x^2 + 3y^3 - 4 = 0$

$4(0.5)^2 + 3y^3 - 4 = 0$

$1 + 3y^3 - 4 = 0$

$3y^3 = 3$

$y^3 = 1$

$y = 1$

Jadi solusi sistem persamaan non linear di atas adalah $x = 0.5$ dan $y = 1$.

2.4 Metode Iterasi Jacobi

Metode iterasi Jacobi merupakan salah satu bidang analisis numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan linear dan sering dijumpai dalam berbagai disiplin ilmu. Akan tetapi, apabila dalam menyelesaikan permasalannya ditemukan persamaan non linear maka persamaan tersebut dapat dikonversi ke persamaan linear dengan cara langsung (permisalan variabel non linear). Metode iterasi Jacobi merupakan salah satu metode tak langsung, yang bermula dari suatu hampiran penyelesaian awal dan kemudian berusaha memperbaiki hampiran dalam tak berhingga namun langkah konvergen. Metode ini ditemukan oleh matematikawan yang berasal dari Jerman, Carl Gustav Jakob Jacobi. Penemuan ini diperkirakan pada tahun 1800-an.

Misalkan diberikan suatu sistem persamaan linear :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

dan diberikan nilai awal $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Maka persamaan yang dapat dibentuk dengan metode Jacobi adalah:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(k)})}{a_{nn}}$$

dengan $k = 0, 1, 2, ...$

atau dapat disingkat dengan:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - a_{ii}x_i}{a_{ii}} \tag{2.7}$$

Iterasi dapat diartikan sebagai suatu proses atau metode yang digunakan secara berulang-ulang (pengulangan) dalam menyelesaikan suatu permasalahan matematika. Jika diubah dari persamaan linier, menjadi :

$$Ax = b$$

Kemudian diketahui bahwa A = D+(L+U), dimana D merupakan matriks diagonal, L merupakan matriks segitiga bawah, dan U merupakan matriks segitiga atas. Lalu persamaan tersebut diubah menjadi

$$Dx + (L + U)x = b$$

$$x = D^{-1}[b - (L + U)x]$$

Jika ditulis dalam aturan iteratif, maka metode iterasi Jacobi dapat ditulis sebagai berikut :

$$x^{(k)} = D^{-1}[b - (L + U)x^{(k-1)}] \tag{2.8}$$

Adapun algoritma untuk metode Jacobi, yaitu sebagai berikut.

1. Input matriks koefisien **A** dan vektor konstanta **B**.
2. Tentukan toleransi *error* (e) dan iterasi maksimum (n).
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0.
4. Bentuk matriks $P = D^{-1}(D - A)$ dengan $p_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, untuk $i \neq j$.
5. Bentuk matriks $Q = D^{-1}\boldsymbol{b}$ dengan $Q_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$.
6. Ketika iterasi $<$ n dan galat $>$ toleransi
   a. Hitung $x = Q - P * x_0$.
   b. Perbarui x_0 dan iterasi.
   c. Hitung $galat = |v - v'|/n$.
7. Akar persamaan adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.

Kelebihan metode Jacobian adalah dapat menyelesaikan persamaan linear berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar.

Contoh:

Diberikan sistem persamaan non linear sebagai berikut

$$4x^2 + 3y^3 - 4 = 0$$
$$8x^2 + y^3 - 3 = 0$$

dengan menggunakan metode eliminasi dan substitusi, diperoleh solusi persamaan non linear di atas $x = 0{,}5$ dan $y = 1$. Apabila menggunakan metode Jacobi, hal pertama yang harus dilakukan adalah mengonversi persamaan non linear di atas menjadi persamaan linear dengan memisalkan $x^2 = a_1$ dan $y^3 = a_2$ sehingga diperoleh

$$a_1 = \frac{4 - 3a_2}{4}$$

$$a_2 = 3 - 8a_1$$

dengan nilai awal $a_1 = a_2 = 0$.

Iterasi 1

$$a_1 = \frac{4 - 3(0)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$a_2 = 3 - 8(0) = 3$$

Iterasi 2

$$a_1 = \frac{4 - 3(3)}{4} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

$$a_2 = 3 - 8(1) = -5$$

Iterasi 3

$$a_1 = \frac{4 - 3(-5)}{4} = \frac{19}{4} = 4.75$$

$$a_2 = 3 - 8(-1.25) = 13$$

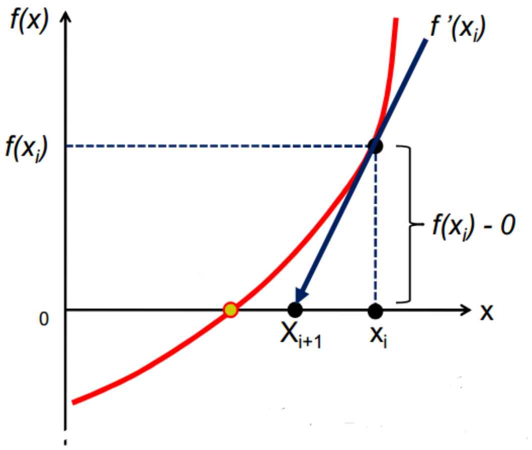
Iterasi berikutnya dilakukan dengan cara yang sama seperti di atas sampai galat $<$ toleransi. Dimana galat $= |v - v'|/n$, v merupakan nilai eksak dari solusi persamaan non linear di atas dan v' merupakan solusi persamaan non linear yang diperoleh dari metode Jacobi.

2.5 Metode Newton-Raphson

Dalam analisis numerik, metode Newton (juga dikenal dengan metode Newton-Raphson), merupakan suatu metode yang cukup dikenal untuk mencari pendekatan terhadap akar fungsi riil. Metode Newton-Raphson sering konvergen dengan cepat, terutama bila iterasi dimulai cukup dekat dengan akar yang diinginkan. Namun bila iterasi dimulai jauh dari akar yang dicari, metode ini dapat meleset tanpa peringatan. Implementasi metode ini biasanya mendeteksi dan mengatasi kegagalan konvergensi.

2.5.1 Gagasan Awal Metode Newton-Raphson

Gagasan awal metode Newton-Raphson adalah metode yang digunakan untuk mencari akar dari sebuah fungsi riil. Metode ini dimulai dengan memperkirakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperlihatkan *slope* atau gradien pada titik tersebut. Diharapkan dari titik awal tersebut akan diperoleh pendekatan terhadap akar fungsi yang dimaksud.



Gambar 4. Grafik Metode Newton-Raphson.

Telah diketahui bahwa gradien garis singgung kurva adalah turunan pertama dari kurva tersebut, yaitu $f'(x_i)$. Sehingga persamaan garis singgungnya :

$$f(x_i) - y = f'(x_i)(x_i - x)$$

Garis ini melalui titik $(x_{i+1}, 0)$, maka didapat:

$$f(x_i) - 0 = f'(x_i)(x_i - x_{i+1})$$

$$\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = (x_i - x_{i+1})$$

$$x_{i+1} = x_i - \left[J_f(x_i)\right]^{-1} f(x_i) \qquad (2.9)$$

dimana $i \geq 0$.

x_{i+1} digunakan untuk menaksir nilai akar dari $f(x)$ dan pendekatan yang lebih baik untuk akar dari $f(x)$. Metode ini banyak digunakan untuk akar dari suatu persamaan.

Adapun algoritma untuk metode Newton-Raphson, yaitu sebagai berikut.

1. Definisikan fungsi $f(x)$ dan J_f.
2. Tentukan toleransi *error* (e) dan iterasi maksimum (n).
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0.
4. Ketika iterasi $<$ n dan galat $>$ toleransi
   d. Hitung $x_{i+1} = x_i - \left[J_f(x_i)\right]^{-1} f(x_i)$.
   e. Perbarui x_0 dan iterasi.
   f. Hitung $galat = |v - v'|/n$
5. Akar persamaan adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.

2.5.2 Kelebihan dan Kekurangan Metode Newton-Raphson

1. Kelebihan

   Jika pemilihan titik awal tepat, maka proses iterasinya cepat.

2. Kekurangan

   a. Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar (titik) penyelesaian, akar-akar penyelesaian tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau secara bersamaan.

   b. Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner).

   c. Tidak dapat mencari akar persamaan jika syarat awalnya tidak tepat, meskipun ada akar penyelesaiannya.

   d. Untuk persamaan non linear yang cukup kompleks, pencarian turunan pertama dan kedua dari $f(x)$ akan menjadi cukup sulit.

Contoh:

Diberikan sistem persamaan non linear sebagai berikut

$$4x^2 + 3y^3 - 4 = 0$$

$$8x^2 + y^3 - 3 = 0$$

Solusi persamaan di atas memiliki penyelesaian $x = 0{,}5$ dan $y = 1$. Apabila penyelesaian sistem persamaan non linear di atas menggunakan metode Newton Raphson dengan nilai awal $x_0 = y_0 = 1$ maka diperoleh

$$[J_f(x_i)] = \begin{bmatrix} 8x & 9y^2 \\ 16x & 3y^2 \end{bmatrix}$$

sehingga untuk $i = 0$

$$x_1 = x_0 - [J_f(x_0)]^{-1} f(x_0)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 16 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}025 & 0{,}075 \\ 1{,}333 & -0{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}375 \\ -0{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}625 \\ 1{,}1 \end{bmatrix}$$

Untuk $i = 1$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0{,}625 \\ 1{,}1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10{,}89 \\ 10 & 3{,}63 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1{,}555 \\ 1{,}456 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}625 \\ 1{,}1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}04 & 0{,}12 \\ 0{,}111 & -0{,}055 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}555 \\ 1{,}456 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}625 \\ 1{,}1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}113 \\ 0{,}093 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}512 \\ 1{,}007 \end{bmatrix}$$

Untuk $i = 2$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0{,}512 \\ 1{,}007 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4{,}096 & 9{,}126 \\ 8{,}192 & 3{,}042 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0{,}112 \\ 0{,}118 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}512 \\ 1{,}007 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}049 & 0{,}146 \\ 0{,}132 & -0{,}066 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}112 \\ 0{,}118 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}512 \\ 1{,}007 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}012 \\ 0{,}007 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena galat $= 0$ maka iterasi berhenti dan solusi yang memenuhi sistem persamaan non linear di atas adalah $x = 0{,}5$ dan $y = 1$.

2.6 Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) dari penyelesaian analitis. Berarti dalam penyelesaian numerik terdapat beberapa kesalahan terhadap nilai eksak.

Kesalahan (*error*/galat) adalah bersarnya perbedaan atau selisih antara nilai taksiran (hampiran/aproksimasi) dengan nilai sesungguhnya (eksak), kesalahan ini bias timbul karena proses pengukuran atau penggunaan aproksimasi.

Besarnya kesalahan atas suatu nilai taksiran dapat dinyatakan secara kuantitatif dan kualitatif. Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kuantitatif disebut kesalahan absolut. Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kualitatif disebut dengan kesalahan relatif. Nilai eksak dapat diformulasikan sebagai hubungan antara nilai perkiraan dan nilai kesalahan sebagai berikut :

$$V = V' + \varepsilon$$

dimana :

V : nilai eksak

V' : nilai perkiraan

ε : kesalahan.

Kesalahan absolut menunjukkan besarnya perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan :

$$\varepsilon_\alpha = |V - V'|$$

Kesalahan absolut tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan, tetapi hanya sekedar menunjukkan selisih perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan.

Kesalahan relatif menunjukkan besarnya tingkat kesalahan antara nilai perkiraan dengan nilai eksaknya yan dihitung dengan membandingkan kesalahan absolut terhadap nilai eksaknya (biasanya dinyatakan dalam %) :

$$\varepsilon_r = \left| \frac{\varepsilon_\alpha}{V} \right| \text{ x } 100\%$$

dimana

V : nilai eksak

ε_r : kesalahan relatif

ε_α : kesalahan absolut.

Semakin kecil kesalahan relatifnya, maka nilai perkiraan yang diperoleh akan semakin baik (Triatmodjo, 2002).

Contoh:

Pengukuran panjang jembatan dan pensil memberikan hasil 9999 cm dan 9 cm. Apabila panjang yang benar (eksak) adalah 10.000 cm dan 10 cm. Hitung kesalahan absolut dan relatif!

a. Kesalahan absolut

Jembatan : $\varepsilon_\alpha = |V - V'| = |10.000 - 9999| = 1$ cm

Pensil : ε_{α} = |V – V'| = |10 – 9| = 1 cm

b. Kesalahan relatif

Jembatan : $\varepsilon_r = \left| \frac{\varepsilon_\alpha}{V} \right|$ x 100% = $\left| \frac{1}{10000} \right|$ x 100% = 0,01%

Pensil : $\varepsilon_r = \left| \frac{\varepsilon_\alpha}{V} \right|$ x 100% = $\left| \frac{1}{10} \right|$ x 100% = 10%

Kedua kesalahan sama yaitu 1 cm tetapi kesalahan relatif dari pensil jauh lebih besar dibandingkan kesalahan relatif dari jembatan.

2.7 Persamaan Polinomial

Dalam matematika, polinomial adalah pernyataan matematika yang melibatkan jumlahan perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien. Sebuah polinomial dalam satu variabel dengan koefisien konstan memiliki bentuk seperti berikut :

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^n + a_1 x + a_n$$

Pangkat tertinggi pada suatu polinomial menunjukkan orde atau derajat dari polinomial tersebut.

Contoh :

a. $4x^3 - 5x^2 + 2x + 3$, ini disebut suku banyak dalam x berderajat 3 dengan.

Koefisien x^3 adalah 4

Koefisien x^2 adalah -5

Koefisien x adalah 2

Suku tetapnya adalah 3

b. $3x^5 + 2x^4 - 2x^2 + 4$, ini disebut suku banyak dalam x berderajat 3 dengan.

Koefisien x^5 adalah 3

Koefisien x^4 adalah 2

Koefisien x^2 adalah -2

Suku tetapnya adalah 4

Perlu diperhatikan bahwa peubah (variabel) dari suku banyak tidak tunggal tetapi terdiri atas beberapa peubah.

Contoh :

a. $x^3 + x^2y^4 - 3x + 2xy + y^2 + 4$, merupakan suku banyak dalam dua peubah (peubah x dan y). Suku banyak ini berderajat 3 dalam x dan berderajat 4 dalam y.

b. $a^3 + b^3 + c^3 - 2ab + ac - bc + 1$, merupakan suku banyak dalam 3 peubah (peubah a, b, dan c). suku banyak ini berderajat 3 pada setiap peubah.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun pelajaran 2018/2019 di Gedung jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan melakukan penelitian secara studi pustaka.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara studi pustaka yaitu mempelajari buku-buku teks yang terdapat di ruang baca jurusan matematika atau perpustakaan Universitas Lampung dan juga jurnal yang menunjang proses penelitian.

Langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Mempelajari definisi dan teorema yang menjadi landasan pada penelitian ini.
2. Menentukan kasus untuk memulai membandingkan metode.
3. Mencari nilai eksak dari kasus yang telah ditentukan.
4. Membuat skrip berdasarkan definisi dan teorema yang telah ditentukan.
5. Membandingkan iterasi dan galat dari metode Newton-Raphson dan Jacobian.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, metode yang baik digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan polinomial nonlinear

Kasus 1.

$$\begin{aligned} 8a^3 - 2b^6 + 3c^4 + 7d^5 - 10 &= 0 \\ 7a^3 + 11b^6 - c^4 + 3d^5 - 25 &= 0 \\ 6a^3 + 4b^6 + 7c^4 - 4d^5 - 12 &= 0 \\ 3b^6 - c^4 + 8d^5 - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Kasus 2.

$$4a^4 + 2b^3 - 2c^6 - 20 = 0$$
$$12a^4 + 24b^3 - 4c^6 - 100 = 0$$
$$2a^4 - 10b^3 + 12c^6 - 8 = 0$$

Kasus 3.

$$5a^7 - 0{,}5b^3 + c^5 - 3d^2 - 6 = 0$$
$$-a^7 + 11b^3 - c^5 + 3d^2 - 12 = 0$$
$$4a^7 - 2b^3 + 20c^5 - 2d^2 - 22 = 0$$
$$3a^7 - 2b^3 + c^5 + 7d^2 - 13 = 0$$

Tabel 10. Hasil Iterasi dan Galat pada kasus 1-3 dengan Metode Newton-Raphson dan Jacobian

	Newton-Raphson		Jacobian	
	Iterasi	Galat	Iterasi	Galat
Kasus 1	6	0.000000001	40	0.000000962
Kasus 2	6	0.000000031	52	0.000000813
Kasus 3	6	0.000000064	25	0.000000713

Berdasarkan tabel 10 Metode Newton-Raphson memiliki rata-rata 6 iterasi, dengan rata-rata galatnya 0.000000032. Sedangkan metode Jacobian memiliki rata-rata 39 iterasi, dengan rata-rata galatnya 0.0000008293. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode Newton-Raphson lebih baik dalam menyelesaikan solusi sistem persamaan polinomial nonlinear dibandingkan dengan metode Jacobian.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Ed. ke-5. Terjemahan Pantur Silaban. Erlangga, Jakarta.

Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Ed. ke-8. Erlangga, Jakarta.

Ayres, F. dan Schmidt, P.A. 2004. *Matematika Universitas*. Ed. ke-3. Erlangga, Jakarta.

Leon, S.J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Ed. ke-5. Erlangga, Jakarta.

Munir, R. 2006. *Metode Numerik*. Informatika Bandung, Bandung.

Sahid. 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB.* Andi, Yogyakarta.

Sinaga, G. Persamaan. https://gilbertsinaga.wordpress.com/2013/09/26/8/.html. 26 januari 2017.

Supranto, J. 2003. *Pengantar Matriks*. Rineka Cipta, Jakarta.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik.* Beta Offset, Yogyakarta.