METODE PENDUGA *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* DAN *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* PADA PENDUGAAN AREA KECIL

(Skripsi)

Oleh
Dhenty Dwi Oktafiani

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

THE METHOD OF THE EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION AND SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION IN SMALL AREA ESTIMATION

By

Dhenty Dwi Oktafiani

The National Social Economic Survey (SUSENAS) conducted by the Central Statistics Agency (BPS) aims to determine the level of welfare of the population in the economic field. The welfare of the population in the economic field can be measured by per capita expenditure. The lack of information in estimating per capita expenditure makes direct estimates unusable. This problem can be overcome by using a small area estimation by adding additional information about the number of births of the population which has a significant effect on per capita expenditure. The Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP) method is one of the small area estimation methods used in continuous data by substituting unknown variety components into BLUP estimators. EBLUP estimator by considering the spatial influence or location as the weighting is called Spatial EBLUP (SEBLUP). The method used to estimate the parameters in the EBLUP and SEBLUP estimators is Restricted Maximum Likelihood Estimation (REML) and Generalized Least Square (GLS). In this study the quality of estimators of EBLUP and SEBLUP can be evaluated with Mean Square Error (MSE). The results in the study indicate that the SEBLUP estimator produces a MSE value that is smaller than the EBLUP method in estimating per capita expenditure.

Keywords: *Small Area Estimation, Empirical Best Linear Unbiased Prediction, Restricted Maximum Likelihood Estimation, Generalized Least Square, Mean Square Error*.

ABSTRAK

METODE PENDUGA EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION DAN SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION PADA PENDUGAAN AREA KECIL

Oleh

Dhenty Dwi Oktafiani

Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) yang dilakukan oleh Badan Pusat Statistika (BPS) bertujuan untuk mengetahui tingkat kesejahteraan penduduk di bidang ekonomi. Kesejahteraan penduduk di bidang ekonomi dapat diukur dengan pengeluaran per kapita. Adanya keterbatasan informasi dalam menduga pengeluaran perkapita membuat pendugaan langsung tidak dapat digunakan. Masalah tersebut dapat diatasi dengan menggunakan pendugaan area kecil yaitu dengan menambahkan informasi tambahan mengenai jumlah kelahiran penduduk yang berpengaruh secara signifikan terhadap pengeluaran per kapita. Metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) merupakan salah satu metode pendugaan area kecil yang digunakan pada data kontinu dengan mensubstitusikan komponen ragam yang tidak diketahui ke dalam penduga BLUP. Penduga EBLUP dengan memperhatikan pengaruh spasial atau lokasi sebagai pembobotnya disebut dengan Spasial EBLUP (SEBLUP). Metode yang digunakan untuk menduga parameter pada penduga EBLUP dan SEBLUP adalah *Restricted Maximum Likelihood Estimation* (REML) dan *Generalized Least Square* (GLS). Pada penelitian ini kualitas dari penduga parameter EBLUP dan SEBLUP dapat dievaluasi dengan *Mean Square Error* (MSE). Hasil dalam penelitian menunjukkan bahwa penduga SEBLUP menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil dibandingkan metode EBLUP dalam menduga pengeluaran per kapita.

Kata kunci: Pendugaan Area Kecil, *Empirical Best Linear Unbiased Prediction, Restricted Maximum Likelihood Estimation, Generalized Least Square, Mean Square Error*.

METODE PENDUGA *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* DAN *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* PADA PENDUGAAN AREA KECIL

Oleh

Dhenty Dwi Oktafiani

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **METODE PENDUGA *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* DAN *SPATIAL EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* PADA PENDUGAAN AREA KECIL**

Nama Mahasiswa : **Dhenty Dwi Oktafiani**

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031187

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.	**Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.**
NIP 19800502 200501 2 003	NIP 19690305 199603 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji Utama : **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **1 Agustus 2019**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dhenty Dwi Oktafiani

NPM : 1517031187

Jurusan : Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Metode Penduga *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* Pada Pendugaan Area Kecil" adalah benar hasil karya saya sendiri. Dalam skripsi ini tidak terdapat keseluruhan atau sebagian tulisan orang lain yang saya akui seolah sebagai tulisan saya.

Bandar Lampung, 1 Agustus 2019

Penulis,

Dhenty Dwi Oktafiani

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Dhenty Dwi Oktafiani, dilahirkan di Bekasi pada tanggal 11 Oktober 1997, merupakan anak kedua dari empat bersaudara dari pasangan Bapak Sainudin dan Ibu Bertilia Usman. Penulis berasal dari Desa Marga Kencana RT 002/RW 001, Kecamatan Tuba Udik, Kabupaten Tuba Barat. Penulis mengawali pendidikan formal pada Taman Kanak-kanak Merak`Cikarang Selatan Kabupaten Bekasi yang diselesaikan pada tahun 2003. Pendidikan sekolah dasar di SDN 06 Sukaresmi Lippo Cikarang diselesaikan pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMPN 1 Cikarang Selatan yang diselesaikan pada tahun 2012 dan mengikuti ekstrakurikuler Palang Merah Remaja (PMR), serta pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA Al-Kautsar Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2015 dan mengikuti organisasi Rohani Islam (Rohis).

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswi Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Ujian Mandiri (UM). Penulis aktif dalam Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai Anggota Generasi Muda Matematika (GEMATIKA) pada tahun 2015, sebagai Wakil Sekretaris Umum periode 2016, sebagai Sekretaris Umum pada periode 2017, sebagai Dewan Pembina Organisasi

(DPO) HIMATIKA FMIPA Unila. dan sebagai Anggota Rohani Islam (ROIS) FMIPA Unila pada tahun 2016.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah menyelesaikan Kerja Praktik (KP) di Badan Pengelolah Pajak dan Retribusi Daerah (BPPRD) Kota Bandar Lampung dan Kuliah Kerja Nyata di Desa Pempen Kecamatan Gunung Pelindung, Lampung Timur pada tahun 2018.

MOTTO

Apa yang melewatkanku tidak akan pernah menjadi takdirku dan apa yang ditakdirkan untukku tidak akan pernah melewatkanku.

(Umar bin Khattab)

مَنْ جَدّ وَجَدًّ

Man Jadda Wajadda

Angin tidak berhembus untuk menggoyangkan pepohonan, melainkan menguji kekuatan akarnya

(Ali bin Abi Thalib)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirrahim

Dengan segala kerendahan hati mengucap syukur atas segala

karunia dan kasih sayang Allah SWT.

Kupersembahkan skripsi ini kepada:

Papa dan Mamaku tercinta, terimakasih atas ketulusan hati

untuk memberikan doa'a dan semangat

sehingga dapat menyelesaikan karya ini

Ridha Allah bersama kalian

Kakak dan adikku serta Sahabatku yang selalu

memberikan dukungan tiada henti

Almamater tercinta,

Universitas Lampung

SAN WACANA

Alhamdulillahirabbil'alamin segala puji dan syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat serta salam semoga selalu tercurah kepada junjungan alam Nabi Muhammad SAW, penuntun jalan bagi seluruh umat manusia. Skripsi yang berjudul ***"Metode Empirical Best Linear Unbiased Prediction dan Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction Pada Pendugaan Area Kecil"***. adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Universitas Lampung.

Selama penyusususunan skripsi ini penulis menyadari adanya keterbatasan kemampuan dan pengetahuan yang dimiliki. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Widiarti, S.Si., M,Si. selaku dosen Pembimbing I yang membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis.
2. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing II yang telah memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji terimakasih atas saran dan kritik yang diberikan untuk skripsi ini.

4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan.
5. Ibu Prof. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Dosen-dosen Jurusan Matematika FMIPA Unila, terimakasih atas semua ilmu yang bapak/ibu berikan kepada penulis selama mengikuti perkuliahan.
8. Kedua orang tua terimakasih selama ini kalian selalu memberikan semangat, dukungan dan doa tulus yang kalian panjatkan kepada Allah SWT. untuk penulis.
9. Kakak dan Adik atas dukungan selama ini, memberi semangat untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Sahabat-sahabat kuliah penulis, Wilda, Liza, Pipin, Ulfa, Anggun, dan Riza serta sahabat-sahabat SMA penulis yang selalu memberikan semangat disaat duka, terimakasih atas semua bantuan dan dukungan kalian.
11. Seluruh pihak yang telah memotivasi, membantu, dan mendoakan penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini memiliki ketidaksempurnaan. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, 1 Agustus 2019
Penulis,

Dhenty Dwi Oktafiani
NPM. 1517031187

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Istilah survei sering kali dijumpai pada bidang statistika, salah satunya yaitu survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) yang dilakukan oleh Badan Pusat Statistika (BPS) yang bertujuan untuk mengetahui tingkat kesejahteraan penduduk di bidang ekonomi. Menurut Badan Pusat Statistika (BPS), kesejahteraan penduduk dapat diukur dengan pengeluaran rumah tangga. Setiap rumah tangga yang menjadi sampel, mempunyai data total pengeluaran (makanan dan non makanan) sebulan (dalam rupiah), tetapi data total pengeluaran ini belum dapat secara langsung mengukur kesejahteraan karena harus dilihat terlebih dahulu berapa jumlah anggota rumah tangganya. Adanya informasi sampel yang terbatas mengenai jumlah anggota rumah tangga mengakibatkan pendugaan langsung tidak dapat digunakan.

Pendugaan langsung pada suatu area kecil dengan keterbatasan informasi pada sampel akan menghasilkan penduga tak bias namun memiliki ragam yang besar. Suatu area dikatakan kecil apabila sampel yang diambil pada area tersebut tidak mencukupi untuk melakukan pendugaan langsung dengan hasil yang akurat. Oleh sebab itu diperlukan metode yang dapat digunakan untuk mendapatkan hasil yang lebih baik dalam menduga parameter subpopulasi dengan adanya keterbatasan informasi yaitu pendugaan area kecil (*Small Area Estimation*) (Rao, 2003).

Pendugaan area kecil (*Small Area Estimation*) sangat dibutuhkan untuk mendapatkan informasi-informasi pada area kecil, misalnya pada ruang lingkup kota/kabupaten, kecamatan, ataupun desa/kelurahan. Pendugaan tidak langsung merupakan salah satu upaya untuk meminimumkan ragam pada area kecil dengan memanfaatkan informasi dari area sekitarnya yang berhubungan dengan parameter yang diamati. Salah satu metode yang dapat digunakan dalam pendugaan area kecil adalah *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP).

Metode EBLUP merupakan teknik penyelesaian model pengaruh campuran yang meminimumkan *Mean Square Error* (MSE) yang dihasilkan dengan asumsi komponen varian yang tidak diketahui. Henderson (1975) mengembangkan teknik penyelesaian model linier campuran, yaitu metode prediksi tak bias linier terbaik (*best linier unbiased prediction,* BLUP). Pada metode ini terlebih dahulu dilakukan pendugaan komponen ragam dengan metode kemungkinan maksimum terkendala (*restricted maximum likelihood*), sehingga disebut prediksi tak bias linier terbaik empiris (*Empirical Best Linear Unbiased Prediction,* (EBLUP).

Metode-metode yang terdapat pada pembahasan *Small Area Estimation* (SAE) merupakan penduga tak langsung, yaitu penduga yang diperoleh dengan pembobotan berdasarkan nilai variabel acak dari suatu domain tertentu untuk meningkatkan efektifitas ukuran sampel dan menurunkan keragaman. Keragaman suatu area dapat dipengaruhi oleh area sekitarnya, sehingga efek spasial dapat dimasukkan ke dalam pengaruh acak. Efek spasial merupakan hal yang terjadi antara satu area dengan area yang lain, ini berarti bahwa area yang satu mempengaruhi area lainnya. Dalam statistika, model yang dapat menjelaskan hubungan antara suatu area dengan area sekitarnya disebut dengan model spasial.

Penduga EBLUP dengan memperhatikan pengaruh acak area yang berkorelasi spasial dikenal dengan istilah penduga Spasial EBLUP (*Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction*. Dalam penelitian ini metode EBLUP dan SEBLUP diterapkan untuk menduga pengeluaran perkapita sebulan di Provinsi Lampung dengan mengambil informasi domain level kabupaten. Kualitas dari penduga akan dievaluasi berdasarkan nilai *Mean Square Error* (MSE). Metode pendugaan parameter EBLUP yang digunakan delam penelitian ini adalah metode *Restricted Maximum Likelihood Estimation* (REML).

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan penduga *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP).

2. Menentukan dan mengevaluasi nilai MSE *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP).
3. Menerapkan pendugaan area kecil dengan metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP) pada kasus data pengeluaran perkapita rumah tangga sebulan tahun 2017 di masing-masing kabupaten/kota yang ada di Provinsi Lampung.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Diharapkan dapat memberikan informasi yang akurat mengenai tingkat pengeluaran perkapita pada masing-masing kapubaten di Provinsi Lampung.
2. Menambah wawasan mengenai *Small Area Estimation* pada metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP).

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendugaan Area Kecil

Pendugaan area kecil adalah suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter sub populasi yang ukuran sampelnya kecil. Area kecil didefinisikan sebagai himpunan bagian dari populasi dimana suatu peubah menjadi perhatian. Area kecil tersebut dapat berupa kota, kabupaten, kecamatan, dan desa/kelurahan. Pendugaan area kecil bertujuan untuk meningkatkan keakuratan penduga suatu parameter, yaitu dengan menggunakan pendugaan tidak langsung. Pendugaan tidak langsung dapat dilakukan dengan "meminjam kekuatan" atau memanfaatkan peubah-peubah tambahan dalam menduga parameter. Peubah pendukung ini berupa informasi tambahan yang didapatkan pada area lain dari survei yang sama, dari area yang sama pada survei yang terdahulu, atau peubah lain yang berhubungan dengan peubah yang menjadi perhatian pada area kecil (Rao, 2003).

Pendugaan langsung yang digunakan untuk menduga parameter dari sampel yang berukuran kecil akan menghasilkan penduga yang tidak bias namun memiliki ragam yang besar. Oleh sebab itu diperlukan metode lain yang dapat menangani masalah tersebut, yaitu dengan menggunakan penduga area kecil (Rao, 2003). Penduga yang diperoleh dari model area kecil ini adalah *Empirical Best Linear*

Unbiased Prediction (EBLUP), *Empirical Bayes* (EB), dan *Hierarchical Bayes* (HB).

2.2 Analisis Data Spasial

Data spasial adalah data yang memuat adanya informasi lokasi atau geografis dari suatu wilayah. Secara umum analisis spasial membutuhkan suatu data berdasarkan lokasi dan memuat karakteristik dari lokasi tersebut. Analisis spasial terdiri dari tiga kelompok yaitu visualisasi, eksplorasi, dan pemodelan. Visualisasi adalah menginformasikan hasil analisis spasial. Eksplorasi adalah mengolah data spasial dengan metode statistika. Sedangkan pemodelan adalah menunjukkan adanya konsep hubungan sebab akibat dengan menggunakan metode dari sumber data spasial dan data non spasial untuk memprediksi adanya pola spasial (Pfeiffer, *et. al*, 2008). Lokasi pada data spasial harus diukur agar dapat mengetahui adanya efek spasial yang terjadi. Menurut Kosfeld (2006), informasi lokasi dapat diketahui dari dua sumber yaitu hubungan kedekatan (*neighborhood*) antar lokasi dan jarak (*distance*) yaitu lokasi yang terletak dalam suatu ruang tertentu dengan adanya garis lintang dan garis bujur menjadi sebuah sumber informasi. Informasi inilah yang digunakan untuk menghitung jarak antar titik yang terdapat dalam ruang.

2.3 Model Area Kecil

Model area kecil merupakan model dasar dalam pendugaan area kecil. Dalam pendugaan area kecil terdapat dua jenis model dasar yang digunakan, yaitu model berbasis area (Tipe A) dan model berbasis unit (Tipe B) (Rao 2003).

1. Model Berbasis Area (Tipe A)

Model berbasis area merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk level area tertentu, misalkan $\boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{T}} = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})^T$ dengan parameter yang akan diduga adalah θ_i yang merupakan fungsi dari rata-rata peubah respon dan diasumsikan mempunyai keterkaitan dengan $\boldsymbol{x_i^T}$. Data pendukung tersebut digunakan untuk membangun model

$$\theta_i = \boldsymbol{x_i^T \beta} + b_i v_i \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (2.1)$$

b_i adalah konstanta bernilai positif serta $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ adalah vektor dari koefisien regresi berukuran $p\ x\ 1$. Selain itu, v_i adalah efek acak daerah yang diasumsikan berdistribusi normal dan independen dengan $E\ (v_i) = 0$ dan $Var(v_i) = A$. Kesimpulan mengenai θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung y_i telah tersedia yaitu:

$$y_i = \theta_i + e_i\ , \qquad i = 1,2, \dots, m \qquad (2.2)$$

dimana e_i adalah *error* dari pemilihan daerah sampel yang berdistribusi normal dengan $E\ (e_i\ ) = 0$ dan $Var(\varepsilon_i\ ) = D_i$. Lalu dengan mensubstitusikan persamaan (2.1) ke persamaan (2.2) diperoleh model gabungan yang disebut sebagai model berbasis area, yaitu:

$$y_i = \boldsymbol{x_i^T \beta} + b_i v_i + e_i\ , \qquad i = 1,2, \dots, m \qquad (2.3)$$

dengan asumsi v_i dan e_i saling bebas (Rao, 2003).

Pada tahun 1979, Fay dan Herriot memperkenalkan suatu kasus khusus dari model tingkat area, yaitu dengan asumsi bahwa kontribusi efek acak v_i terhadap taksiran θ_i sama untuk masing-masing area. Sehingga dengan substitusi $b_i = 1$ pada persamaan (2.3) diperoleh:

$$y_i = \theta_i + e_i = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i + \varepsilon_i , \qquad i = 1,2, \dots , m \tag{2.4}$$

Model gabungan (*mixed model*) tersebut dikenal sebagai model Fay-Heriot, dimana keragaman variabel respon di dalam area kecil diasumsikan dapat diterangkan oleh hubungan variabel respon dengan informasi tambahan (variabel penyerta) yang disebut sebagai model pengaruh tetap (*fixed effect models*). Selain itu terdapat komponen keragaman spesifik area kecil yang tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan (variabel penyerta), kemudian disebut sebagai komponen pengaruh acak area kecil (*random effect*). Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model pengaruh campuran atau model linier campuran (Kurnia, 2009).

2. Model Berbasis Unit (Tipe B)

Basic Unit Level Model atau model berbasis unit merupakan suatu model dimana data pendukung yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon. Pada model berbasis unit ini diasumsikan bahwa data variabel penyerta unit x_{ij}^T=$(x_{ij1}, x_{ij2,} \dots x_{ijp})^T$ artinya untuk masing – masing anggota populasi *j* dalam masing – masing area ke-i. Selanjutnya variabel respon y_{ij} diasumsikan berkaitan dengan x_{ij} sehingga bentuk persamaan model area kecil berbasis unit sebagai berikut:

$$y_{ij} = \boldsymbol{x}_{ij}^T \boldsymbol{\beta} + e_{ij} + v_i, \qquad j = 1, 2, \dots , n \tag{2.5}$$

dengan $v_i \sim N\ (0, \sigma_v^2)$ adalah pengaruh acak area yang berdistribusi normal dan independen, β merupakan koefisien regresi dan diasumsikan galat bernilai 0 (Rao, 2003).

2.4 Metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)

BLUP (*Best Linear Unbiased Predictor)* merupakan penduga parameter yang meminimumkan *mean squared error* yang dihasilkan dengan asumsi komponen varian yang telah diketahui. Namun dalam prakteknya, komponen varian sangat sulit untuk diketahui, untuk itu diperlukan pendugaan terhadap komponen varian melalui data sampel. Metode yang dapat mensubstitusikan komponen varian yang tidak diketahui dengan nilai penduganya yaitu metode EBLUP atau *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (Rao, 2003).

Asumsi dasar dalam pengembangan untuk model pendugaan area kecil adalah keragaman di dalam area kecil peubah respon dapat diterangkan oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tambahan yang disebut pengaruh tetap. Asumsi lainnya yaitu bahwa keragaman spesifik area kecil tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan dan merupakan pengaruh acak area kecil. Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model pengaruh campuran. Salah satu sifat yang menarik dalam model campuran adalah kemampuan dalam hal menduga kombinasi linear dari pengaruh tetap dan pengaruh acak. Henderson (1975) mengembangkan teknik penyelesaian model pengaruh campuran untuk memperoleh prediksi tak-bias linear terbaik (*Best Linear Unbiased Prediction* /

BLUP). Menurut Rao (2003), BLUP merupakan suatu pendugaan parameter yang meminimumkan *Mean Squared Error* (MSE) diantara kelas-kelas pendugaan parameter linear tak bias lainnya. BLUP dihasilkan dengan asumsi bahwa komponen ragam diketahui. Model dasar dalam pengembangan pendugaan area kecil didasarkan pada bentuk model linier campuran sebagai berikut :

$$y_i = \theta_i + e_i = \boldsymbol{x_i^T}\boldsymbol{\beta} + v_i + \varepsilon_i , \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{2.6}$$

dimana:

y_i = nilai pendugaan langsung berdasarkan rancangan survei

$\boldsymbol{x_i^T}$ = variabel penyerta, yaitu variabel yang memiliki pengaruh langsung terhadap variabel yang akan di duga

$\boldsymbol{\beta}$ = koefisien regresi

v_i = pengaruh acak area kecil dimana $v_i \sim N\ (0, A)$

e_i = sampling error yang tidak terobservasi dengan asumsi $e_i \sim N\ \ (0, D_i)$

Menurut Rao (2003) penduga BLUP yang terbentuk bagi $\theta_i = \boldsymbol{x_i^T}\boldsymbol{\beta} + v_i$ adalah:

$$\hat{\theta}_i^{BLUP} = \boldsymbol{x_i^T}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \hat{v}_i = \boldsymbol{x_i^T}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \gamma_i\left(y_i - \boldsymbol{x_i^T}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{2.7}$$

Penduga BLUP pada persamaan (2.7) bergantung pada komponen ragam A yang pada prakteknya tidak diketahui nilainya. Dengan mensubsitusi $\hat{A}$ ke A pada persamaan (2.7) diperoleh penduga EBLUP bagi $\theta_i = \boldsymbol{x_i^T}\boldsymbol{\beta} + v_i$ adalah:

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = \boldsymbol{x_i^T}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{v}_i = \boldsymbol{x_i^T}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \gamma_i\left(y_i - \boldsymbol{x_i^T}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{2.8}$$

Menurut Prasad dan Rao (1990), misalkan θ merupakan suatu parameter dan $\hat{\theta}_i$ merupakan taksiran dari parameter θ. MSE dari $\hat{\theta}_i$ didefinisikan sebagai berikut:

$$MSE\left(\hat{\theta}_i{}^{EBLUP}\right) = E(\hat{\theta}_i{}^{EBLUP} - \theta_i)^2$$

$$= MSE\left(\hat{\theta}_i^{BLUP}\right) + E(\hat{\theta}_i^{EBLUP} - \hat{\theta}_i^{BLUP})^2 \qquad (2.9)$$

Nilai MSE dari suatu taksiran parameter memiliki peranan penting untuk diketahui, diantaranya adalah untuk mengukur seberapa baik taksiran parameter yang diperoleh.

2.5 Perluasan Model Berbasis Area: Model Spasial

Menurut Rao (2003), metode spasial merupakan metode untuk mendapatkan informasi pengamatan yang dipengaruhi efek ruang atau lokasi. Pengaruh efek ruang tersebut disajikan dalam bentuk koordinat lokasi (longitude dan latitude) atau pembobotan. Berdasarkan tipe data, pemodelan spasial dapat dibedakan menjadi pemodelan dengan pendekatan titik dan area. Pada model spasial berbasis area yaitu model dasar Fay-Herriot (2.3) mengasumsikan v_i berdistribusi normal. Pada model spasial, v_i digunakan ketika terdapat "*Neighbouring*" antar area. Contoh model yang memiliki korelasi antar v_i yaitu, korelasi yang bergantung pada kedekatan geografis dalam konteks penyebaran penduduk dan kemiskinan.

Model *Small Area Estimation* dengan memasukkan korelasi spasial antar area pertama kali diperkenalkan oleh Cressie (Cressie 1991 diacu dalam Rao 2003), dengan mengasusimsikan ketergantungan spasial mengikuti proses *Conditional Autoregresive* (CAR). Pada model CAR vektor pengaruh acak $v = v_i$ memenuhi:

$$y = \boldsymbol{X\beta} + v$$

$$v \sim N(0, \sigma_u^2 (\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W})^{-1})$$

$$v = \rho \boldsymbol{W} v + u \tag{2.10}$$

Koefisien ρ dalam persamaan (2.10) adalah koefisien autoregresif spasial yang menunjukan kekuatan dari hubungan spasial antar pengaruh acak. Nilai ρ berkisaran -1 hingga 1. Nilai $\rho >$ 0 menunjukkan bahwa suatu area dengan nilai parameter yang tinggi dikelilingi oleh area dengan nilai parameter yang tinggi pula dan sebuah area dengan nilai parameter yang rendah dikelilingi oleh area dengan nilai parameter yang rendah pula. Disisi lain, $\rho <$ 0 menunjukkan bahwa suatu area dengan nilai parameter yang tinggi dikelilingi oleh area lain dengan nilai parameter yang rendah, atau sebaliknya (Savitz dan Raudenbush, 2009). $\boldsymbol{W}$ dinotasikan sebagai matriks pembobot spasial yang menggambarkan struktur ketetanggaan dari area kecil dalam bentuk standarisasi baris (jumlah setiap baris pada matriks $\boldsymbol{W}$ adalah 1), v adalah pengaruh acak area dan u adalah vektor galat dari peubah acak area dengan rata – rata sama dengan nol dan ragam σ_u^2. Matriks $\boldsymbol{W}$ menunjukan apakah area tersebut berbatasan atau tidak. Dengan mendefinisikan $w_{ij} = 1$ dan 0, dikatakan $w_{ij} = 1$ jika wilayah ke-i berbatasan dengan wilayah ke-j dan dikatakan $w_{ij} = 0$ jika 1 jika wilayah ke-i tidak berbatasan dengan wilayah ke-j (Wall, 2004).

Menurut Upton dan Fingleton (1985), perbedaan diantara model spasial SAR (*Simultaneously Autoregresive*) dan CAR (*Conditional Autoregresive*) terdapat pada struktur kovarian. Pada model CAR matriks kovarian adalah $\sigma_u^2(\boldsymbol{I} - \rho \boldsymbol{W})^{-1}$. Didalam model CAR matriks $\boldsymbol{W}$ merupakan matriks simetris dan

$(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})$ merupakan matriks definit positif. Sehingga pada model CAR spasial BLUP yaitu:

$$\hat{\theta}_i^{SBLUP}(\sigma_u^2,\rho) = \boldsymbol{x_i^T\beta} + \boldsymbol{b}_i^T\{\sigma_u^2(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\}\boldsymbol{Z}^T$$

$$\{diag(D_i) + \sigma_u^2(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x_i^T\beta}) \qquad (2.11)$$

dengan b_i^T adalah vektor berukuran $1 \times n$ $(0,0,\dots,0,1,0,..0)$ dengan 1 menunjukkan pada lokasi ke-i. Penduga SEBLUP $\left(\hat{\theta}_i^{SEBLUP}(\hat{\sigma}_u^2,\hat{\rho})\right)$ diperoleh dari Spasial BLUP dengan mengganti nilai σ_u^2 dan ρ dengan penduganya. Asumsi kenormalan dari pengaruh acak digunakan untuk menduga parameter σ_u^2 dan ρ menggunakan prosedur REML dengan fungsi *log-likelihood*. Hasil penduga tersebut kemudian digunakan untuk melakukan pendugaan terhadap SEBLUP , dengan rumus penduga SEBLUP adalah:

$$\hat{\theta}_i^{SEBLUP}(\hat{\sigma}_u^2,\hat{\rho}) = \boldsymbol{x_i^T\hat{\beta}} + b_i^T\{\hat{\sigma}_u^2(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\}$$

$$\boldsymbol{Z}^T\{diag(D_i) + \hat{\sigma}_u^2(\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x_i^T\hat{\beta}}) \qquad (2.12)$$

2.6 Matriks Pembobot Spasial

Hal yang sangat penting dalam analisis spasial adalah adanya pembobot atau sering disebut sebagai matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial digunakan untuk menentukan bobot antar lokasi yang diamati berdasarkan hubungan ketetangga antar lokasi. Menurut Kosfeld (2006), grid umum ketetanggaan dapat didefinisikan dalam beberapa cara, yaitu:

a. *Rook contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sudut tidak diperhitungkan. Ilustrasi *rook* *contiguity* dilihat pada Gambar 1, dimana unit B1, B2, B3, dan B4 merupakan tetangga dari unit A.

		Unit B2		
	Unit B1	Unit A	Unit B3	
		Unit B4		

Gambar 1. *Rook Contiguity*

b. *Bishop contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sudut-sudutdaerah yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sisi tidak diperhitungkan. Ilustrasi untuk *bishop contiguity* dilihat pada Gambar 2, diantara unit C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A.

	Unit C1		Unit C2	
		Unit A		
	Unit C4		Unit C3	

Gambar 2. *Bishop Contiguity*

c. *Queen contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sudut juga diperhitungkan. Ilustrasi untuk *queen contiguity* dapat dilihat pada Gambar 3, dimana unit B1, B2, B3, dan B4 serta C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A.

	Unit C1	Unit B2	Unit C2	
	Unit B1	Unit A	Unit B3	
	Unit C4	Unit B4	Unit C3	

Gambar 3. *Q ueen Contiguity*

Pada umumnya ketetanggaan antar lokasi didasarkan pada sisi-sisi utama bukan sudutnya. Menurut Kosfeld (2006), matriks pembobot spasial **W** dapat diperoleh dari dua cara yaitu matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* $\mathbf{W}^*$) dan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix*). Matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* $\mathbf{W}^*$) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot yang sama rata terhadap tetangga lokasi terdekat dan yang lainnya nol, sedangkan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix*) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot satu bagi tetangga terdekat dan yang lainnya nol.

2.7 *Restricted Maximum Likelihood* (REML)

Metode pendugaan *maximum likelihood* (ML) pada komponen varians, pada umumnya bias. Thompson (1962) mengajukan metode, yang selanjutnya dilengkapi oleh Patterson dan Thompson (1971), yang dikenal sebagai *restricted maximum likelihooad* (REML). Metode REML menghasilkan pendugaan komponen varians yang *unbiased*.

Jiang (1996) menunjukan bahwa penduga REML konsisten dan secara asimtotik berdistribusi normal bahkan ketika asumsi kenormalan di *linear mixed model* tidak dipenuhi. Pada sebaran data memerlukan asumsi seperti binomial atau poisson untuk data diskrit dan normal atau log normal untuk data kontinu. Setiap sebaran data melibatkan paling tidak satu parameter yang tidak diketahui yang harus di duga dari data. Pendugaan dilakukan untuk mendapatkan suatu nilai parameter yang memaksimumkan *likelihood*.

Menurut Searle, dkk (1992) metode REML digunakan untuk menaksir nilai A yang merupakan varians antar area. Dengan metode REML, diperlukan fungsi *likelihood* yang merupakan fkp dari y dengan $E(y) = \boldsymbol{X\beta}$ dan $var\ (y) = A + D$. Karena v_i dan e_i berdistribusi normal maka y juga berdistribusi normal dan dapat ditulis sebagai:

$$y \sim N\left(\boldsymbol{X\beta}\,, (A + D)\right)$$

Sedangkan fkp dari y_i diperoleh:

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(A+D)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left((y - \ \boldsymbol{X\beta})^T (A + D)^{-1} (y - \ \boldsymbol{X\beta})\right)\right] \qquad (2.13)$$

dengan fungsi *log-likelihood* sebagai berikut:

$$lnf(y) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{V}| - \frac{1}{2}\{(y - \boldsymbol{X\beta})^T V^{-1}(y - \boldsymbol{X\beta})\} \quad (2.14)$$

dimana

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} A + D & 0 & 0 \\ 0 & A + D & 0 \\ 0 & 0 & A + D \end{pmatrix}$$

Penaksiran REML adalah solusi dari persamaan

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{A})}{\partial A} = \frac{1}{2}[\mathbf{y^T}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{tr}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{V})] \quad (2.15)$$

yaitu

$$\mathbf{y^T}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{y} = tr(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{V})$$

dengan

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V^{-1}} - \boldsymbol{V^{-1}X}(\boldsymbol{X^T V^{-1} X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X^T V^{-1}}$$

$$\boldsymbol{P_y} = \boldsymbol{V^{-1}y} - \boldsymbol{V^{-1}X}(\boldsymbol{X^T V^{-1} X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X^T V^{-1} y})$$

Persamaan (2.12) tidak dapat diselesaikan secara analitik, oleh karena itu diperlukan metode numerik untuk penyelesaiannya, yaitu Newton - Rapshon (NR) atau *scoring alghorithm* . Untuk menjalankan algoritma NR, diperlukan bentuk mariks informasi Fisher sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\mathfrak{T}_{ij}}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\ tr(\boldsymbol{PV_i PV_j})$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{T}}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} tr\ (\boldsymbol{PAPA}) & tr(\boldsymbol{PAPD}) \\ tr(\boldsymbol{PAPD}) & tr(\boldsymbol{PDPD}) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

dimana $tr(PA) = y^T \boldsymbol{PP}y$ dan $tr(PD) = y^T \boldsymbol{PP}y$

Selanjutnya iterasi ke-a algoritma NR untuk pendugaan komponen ragam adalah :

$$\boldsymbol{A}^{(a+1)} = \boldsymbol{A}^{(a)} + \left[\boldsymbol{\mathfrak{T}}\left(\boldsymbol{A}^{(a)}\right)\right]^{-1} \boldsymbol{s}\left(\mathbf{A}^{(\mathrm{a})}\right) \quad (2.17)$$

dimana $\boldsymbol{s}\left(\mathbf{A}^{(a)}\right)=\frac{1}{2}[\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}-\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{V})]$. Dengan a merupakan nilai dari iterasi yang telah ditentukan nilai awal $a=0$, serta s merupakan vektor *score* yaitu vektor yang elemennya merupakan turunan pertama fungsi *ln-likelihood* terhadap masing – masing parameter.

2.8 Generalisasi Kuadrat Terkecil (*Generalized Least Squares*)

Metode estimasi kuadrat terkecil berkembang menjadi beberapa metode, salah satunya adalah metode *Generalized Least Squares* (GLS). Ada beberapa asumsi klasik yang harus dipenuhi salah satunya adalah asumsi *homoskedatisitas*. Penanganan kasus variansi galat tidak homogen (*heteroskedastisitas*) diikuti munculnya penyimpangan asumsi lainnya akan efisien apabila menggunakan metode *General Least Square* (GLS). Metode GLS sebagai salah satu bentuk *least square estimation* yang merupakan bentuk estimasi yang dibuat untuk mengatasi sifat *heteroskedastisitas* yang memiliki kemampuan untuk mempertahankan sifat efisiensi estimasinya tanpa harus kehilangan sifat unbiased dan kosistensinya (Kariya dan Kurata, 2004).

Perhatikan model linier

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.18}$$

Diasumsikan matriks kovariansnya $\sum\sigma^2\Delta(\sigma^2<\infty)$ dengan σ^2 adalah parameter yang tidak diketahui nilainya dan Δ adalah matriks definit positif nxn dengan trase matriks sama dengan n. Jika suatu matriks $\boldsymbol{Q}$ adalah simetrik definit positif maka $\boldsymbol{Q}$ non singular atau $\boldsymbol{Q^{-1}}$ ada, dan karena itu ada matriks nxn nonsingular **P** sedemikian rupa sehingga :

$$\boldsymbol{P^{T}P} = \boldsymbol{Q^{-1}} \tag{2.19}$$

Matriks Δ adalah simetriks dan definit positif sehingga non-singular, karena itu ada suatu matriks nxn nonsingular $\boldsymbol{P}$ sehingga $\boldsymbol{P^{T}P} = \Delta^{\boldsymbol{-1}}$. Pada model linear kalikan kedua ruas dengan matriks $\boldsymbol{P}$ ini:

$$\boldsymbol{PY} = \boldsymbol{PX\beta} + \boldsymbol{P\varepsilon} \tag{2.20}$$

Penerapan metode kuadrat terkecil pada model (2.20) akan menghasilkan persamaan normal sebagai berikut:

$$\boldsymbol{P^{T}PPY} = \boldsymbol{X^{T}P^{T}XB} \tag{2.21}$$

dengan $\boldsymbol{B}$ adalah penduga kuadrat terkecil untuk $\boldsymbol{\beta}$ berdasarkan model di atas. Karena $\boldsymbol{X^{T}P^{T}XB}$ adalah matriks definit positif jika X mempunyai peringkat kolom penuh (*full column rank*) sehingga $\boldsymbol{X^{T}P^{T}XB}$ adalah nonsingular dan $\boldsymbol{P^{T}P} = \Delta^{\boldsymbol{-1}}$ maka solusi persamaannya adalah:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X^{T}P^{T}PX^{-1}P^{T}PY} \tag{2.22}$$

atau

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{X}'\Delta^{\boldsymbol{-1}}\,\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{X}'\Delta^{\boldsymbol{-1}}\,\boldsymbol{Y} \tag{2.23}$$

Persamaan terakhir ini dinamakan penduga kuadrat terkecil umum (*Generalized Least Squares*) untuk $\boldsymbol{\beta}$ selanjutnya disingkat dengan GLS (Usman dan Warsono, 2009).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019 yang bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data pengeluaran rumah tangga di masing – masing kabupaten/kota di Provinsi Lampung tahun 2017 yang diperoleh dari buku publikasi Badan Pusat Statistika (BPS) Provinsi Lampung tahun 2018. Adapun variabel penyerta yang digunakan dalam penelitian ini adalah jumlah kelahiran penduduk (x_1) di Provinsi Lampung pada setiap kabupaten/kota tahun 2017. Penentuan variabel penyerta ini didasari pada penelitian Ningtyas, dkk (2015) yang menyatakan jumlah kelahiran penduduk berpengaruh secara signifikan terhadap pengeluaran perkapita di Provinsi Jawa Tengah Kabupaten Brebes.

Tabel 1. Data Pengeluaran Rumah Tangga Sebulan di Provinsi Lampung Berdasarkan Level Kabupaten/Kota Tahun 2017

Kabupaten/Kota	Pengeluaran Rumah Tangga Sebulan (Rp)	x_1 (jumlah kelahiran penduduk)
Lampung Barat	968134	5736
Tanggamus	714372	11200
Lampung Selatan	759254	20882
Lampung Timur	759190	18119
Lampung Tengah	793812	21528
Lampung Utara	749075	11461
Way Kanan	753307	8080
Tulang Bawang	852594	8626
Pesawaran	714088	7764
Pringsewu	686971	6933
Mesuji	834489	3548
Tulang Bawang Barat	702820	5055
Pesisir Barat	753637	3163
Bandar Lampung	1342680	17340
Metro	1325948	2786

Sumber: Badan Pusat Statistika Provinsi Lampung Tahun 2018

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini akan mengkaji mengenai penduga *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dengan informasi tambahan variabel penyerta serta pengaruh acak spasial. Metode penelitian yang digunakan untuk menduga pengeluaran per kapita sebulan pada suatu area yaitu dengan metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP). Metode EBLUP dan SEBLUP akan diaplikasikan pada data pengeluaran rumah tangga sebulan pada 15 kabupaten/kota di Provinsi Lampung pada tahun 2017. Kualitas dari kedua metode tersebut akan dievaluasi menggunakan nilai *Mean Square Error*. Semakin kecil nilai *Mean Square Error* maka nilai dugaan yang diperoleh semakin akurat. Selanjutnya hasil dugaan yang diperoleh akan dipetakan berdasarkan data sebaran pengeluaran per kapita di kabupaten/kota di Provinsi Lampung. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini yaitu:

1. Menentukan penduga *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (SEBLUP)
   a. Menetapkan model dua tahap yaitu Normal-Normal

      Model dasar tingkat area dua level yang digunakan dalam penelitian ini dapat ditulis sebagai model linear campuran, yaitu:

$$y_i = \boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i \tag{3.1}$$

      dengan:

      y_i = variabel respon

      $\boldsymbol{x}_i^{\boldsymbol{T}}$ = variabel penyerta, yaitu variabel yang memiliki pengaruh langsung terhadap variabel yang akan di duga

      $\boldsymbol{\beta}$ = koefisien regresi

      v_i = pengaruh acak area kecil

      e_i = sampling error

      dimana v_i dan e_i independen dengan $E(v_i) = 0$, $Var(v_i) = A$, $E(e_i) = 0$, dan $Var(e_i) = D_i$. Sehingga ditetapkan model dua tahap distribusi *Normal-Normal* sebagai berikut:

      Level 1: $y_i|\theta_i \sim N \; (\theta_i, D_i)$

      Level 2: $\theta_i \sim N \; (x_i^T \beta, A)$, $i = 1, 2, \dots, k$

      dengan:

y_i = penduga langsung

θ_i = rata- rata pengeluaran per kapita sebulan area ke-i

D_i = ragam dalam area

$\boldsymbol{x}_i^T$ = variabel penyerta yang berhubungan dengan pengeluaran per kapita yang diamati

$\boldsymbol{\beta}$ = koefisien regresi

A = ragam dari pengaruh acak

Sehingga diperoleh penduga:

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = \hat{\theta}_i\left(y_i \middle| \hat{A}\right) = \boldsymbol{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\gamma}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}) \quad (3.2)$$

dengan $\hat{\gamma}_i = \frac{\hat{A}}{\hat{A}+D_i}$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i x_i^T}{(D_i+\hat{A})}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i y_i}{(D_i+\hat{A})}\right)$

b. Menentukan penduga *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* dengan model pada persamaan (3.1). Terdapat perbedaan dalam model tingkat area yang digunakan dalam metode penduga *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* dengan metode penduga *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction*, yaitu pada *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* terdapat pendefinisian khusus pengaruh acak v_i sebagai pengaruh acak spasial yang diasumsikan sebagai berikut:

$$y = \boldsymbol{X\beta} + v$$

$$v \sim N(0, \sigma_u^2(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1})$$

$$v = \rho\boldsymbol{W}v + u$$

Asumsi kenormalan dari pengaruh acak digunakan untuk menduga parameter σ_u^2 dan ρ menggunakan prosedur REML dengan fungsi *log-likelihood*. Hasil penduga tersebut kemudian digunakan untuk melakukan pendugaan terhadap SEBLUP yaitu:

$$\hat{\theta}_i^{SEBLUP}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) = \boldsymbol{x_i^T}\boldsymbol{\hat{\beta}} + b_i^T\{\hat{\sigma}_u^2(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\}$$

$$\boldsymbol{Z}^T\{diag(D_i) + \hat{\sigma}_u^2(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x_i^T}\boldsymbol{\hat{\beta}}) \quad (3.3)$$

dimana $\boldsymbol{\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X^T}\boldsymbol{V^{-1}}\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X^T}\boldsymbol{V^{-1}}\boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{V} = diag(D_i) + \sigma_u^2(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}$.

c. Melakukan pendugaan terhadap parameter dengan menggunakan metode REML

d. Melakukan pendugaan koefisien regresi (β) dengan GLS yaitu :

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X^T}\boldsymbol{V^{-1}}\boldsymbol{X})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X^T}\boldsymbol{V^{-1}}\mathbf{Y} \quad (3.4)$$

e. Menentukan *Mean Square Error* bagi penduga *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction*

3. Melakukan pengujian terhadap penduga *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* yang diaplikasikan pada data penelitian dengan menggunakan *software* Rstudio yaitu:

   a. Menguji sebaran distribusi data

   b. Menentukan matriks pembobot spasial $(\boldsymbol{W})$

   c. Mendapatkan nilai dugaan dari θ_i dengan metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* ($\hat{\theta}_i^{EBLUP}$) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* ($\hat{\theta}_i^{SEBLUP}$)

d. Mendapatkan MSE dari metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* ($\hat{\theta}_i^{EBLUP}$) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* ($\hat{\theta}_i^{SEBLUP}$)

e. Membandingkan MSE *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* ($\hat{\theta}_i^{EBLUP}$) dan *Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* ($\hat{\theta}_i^{SEBLUP}$)

4. Melakukan pemetaan wilayah sebaran pengeluaran perkapita sebulan dengan menggunakan *Archview* GIS.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1 Penduga EBLUP pada pendugaan area kecil dengan model Normal-Normal adalah $\hat{\theta}_i^{EBLUP} = \boldsymbol{x}_i^T\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \gamma_i(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ sedangkan penduga SEBLUP pada pendugaan area kecil model Norma-Normal adalah $\hat{\theta}_i^{SEBLUP}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) = \boldsymbol{x}_i^T\widehat{\boldsymbol{\beta}} + b_i^T\{\hat{\sigma}_u^2(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\}\ \boldsymbol{Z}^T\{diag(D_i) + \hat{\sigma}_u^2(\boldsymbol{I} - \rho\boldsymbol{W})^{-1}\}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_i^T\widehat{\boldsymbol{\beta}})$

2 *Mean Square Error* (MSE) dari $\hat{\theta}_i^{EBLUP}$ dan $\hat{\theta}_i^{SEBLUP}$ memiliki nilai error yang cukup kecil. Akan tetapi nilai MSE $\hat{\theta}_i^{SEBLUP}$ konsisten lebih kecil dibandingkan nilai MSE $\hat{\theta}_i^{EBLUP}$ sehingga metode SEBLUP lebih baik digunakan untuk melakukan pendugaan area kecil model Normal-Normal.

3 Berdasarkan data pengeluaran per kapita kabupaten/kota di Provinsi Lampung tahun 2017, wilayah dengan pengeluaran per kapita berada di kategori rendah terdapat di 10 kabupaten diantaranya Kabupaten Tulang Bawang Barat, Kabupaten Way Kanan, Kabupaten Lampung Utara, Kabupaten Lampung Tengah, Kabupaten Lampung Timur, Kabupaten Pringsewu, Kabupaten Tanggamus, Kabupaten Pesawaran, Kabupaten Lampung Selatan, dan Kabupaten Pesisir Barat. Wilayah dengan pengeluaran per kapita berada di kategori sedang yaitu terdapat di kabupaten Lampung Barat, Kabupaten

Mesuji, dan Kabupaten Tulang Bawang. Wilayah dengan pengeluaran per kapita berada di kategori tinggi yaitu Kota Bandar Lampung dan Kota Metro.

DAFTAR PUSTAKA

Badan Pusat Statistika. 2018. *Provinsi Lampung Dalam Angka 2018*. BPS Provinsi Lampung, Lampung.

Badan Pusat Statistika. 2015. http://www.bps.go.id/dynamictable/2015/09/07/849/rata-rata-banyaknya-anggota-rumah-tangga-menurut-provinsi-2000-2015.html.. Diakses pada tanggal 28 April 2019.

Henderson. C. R. 1975. Best Linear Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model. *Biometrics* **31**(2): 423-447.

Jiang, Jiming. 1996. REML Estimation: Asymptotic Behavior and Related Topics. *The Annals of Statistics*. **24**(1): 255-286.

Kariya, T dan Kurata, H. 2004. *Generalized Least Squares*. John Wiley and Sons, Tokyo.

Kosfeld, R. 2006. *Spatial Econometric*. URL: http//www.scribd.com. Diakses pada 11 November 2018.

Kurnia, A. 2009. *Prediksi Terbaik Empirik Untuk Model Transformasi Logaritma di Dalam Pendugaan Area Kecil Dengan Penerapan Pada Data Susenas* [Disertasi]. Bogor. Pascasarjana, IPB.

Ningtyas, R., Rahmawati, R., dan Wilandari, Y. 2015. Penerapan Metode Empirical Best Linear Uniased Prediction (EBLUP) Pada Model Penduga Area Kecil Dalam Pendugaan Pengeluaran Per Kapita di Kabupaten Brebes. UNDIP, Semarang.

Patterson, H. D dan Thompson, R. 1971. Recovery of Interblock Information when Block Size are Unequal. *Biometrika* 58, 545-554.

Pfeiffer, D., et. al. 2008. *Spatial Analysis in Epidemiologi.* Oxford University Press, New York.

Prasad, N. G. N., dan Rao, J. N. K. (1990). The estimation of the mean squared error of small area estimators. Journal of the American Statistical Association 85, 163-171.

Rao, JNK. 2003. *Small Area Estimation*. John Wiley and Sons, New Jersey (US).

Saei, A., Chambers, R. (2003). Small Area Estimation: A Review of Methods based on the application of mixed models. *Southampton Statistical Sciences Research Institue, WP MO3/16,* Sothampton

Salvati, N. 2004. *Small Area Estimation by Spatial Models: The Spatial Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (*Spatial* EBLUP). Dipartimento di Statistica "G. Parenti" viale morgagni, 59-50134.

Savitz, NV., dan Raudenbush, SW. 2009. *Exploting Spatial Dependence to Improve Best Linear Unbiased Prediction* (*Spatial* EBLUP). Dipartimento di Statistica "G. Parenti" viale morgagni, 59-50134.

Searle, S. R., Casella, G., dan Mc Culloch, C.E. 1992. *Variance Components*, Wiley, New York.

Thompson, W. A, JR. 1962. The Problem of Negative Estimates of Variance Components. Ann. *Mathematics Statist*. **33**: 273-289.

Upton, G.J.G., dan Fingleton, B. 1985. *Spatial Data Analysis by Example*. John Wiley and Sons, New York.

Usman, M. dan Warsono. 2009. *Teori Model Linier dan Aplikasinya*. Sinar Baru Algesindo, Bandung.

Wall, M.M. 2004. A Close Look at The Spatial Structure Implied by the CAR and SAR Models. Journal of Statistical Planning and Inference, Article in press (accepted November 2002)