PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA DENGAN METODE TEMBAK LINEAR (*SHOOTING METHOD)* DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA SYARAT BATAS *DIRICHLET*

(Skripsi)

Oleh

Diana Dwi Mafiro

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA DAN METODE TEMBAK LINEAR (*SHOOTING METHOD*) DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA DENGAN SYARAT BATAS *DIRICHLET*

OLEH

DIANA DWI MAFIRO

Teori persamaan diferensial sudah cukup berkembang, dan metode yang digunakan bervariasi sesuai dengan jenis persamaan. Terdapat dua macam cara dalam menyelesaikan persamaan diferensial, pertama secara analitis dan kedua secara numerik. Penulis akan membahas tentang solusi numerik untuk penyelesaian persamaan diferensial syarat batas *dirichlet* dengan membandingkan metode beda hingga dan metode tembak linear.

Kata Kunci : Persamaan diferensial biasa, solusi numerik, metode beda hingga, metode tembak linear

ABSTRACT

COMPARISON FINITE DIFFERENCE METHOD AND SHOOTING METHOD IN SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION SOLUTION WITH DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS

By

DIANA DWI MAFIRO

Differential equation theorem has been developing, the method used is various depends on the kind of the equation. There are two kinds of method to solve differential equation, the first one is analytically and the second is numerically. It will be discussed about numeric solution dor dirichlet boundary condition differential equation by comparing finite difference method and shooting method.

Keyword : Ordinary differential equations, numerical solutions, finite difference method, shooting method.

PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA DAN METODE TEMBAK LINEAR (*SHOOTING METHOD*) DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA DENGAN SYARAT BATAS *DIRICHLET*

Oleh

DIANA DWI MAFIRO

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA DENGAN METODE TEMBAK LINEAR (*SHOOTING METHOD*) DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA SYARAT BATAS *DIRICHLET***

Nama Mahasiswa : Diana Dwi Mafiro

No. Pokok Mahasiswa : 1517031140

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.
NIP 19610128 198811 2 001

Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.
NIP 19731109 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **19 Maret 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama mahasiswa	: **DIANA DWI MAFIRO**
Nomor pokok mahasiswa	: **1517031140**
Jurusan	: **Matematika**
Judul skripsi	: **PERBANDINGAN METODE BEDA HINGGA DAN METODE TEMBAK LINEAR (*SHOOTING METHOD*) DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA DENGAN SYARAT BATAS *DIRICHLET***

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 19 Maret 2019

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL
TGL 20
60C11AFF800569559
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Diana Dwi Mafiro
NPM. 1517031140

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Diana Dwi Mafiro, anak kedua dari dua bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 25 Juli 1997 oleh pasangan Bapak Cipto Sari dan Ibu Mardiana.

Menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Arrusyhidah pada tahun 2002- 2003, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD N 1 Palapa Bandar Lampung pada tahun 2003-2009, kemudian bersekolah di SMP PGRI 1 Bandar Lampung pada tahun 2009-2012, dan bersekolah di SMA Al-Azhar 3 Bandar Lampung pada tahun 2012-2015. Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswi, penulis ikut serta dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila dan BEM Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Bank BRI Kanwil Bandar Lampung dan pada tahun yang sama penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sukaraja Nuban Kecamatan Batanghari Nuban, Kabupaten Lampung Timur, Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

"Dan hendaklah diantara kamu ada segolongan orang yang menyeru kepada kebajikan, menyuruh (berbuat) yang makruf, dan mencegah yang mungkar. Dan mereka itulah orang-orang yang beruntung."

(Q.S Ali-Imran 3:104)

"Allah menghendaki kemudahan bagimu, dia tidak menghendaki kesulitan bagimu."

(Q.S Al-Baqarah :185)

"Barang siapa yang menempuh jalan menuntut ilmu, niscaya Allah subhanahu wata'ala akan memudahkan baginya jalan menuju surga."

(H.R Muslim)

"Bermimpilah sebesar apapun, selanjutnya perjuangkan mimpi-mimpimu dengan usaha dan doa."

(Diana Dwi Mafiro)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin

Dengan kerendahan hati dan rasa bersukur kepada Allah SWT

Kupersembakan karya ini kepada :

Orang tua tercinta Bapak Cipto Sari dan Ibu Mardiana atas setiap doa, dukungan, semangat, motivasi dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat, membesarkan penulis hingga sekarang. Serta kakak saya Oky yang selalu memberi semangat dan kasih sayang

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mendukung, menolong, memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia.

SANWACANA

Dengan mengucapkan *Alhamdulillah* penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Perbandingan Metode Beda Hingga dan Metode Tembak Linear (*Shooting Method*) dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Dua Dengan Syarat Batas *Dirichlet.* Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih banyak kepada :

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan dan kesedian waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Sutopo Hadi, M.Sc., Ph.D., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak Cipto Sari dan Ibu Mardiana tercinta yang selalu memberi doa, dukungan, nasehat, semangat dan kasih sayang, serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Kak Oky, Mba Lisa, Ashraf, Andini, Mamak, Apung dan keluarga besarku yang selalu menyemangati, menemani dan memberi motivasi kepada penulis.
10. Sahabat – sahabat Penulis Tiwi, Desun, Akika, Ratri, Yuni, Mona yang selalu siap sedia menemani dalam setiap suka duka, dan tak pernah bosan mendengarkan setiap keluh kesah penulis dari awal hingga akhir.
11. Teman-Teman seperjuangan Dinda, Mira, Indraswari, Sekar, Anita, Wilda, Edwin, Aul, yang selalu mendukung dan memberi nasihat kepada penulis untuk menulis skripsi ini.
12. Rekan-rekan Pimpinan HIMATIKA 2017 dan pengurus KRT dan 2017.
13. Teman-teman angkatan 2015 jurusan matematika.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung,   Maret 2019
Penulis

Diana Dwi Mafiro

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan dari satu atau beberapa variabel tak bebas terhadap satu atau beberapa variabel bebas. Teori persamaan diferensial sudah cukup berkembang, dan metode yang digunakan bervariasi sesuai dengan jenis persamaan.

Terdapat dua macam cara dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Pertama secara analitis. Cara ini biasanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang mempunyai bentuk sederhana. Kedua, secara numerik. Cara ini biasanya digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial yang sulit dikerjakan secara analitis.

Metode numerik merupakan suatu bagian ilmu matematika. Khususnya matematika rekayasa yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematika, proses matematika ini selanjutnya dirumuskan untuk menggambarkan keadaan sebenarnya. Penyelesaian masalah matematika secara umum dapat diklarifikasikan atas analisis yaitu penyelesaian yang dihasilkan akan memenuhi persamaan semula secara eksak, numerik yaitu penyelesaian yang dihasilkan berupa hampiran, dan secara simulasi.

Solusi-solusi yang diberikan dalam metode numerik merupakan nilai yang mendekati nilai eksak, sehingga nilai-nilai tersebut disebut sebagai nilai hampiran/pendekatan. Dalam penyelesaiannya, nilai kesalahan (Analisis *Error*) harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan.

Dalam penulisan ini, penulis bermaksud untuk menyusun skripsi dengan judul "Perbandingan Metode Beda Hingga Dan Metode Tembak Linear (*Shooting Method*) Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Dengan Syarat Batas *Dirichlet*".

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah lebih ditekankan pada perbandingan selisih nilai analisis *error* dalam penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga dan metode tembak linear (*Shooting Method*) terhadap nilai sebenarnya (eksak) dengan jarak (h) dan jumlah partisi (N) yang sama pada penyelesaian persamaan diferensial linear berorde dua syarat batas *Dirichlet* dengan koefisien konstan.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

Membandingkan nilai hampiran numerik pada jarak (h) dan jumlah partisi (N) yang sama antara metode beda hingga dan metode tembak linear (*Shooting Method*) pada penyelesaian persamaan diferensial linear berorde dua dengan syarat batas *Dirichlet*.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Memberi informasi tentang perbandingan selisih nilai kesalahan (analisis *error*) pada hasil numerik menggunakan metode beda hingga dan metode tembak linear (*shooting method*) dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde dua dengan syarat batas *Dirichlet*.
2. Dapat menjadi referensi untuk pemecahan masalah yang berkaitan dengan persamaan diferensial lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui yang dinamakan $y(x)$ dan yang ditentukan dari persamaan tersebut (Suprihatin,2013).

Contoh :

a. $\frac{dy}{dx} = 0$

b. $\frac{dy}{dx} + xy = e^x$

dengan memperhatikan banyaknya variabel bebas yang terlibat, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa jika hanya ada satu variabel bebas yang terlibat dan persamaan diferensial parsial jika ada lebih dari satu variabel bebas yang terlibat (Kartono,2012).

2.2 Persamaan Diferensial Orde Dua

Definisi 2.2.1

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t) \quad (2.1)$$

Dimana $p(t), q(t)$ dan $r(t)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval *I*.

Solusi homogen dari persamaan (2.1) adalah sebagai berikut :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (2.2)$$

Teorema 2.2.2

Penyelesaiaan umum dari persamaan diferensial orde dua adalah $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ dengan $x_p(t)$ adalah penyelesaian partikulir dan $x_h(t)$ adalah penyelesaian komplementer atau penyelesaian umum dari persamaan (2.2).

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa x adalah penyelesaian dari persamaan (2.1) maka, $x - x_p$ adalah penyelesaian dari persamaan (2.2)

$p(x - x_p)'' + q(x - x_p)' + r(x - x_p)$

$\Leftrightarrow px'' - px_p'' + qx' - qx_p' + rx - rx_p$

$\Leftrightarrow px$+qx'+rx-(px$_p$ $+ qx_p' + rx_p) = 0$

Terbukti bahwa $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ adalah penyelesaian dari persamaan (2.1) dari persamaan (2.2), jika X_1 dan X_2 adalah solusi-solusi dari persamaan tak homogen, maka $X_1 - X_2$ solusi dari persamaan homogen. Dan jika x_1 dan x_2

adalah basis atau pembangun dari solusi-solusi untuk persamaan homogen, maka

$$X_1 - X_2 = x_h = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{2.3}$$

Dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta.

Selanjutnya mencari solusi partikulir dari persamaan (2.2), Ada dua metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan solusi partikulir yaitu:

1. Metode Koefisien Tak Tentu

   Kunci metode ini adalah x_p adalah suatu ekspresi yang mirip dengan $r(x)$ yang terdapat koefisien-koefisien yang tidak diketahui yang dapat ditentukan dengan menstubtitusikan x_p pada persamaan.

   Aturan-aturan Metode Koefisien Tak Tentu

   a. Aturan dasar

   Jika $r(x)$ adalah salah satu fungsi yang ada dalam Tabel 1, pilih fungsi x_p yang bersesuaian dan tentukan koefisien tak tentunya dengan menstubtitusikan x_p pada persamaan.

   b. Aturan Modifikasi

   Jika $r(x)$ sama dengan solusi persamaan diferensial homogen, kalikan x_p yang bersesuaian dalam Tabel 1 dengan x.

   c. Aturan Penjumlahan

   Jika $r(x)$ adalah fungsi-fungsi yang terdapat dalam Tabel 1 pada kolom pertama, x_p adalah jumlah fungsi pada baris yang bersesuaian.

Tabel 1. Metode Koefisien Tak Tentu

Suku-suku dalam $r(t)$	Pilihan untuk x_p
ke^{rt}	ce^{rt}
$kt^n (n = 0,1, \dots)$	$k_n t^n + k_{n-1} t^{n-1} + \cdots + k_1 t + k_0$
$k \cos \omega t \; atau \; k \sin \omega t$	$K \cos \omega t + M \sin \omega t$

2. Metode Variasi Parameter

Prinsip metode ini adalah mengubah variabel konstanta c_k dengan variasi parameter $v_k(t)$. Misal pada persamaan diferensial orde dua konstanta c_1 dan c_2 pada persamaan (2.3) diubah dengan variasi parameter $v_1(t)$ dan $v_2(t)$ sehingga solusi khusus persamaan diferensial orde dua tak homogen

$x_p = v_1(t)x_1(t) + v_2(t)x_2(t)$ (Waluya, 2006).

2.3 Masalah Syarat Awal dan Syarat Batas

Perhatikan persamaan diferensial orde dua berikut ini

$$a_2(x)y" + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \tag{2.4}$$

Dimana $a_2(x), a_1(x)$, $a_0(x)$ dinamakan koefisien-koefisien yang dapat sebagai fungsi dari x atau konstanta dan $r(x)$ merupakan fungsi-fungsi kontinu di dalam suatu interval $a \leq x \leq b$ dengan $a_2(x) \neq 0$. Jika persamaan (2.4) mempunyai syarat awal

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1 \tag{2.5}$$

Maka persamaan (2.4) bersama-sama dengan persamaan (2.5) dinamakan masalah syarat awal. Jadi masalah syarat awal sering disajikan dalam bentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$
$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1 \tag{2.6}$$

Jika persamaan (2.4) dilengkapi dengan kondisi ujung-ujung pada interval $a \leq x \leq b$, misalkan $y(a) = A$ dan $y(b) = B$ maka dinamakan masalah syarat batas. Jadi masalah syarat batas disajikan dalam bentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$
$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B \tag{2.7}$$

Dalam pemodelan fenomena perubahan di dunia nyata, masalah syarat awal sering dikaitkan dengan variabel waktu, sedangkan masalah syarat batas sering dikaitkan dengan pemodelan matematika yang melibatkan variabel posisi.

Di samping ada perbedaan pada kondisi yang diterapkan (waktu atau posisi), secara prinsip ada perbedaan yang mencolok antara masalah syarat awal dan batas terkait dengan ada atau tidaknya solusi. Masalah syarat awal selalu mempunyai solusi dan solusi ini selalu tunggal seperti yang dijamin oleh teorema eksistensi dan ketunggalan solusi masalah syarat awal, sedangkan untuk masalah syarat batas mempunyai tiga kemungkinan yaitu solusi tunggal, solusi banyak, bahkan tidak ada solusi. Hal ini dapat dijelaskan demikian, misalnya bahwa $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ merupakan dua buah solusi yang bebas linear dari persamaan (2.4), serta $y_p(x)$ merupakan solusi khususnya maka solusi umum persamaan (2.4) berbentuk

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x) \tag{2.8}$$

Dengan mengenakan syarat batasnya, maka

$$y(a) = C_1y_1(a) + C_2y_2(a) + y_p(a) \Leftrightarrow \ C_1y_1(a) + C_2y_2(a) + y_p(a) = A$$

$$y(b) = C_1y_1(b) + C_2y_2(b) + y_p(b) \Leftrightarrow \ C_1y_1(b) + C_2y_2(b) + y_p(b) = B$$

Dari sini

$$C_1y_1(a) + C_2y_2(a) = A - y_p(a)$$

$$C_1y_1(b) + C_2y_2(b) = B - y_p(b) \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) merupakan sistem persamaan linear tak homogen dalam C_1 dan C_2, oleh karena itu sesuai konsep solusi sistem persamaan linear dalam Aljabar Linear maka sistem (2.9) mempunyai tiga kemungkinan solusinya yaitu solusi tunggal, solusi banyak, atau bahkan tidak ada solusi (Kartono, 2012).

Masalah syarat batas sering dipakai untuk memodelkan fenomena perubahan akibat adanya perubahan terhadap variabel posisinya, ada tiga jenis kondisi syarat batas pada persamaan diferensial biasa yaitu :

1. Nilai batas konstan (tipe Dirichlet)

   Nilai batas diberikan sebagai sebuah konstan.

   Contoh : $A_1 = 1$ dan $B_1 = 0$ maka $y(x_0) = \alpha$

2. Nilai batas derivatif (tipe Neumann)

   Nilai batas diberikan sebagai sebuah nilai derivatif.

   Contoh : $A_1 = 0$ dan $B_1 = 1$ maka $y'(x_0) = \alpha$

3. Nilai batas derivatif (tipe Robin)

   Nilai batas diberikan sebagai sebuah nilai konstan dan derivatif.

   Contoh : $A_1 = 1$ dan $B_1 = 1$ maka $y(x_0) + y'^{(x_0)} = \alpha$ (Kosasih, 2006)

2.4 Notasi Matriks

Matriks adalah suatu baris bilangan-bilangan yang berbentuk empat persegi panjang. Matriks tersebut mempunyai bentuk sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk matriks di atas, A adalah notasi matriks sedangkan a_{ij} adalah elemen matriks. Deretan horizontal elemen-elemen disebut baris dan deretan vertikal disebut kolom. subskrip pertama *i* menunjukkan nomor baris dimana elemen berada. subskrip kedua *j* menunjukkan nomor kolom. Matriks di atas mempunyai **m** baris dan **n** kolom, dan disebut mempunyai dimensi *m* dikali *n* (*mxn).*

2.4.1 Matriks Bujur Sangkar Istimewa

Matriks bujur sangkar istimewa terdiri dari beberapa jenis antar lain sebagai berikut (Pujiyanta,2007).

Segitiga Atas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tringular Bawah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks Diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.5 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi). Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah sistem persamaan yang besar, persamaan-persamaan tak linear, masalah geometri yang rumit serta suatu persamaan yang sangat kompleks dan sulit untuk diselesaikan secara analitik(Munir,2003).

2.6 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan persamaan diferensial. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, metode beda hingga memanfaatkan deret Taylor dengan cara mengaprokmasi atau melalui pendekatan turunan-turunan persamaan diferensial biasa menjadi sistem persamaan linear. Untuk dapat menggunakan metode beda hingga dibutuhkan deret Taylor. Deret Taylor fungsi satu variabel disekitar x diberikan sebagai berikut :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f"(x)}{2!}h^2 + \cdots \quad (2.10)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f"(x)}{2!}h^2 + \cdots \quad (2.11)$$

Jika (2.10) dengan (2.11) dikurangi dan nilai setelah pangkat 2 (dua) diabaikan akan di dapat

$$x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1})}{2h} + \boldsymbol{O}h^2 \quad (2.12)$$

Jika (2.10) ditambahkan dengan (2.11) dan nilai setelah pangkat 2 (dua) diabaikan akan di dapat

$$x"(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1})}{h^2} + \boldsymbol{O}h^2 \quad (2.13)$$

(Wignoyosukarto,1986)

Diberikan sebuah persamaan diferensial linear orde dua yaitu

$$x"(t) = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t) \quad (2.14)$$

dengan fungsi $p(t), q(t) dan\ r(t)$ kontinu pada interval $[a, b]$ dari *t*. Akan dicari solusi numerik atau pendekatan $x(t)$ yang memenuhi syarat batas $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$ dari persamaan differensial tersebut pada interval terkait.

Pada interval $[a, b]$, dibuat partisi $P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$ dan $a = \{t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N\} = b$, dengan $t_i = a + hi$ dan $N = \frac{(b-a)}{h}$ untuk $i = 0,1,2, \dots, N$.

Dengan menggunakan formula pendekatan beda pusat untuk turunan (*derivative*) pertama (2.12) dan turunan (*derivative*) kedua (2.13) dari $x(t)$. Kemudian substitusikan ruas kanan pada persamaan (2.12) dan (2.13) ke dalam persamaan (2.14), sehingga diperoleh

$$\frac{x_{j+1}-2x(t_j)+x_{j-1}}{h^2}+\boldsymbol{O}h^2=p(t_j)\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}\right)+\boldsymbol{O}h^2+q(t_j)x_j+r(t_j) \qquad (2.15)$$

Selanjutnya mengeliminasi sisa pemotongan galat ($\boldsymbol{O}h^2$)

$$\frac{x_{j+1}-2x(t_j)+x_{j-1}}{h^2}+\boldsymbol{O}h^2-\boldsymbol{O}h^2=p(t_j)\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}\right)+q(t_j)x_j+r(t_j)$$

$$\frac{x_{j+1}-2x(t_j)+x_{j-1}}{h^2}=p(t_j)\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}\right)+q(t_j)x_j+r(t_j) \qquad (2.16)$$

Misalkan :

$p(t_j)=p_j\ \ q(t_j)=q_j\ dan\ r(t_j)=r$

Maka persamaan (2.16) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{x_{j+1}-2x(t_j)+x_{j-1}}{h^2}=p_j\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}\right)+q_j\,x_j+r_j \qquad (2.17)$$

Atau

$$x_{j+1}-2x(t_j)+x_{j-1}=p_j\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}\right)(h^2)+q_j\,x_j(h^2)+r_j\,(h^2)$$

$$x_{j+1}-2x(t_j)+x_{j-1}=p_j\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\right)(h)+q_j\,x_j(h^2)+r_j\,(h^2)$$

$$-x_{j+1}-2x(t_j)+x_{j-1}+p_j\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2}\right)(h)+q_j\,x_j(h^2)=-r_j\,(h^2)$$

$$\left(\frac{-h}{2}p_j-1\right)x_{j-1}+\left(2+h^2q_j\right)x_j+\left(\frac{h}{2}p_j-1\right)x_{j+1}=-r_j\,(h^2) \qquad (2.18)$$

Untuk $j=1,2,\dots,N-1,$ Dimana $x(t_j)=x_j$ $,j=0,1,2,\dots,N,$ $x_0=\alpha$ dan $x_N=\beta$

Jika persamaan (2.18) dibuat ke dalam bentuk matriks maka diperoleh matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1-1 & & & \\ \frac{-h}{2}p_2-1 & 2+h^2q_2 & \ddots & & 0 \\ & \frac{-h}{2}p_3-1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \frac{h}{2}p_{n-2}-1 \\ 0 & & & \frac{-h}{2}p_{n-1}-1 & 2+h^2q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2r_1+e_0 \\ -h^2r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -h^2r_{n-2} \\ -h^2r_3+e_N \end{bmatrix}$$

Dimana $e_0 = \left(\frac{h}{2}p_1 + 1\right)\alpha$ dan $e_N = \left(-\frac{h}{2}p_{N-1} + 1\right)\beta$ (Sangadji,2008).

2.7 Metode Tembak Linear (*Shooting Method*)

Definisi 2.7.1

Metode tembak linear merupakan metode yang sederhana dan mudah digunakan. Metode ini bekerja dengan cara mereduksi masalah nilai batas menjadi masalah nilai awal.

Definisi 2.7.2

Metode tembak linear sangat efektif dan mudah digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial linear dengan kondisi batas tipe *Dirichlet*. Secara umum masalah yang dapat dipecahkan dengan metode ini adalah

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \tag{2.19}$$

Dengan nilai batas $y(x_0) = \alpha, y(x_n) = \beta.$

Tanpa mengurangi artinya persamaan (2.11) dapat juga dituliskan

$$y" + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{2.20}$$

Langkah utama metode tembak linear adalah merubah masalah (2.20) menjadi masalah persamaan diferensial biasa dengan nilai awal. Dua nilai awal akan didapat sebagai berikut

$$y' = z \tag{2.21}$$

$$z' = p(x)z + q(x)y + f(x) \tag{2.22}$$

Sistem persamaan (2.21) dan (2.22) memerlukan nilai-nilai awal. Nilai awal untuk (2.21) adalah

$$y(x_0)\alpha \tag{2.23}$$

Sedangkan nilai awal (2.14) tidak diketahui sehingga dapat diasumsikan

$$y'(x_0) = z(x_0) = \boldsymbol{\xi}_1 \tag{2.24}$$

Dengan kedua nilai batas (2.23) dan (2.24) sistem persamaan diferensial dengan nilai awal (2.21) dan (2.22) dapat dipecahkan dengan salah satu teknik pemecahan persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai awal, salah satunya dengan menggunakan metode Runge-Kutta.

Dengan asumsi $\boldsymbol{\xi}_1$, solusinya $y_1(x)$ yang mempunyai nilai $y_1(x_n) = \beta_1$. Karena β_1 masih berbeda dari nilai $y(x_n)$ sebenarnya β, maka digunakan sebuah asumsi lain.

$$y'(x_0) = z(x_0) = \xi_2 \tag{2.25}$$

Dengan asumsi ini didapatkan solusi $y_2(x)$ dengan nilai $y_2(x_n) = \beta_2$. Kedua solusi $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ tidak menghasilkan $y_1(x_n)$ atau $y_2(x_n) = \beta$, karena persamaan diferensial biasa linear maka solusi sebenarnya, $y(x)$ dapat diberikan oleh superposisi dari $y_1(x)$ dan $y_2(x)$.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{2.26}$$

Selanjutnya, C_1 dan C_2dapat dicari dengan menggunakan nilai-nilai batas $y(x_0) = \alpha$ dan $y(x_n) = \beta$. Nilai $y(x_0)$ dihitung dengan (2.26) yang menghasilkan

$$\alpha = C_1\alpha + C_2\alpha \tag{2.27}$$

atau

$$C_1 + C_2 = 1 \tag{2.28}$$

sedangkan nilai $y(x_n)$ menghasilkan

$$\beta = C_1\beta_1 + C_2\beta_2 \tag{2.29}$$

Dengan mensubstitusi nilai C_1 yang diperoleh dari (2.28) ke (2.29)

$$\beta = (1 - C_2)\beta_1 + C_2\beta_2 \tag{2.30}$$

maka C_2 diperoleh

$$C_2 = \frac{\beta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} \tag{2.31}$$

dan,

$$C_1 = 1 - \frac{\beta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} \tag{2.32}$$

dengan mensubstitusikan (2.31) dan (2.32) ke (2.26) didapat

$$y(x) = \left[1 - \frac{\beta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\right] y_1\,(x) + \frac{\beta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} y_2 \tag{2.33}$$

selanjutnya dengan mendifferensialkan (2.33) diperoleh

$$y'(x) = \left[1 - \frac{\beta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\right] y'_1\,(x) + \frac{\beta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} y'_2 \tag{2.34}$$

sekarang nilai $y'(x_0)$ dapat diperoleh

$$y'(x_0) = \left[1 - \frac{\beta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}\right] \xi_1 + \frac{\beta-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} \xi_2 \tag{2.35}$$

selanjutnya diperoleh

$$\xi = \xi_1 + \frac{(\xi_2-\xi_1)}{\beta_2-\beta_1}(\beta - \beta_1) \tag{2.36}$$

Setelah $y'(x_0) = \xi$ yang tepat didapat, selanjutnya sistem persamaan diferensial nilai awal (2.22) dipecahkan dengan $z(x_0) = \xi$.

Metode tembak linear sangat bergantung pada pemilihan nilai batas awal yang tidak diketahui nilainya. Metode tembak linear akan berhasil pemakaiannya bila pemilihan batas awal yang dipilih mendekati batas yang sebenarnya. Disebut metode tembak linear karena pada dasarnya metode ini dilakukan dengan menembak satu nilai awal sebagai penyelesaian, apabila nilai tersebut kurang sesuai maka akan ditembak satu nilai di atas nilai tersebut atau di bawah nilai tersebut sampai pada akhirnya konvergen ke penyelesaian (Kosasih,2006).

2.8 Metode Runge Kutta Orde Empat

Peninjauan metode perhitungan yang praktis dimulai dengan suatu kelas metode yang luas, yang dikenal dengan metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat yang utama :

1. Metode satu langkah: untuk mencapai y_{n+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_n, y_n.
2. Mendekati ketelitian metode deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$ tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Runge-Kutta orde empat adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial $f(x,y)$, yang diketahui dengan menggunakan persamaan umum yaitu :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.37}$$

dimana,

$n = 1,2,3,4, \ldots$

$k_1 = hf(x_n, y_n)$

$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$

$k_4 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_3}{2})$ (Munir,2003).

2.9 Analisis *Error*

Dalam melakukan analisis numerik perlu untuk memperhatikan bahwa solusi yang dihitung bukanlah solusi analitik. Ketelitian dari solusi numerik dapat mengurangi nilai *error*.

Definisi 2.9.1

Misalkan ŝ adalah aproksimasi (pendekatan) ke s. *Error* mutlak adalah $E_p = |s - \hat{s}|$ dan *error* relatif adalah $R_p = \frac{|s-\hat{s}|}{|p|}$, dinyatakan bahwa s$\neq 0$ (Mathews dan Fink,2004).

III. METODELOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut :

3.2.1 Metode Beda Hingga

1. Diberikan bentuk umum persamaan diferensial linear orde dua.
2. Terdapat formula pendekatan beda hingga pada turunan pertama dan turunan kedua.
3. Mensubstitusikan formula pendekatan beda hingga ke dalam bentuk umum persamaan diferensial linear orde dua.
4. Mengubah persamaan menjadi bentuk persamaan matriks determinan
5. Menyelesaikan persamaan matriks untuk mendapatkan solusi numerik.

3.2.2 Metode Tembak Linear

1. Diberikan sebuah persamaan diferensial linear orde dua dengan syarat batas *Dirichlet.*
2. Mengubah syarat batas menjadi nilai awal
3. Mencari nilai awal yang belum diketahui.
4. Memecahkan persamaan diferensial dengan masalah nilai awal menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat untuk mendapatkan solusi numerik.

3.2.3 Membandingkan Metode Beda Hingga dengan Metode Tembak Linear

1. Mencari solusi numerik persamaan diferensial linear orde dua dengan syarat batas *Dirichlet* menggunakan metode beda hingga.
2. Mencari solusi numerik persamaan diferensial linear orde dua dengan syarat batas *Dirichlet* menggunakan metode tembak linear.
3. Mencari solusi eksak persamaan diferensial linear orde dua dengan syarat batas *Dirichlet.*
4. Mencari nilai galat (analisis *error*).
5. Membandingkan solusi numerik kedua metode dengan solusi eksak persamaan linear orde dua dengan syarat batas *Dirichlet*.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dalam kasus I dan II dengan kondisi besar jarak (h) dan jumlah partisi (N) yang sama dan dilihat dari selisih besar (nilai) rata-rata analisis *error* yaitu pada kasus I metode beda hingga besar rata-rata analisis *error* adalah 0,0005625, sedangkan untuk besar rata-rata analisis *error* dari metode tembak linear yaitu sebesar 0,000025, dan pada kasus II metode beda hingga besar rata-rata analisis *error* adalah 0,00067273, sedangkan untuk besar rata-rata analisis *error* dari metode tembak linear yaitu sebesar 0,00000909 maka dapat dikatakan bahwa metode tembak linear memiliki nilai yang lebih akurat menghampiri nilai sebenarnya (solusi eksak).

5.2 Saran

Mengenai hasil keakuratan kedua metode tersebut penulis menggunakan metode Runge kutta orde empat untuk membantu penyelesaikan metode tembak linear (*shooting method*), maka disarankan untuk pembaca yang tertarik dengan kasus ini untuk dapat menggunakan beberapa metode lainnya seperti metode Adam Bashforth, Milne Simpson dll, dalam mambantu penyelesaian metode tembak linear.

DAFTAR PUSTAKA

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial*. Andi Offset, Yogyakarta.

Kosasih, P Buyung. 2006. *Komputasi Numerik Teori dan Aplikasi,* Andi, Yogyakarta.

Mathew, John H and Kurtis D. Fink. 1999. *Numerical Methods Using MAT-LAB.* California : Prentice Hall.

Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik*. Informatika, Bandung .

Munir, R. 2013. *Metode Numerik*. Informatika, Bandung .

Pujiyanta. 2007. *Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Sangadji. 2008. Metode Beda Hingga untuk solusi numerik Persamaan Diferensial. *Jurnal Mat Stat*, **8**(2), 132-137.

Suprihatin. 2013. *Persamaan Diferensial Biasa*. Ed. Ke-1. Andi Offset, Yogyakarta.

Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Edisi Pertama. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Wignoyosukarto, Budi. 1986. *Hidraulika Numerik*. Yogyakarta : PAU-UGM.