PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 5–PARALEL

(Skripsi)

Oleh

YULIA SARI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

DETERMINING THE NUMBER OF CONNECTED VERTEX LABELLED GRAPHS OF ORDER SIX WITH MAXIMUM FIFTEEN 5-PARALEL EDGES

By

YULIA SARI

A graph $G\ (V, E)$ is connected if there exists at least a path connecting every pair of vertices in G. Two or more edges that connect the same pair of vertices are called paralled edges. There are many graphs that can be constructed if given n vertices and m edges. In this research we will discuss the formula for finding the number of connected vertex labelled graphs of order six with maximum fifteen $5-$parallel edges.

Keywords: graph, connected graph, parallel edges, sixth order

ABSTRAK

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 5–PARALEL

Oleh

YULIA SARI

Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga yang tak kosong dan memuat elemen-elemen yang disebut *vertex* atau titik, dan E adalah himpunan garis atau *edge* yang menghubungkan setiap titik di G. Graf G dikatakan graf terhubung jika ada *path* (lintasan) yang menghubungkan setiap pasangan titik di G. Dua garis atau lebih yang menghubungkan dua titik yang sama disebut garis paralel. Jika ada n titik dan m garis maka dapat ditentukan jumlah graf yang dapat dibentuk baik terhubung atau tak terhubung. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang menentukan formula untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel tititk berorde enam dengan maksimal lima belas garis 5−paralel.

Kata kunci: graf, graf terhubung, garis paralel, orde enam

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 5–PARALEL

Oleh

Yulia Sari

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi	: **PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 5–PARALEL**
Nama Mahasiswa	: Yulia Sari
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031058
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.	**Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**
NIP. 19631108 198902 2 001	NIP. 19620513 198603 1 003

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **23 April 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Yulia Sari
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031058
Judul	: Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Enam dengan Maksimal Lima Belas Garis 5-Paralel
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 23 April 2019

Penulis

METERAI TEMPEL

3378DAFF752554744

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Yulia Sari
NPM. 1517031058

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Yulia Sari, anak pertama dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Labuhan Ratu pada tanggal 22 Agustus 1997 oleh pasangan Bapak Yulman dan Ibu Sri Sudarmi.

Penulis menyelesaikan pendidikan taman kanak-kanak di TK Pertiwi Labuhan Ratu Lampung Timur pada tahun 2003. Pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Labuhan Ratu Lampung Timur pada tahun 2009. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Labuhan Ratu Lampung Timur pada tahun 2012. Pendidikan di sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Labuhan Ratu Lampung Timur pada tahun 2015.

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SNMPTN undangan. Pada tahun 2018, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 40 hari di kantor Dinas Pekerjaan Umum dan Penataan Ruang Provinsi Lampung. Dan pada tahun yang sama, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 32 hari di Desa Purwosari, Kecamatan Batanghari Nuban, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

"Ketika kamu berfikir untuk menyerah, coba lihatlah raut wajah kedua orang tuamu"

(Yulia Sari)

"Apabila apa yang di depan membuatmu takut, dan apa yang di belakang membuatmu luka, lihatlah ke atas. Allah tidak pernah gagal menolongmu"

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Wasyukurillah.

Puji dan syukur tiada hentinya terpanjatkan kepada Allah S.W.T Tiada kata yang lebih mampu mewakili setiap rasa bahagia yang ingin tercurahkan, ku persembahkan karya kecil ini untuk:

Kedua orang tuaku, Ayah dan Emak

Kedua saudaraku, Yusi Refika dan Rizki Wijaya, terimakasih untuk semua pengorbanan, cinta kasih, canda dan tawa yang tidak akan terbayarkan oleh apapun

Dosen-dosen Pembimbing dan Pembahas yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi kepada penulis

Sahabat-sahabatku tersayang, terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda, tawa, doa dan semangat yang telah diberikan

Almamaterku, Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillahirobbil'alaamiin, puji dan syukur penulis kepada Allah SWT atas izin serta ridho-Nya dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Enam dengan Maksimal Lima Belas Garis 5–Paralel". Shalawat serta salam tak lupa kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan yang baik bagi kita semua.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, bantuan, dan kerjasama dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I, yang senantiasa selalu membimbing dan memberikan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini ditengah-tengah waktu kesibukannya.
2. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan bimbingan serta saran yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas, terima kasih atas kesediaannya untuk membahas, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ayah dan Emak tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasihat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Adik-adikku: Yusi Refika dan Rizki Wijaya yang selalu berbagi canda dan tawa serta selalu menyemangati hingga diselesaikannya skripsi ini.
10. Sahabat-sahabat seperjuangan: Irmawati, Farkhana April Listari, Fadila Cahya Puri, Rahmad Hidayatulloh, M. Riski Multazam, Ario Pandu, Lut Wilianto, Fransiska Yesi Septiani, Neli Rohmatilah, yang selalu menemani hari-hari penulis selama menjalani masa perkuliahan.
11. Teman-temanku Matematika 2015, terimakasih telah memberikan warna dan keceriaan kepada penulis selama menjadi mahasiswi.
12. Almamater tercinta Universitas Lampung.
13. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 23 April 2019

Penulis,

Yulia Sari

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dapat digunakan untuk merepresentasikan suatu permasalahan. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*. Dalam kehidupan sehari-hari graf digunakan untuk menggambar berbagai struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti.

Konsep dasar teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736, ketika menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg, di Kaliningrad, Rusia. Di kota tersebut terdapat sungai Pregal yang membelah kota menjadi empat daratan terpisah. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler menyatakan dengan permodelan tertentu bahwa hal tersebut tidak mungkin terjadi. Hal tersebut dapat terjadi jika banyaknya jembatan berjumlah genap. Bentuk permodelan tersebut yang kemudian menjadi latar belakang munculnya konsep teori graf yang ada saat ini.

Setelah masa Euler, munculnya berbagai peneliti yang mengkaji tentang teori graf baik murni maupun terapan. Sebagai contoh penelitian yang dilakukan oleh Harary dan Palmer yang di publikasikan pada tahun 1973 mengenai perhitungan banyaknya graf. Namun penelitian yang dilakukannya belum bisa memberikan banyak solusi untuk perhitungan graf-graf khusus, misalnya untuk menghitung banyaknya graf terhubung maupun tak terhubung yang berlabel tanpa garis *loop* yang dapat dibentuk dari n titik dan m garis yang diberikan. Prayoga (2017) berhasil menetukan banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* dengan $n = 5$ serta $m \geq 4$ dan garis paralel maksimal 5. Graf dengan jumlah titik n dan jumlah garisnya m tentunya memiliki bentuk yang berbeda-beda. Oleh karena itu penulis tertarik untuk meneliti banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan $n = 6$ serta $m \geq 5$ dan maksimal lima belas garis 5–paralel.

1.2 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini pembahasan dibatasi hanya untuk graf terhubung berlabel titik dengan $n = 6$ serta $m \geq 5$ dan maksimal lima belas garis 5–paralel, dengan n adalah banyaknya titik dan m adalah banyaknya garis.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan maksimal lima belas garis 5–paralel, jika diberikan n titik dan m garis dengan $n = 6$ serta $m \geq 5$ agar dapat ditentukan rumus umumnya.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Mengetahui pola dalam menghitung jumlah graf terhubung jika diberikan enam titik dengan maksimal 15 garis 5–paralel.
2. Memperluas pengetahuan teori graf khusunya garis 5–paralel pada graf terhubung.
3. Sebagai bahan referensi penelitian lanjutan bagi pembaca dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika dibidang teori graf.

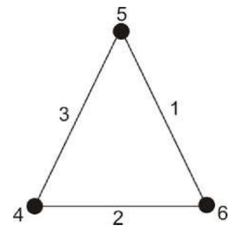
II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi, istilah-istilah yang berhubungan dengan materi yang akan dibahas pada penelitian ini.

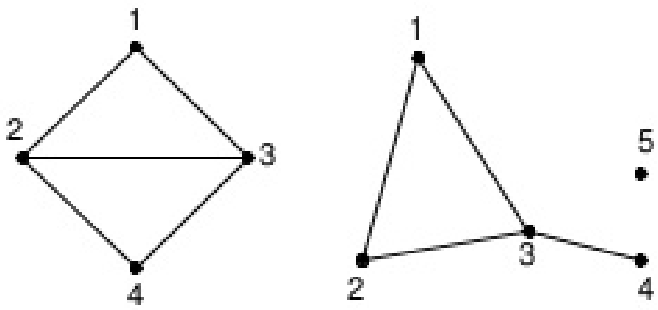
2.1 Konsep Dasar Teori Graf

Adapun konsep dasar teori graf yang perlu diketahui sebelumnya adalah mengenai graf, graf terhubung dan graf tak terhubung, garis paralel, dan graf sederhana, *loop*, *adjacent* (bertetangga) dan *incident* (menempel), *walk*, *path*, dan *cycle*, serta *degree* (derajat) dan isomorfis.

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga yang tak kosong dan memuat elemen-elemen yang disebut *vertex* atau titik, dan E adalah himpunan elemen-elemen (mungkin kosong) graf yang berbentuk garis atau disebut *edge* yang menghubungkan titik-titik di G (Deo, 1989).



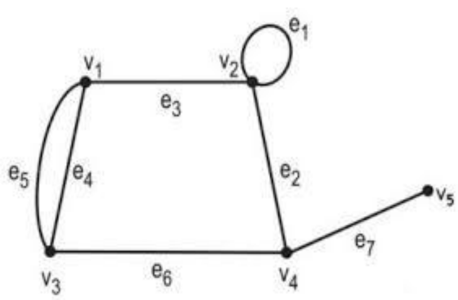
Gambar 2.1 Contoh graf



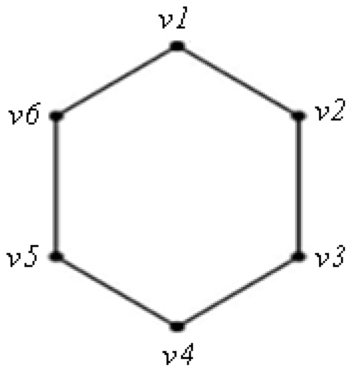
(a) (b)

Gambar 2.2 Contoh graf terhubung (a) dan tak terhubung (b)

Loop adalah garis yang memiliki titik awal dan ujung yang sama, sedangkan dua garis atau lebih yang memiliki titik ujung yang sama disebut garis paralel. Suatu graf tanpa *loop* atau garis paralel disebut dengan graf sederhana (Deo, 1989).



Gambar 2.3 Contoh graf berlabel total dengan *loop* dan garis paralel

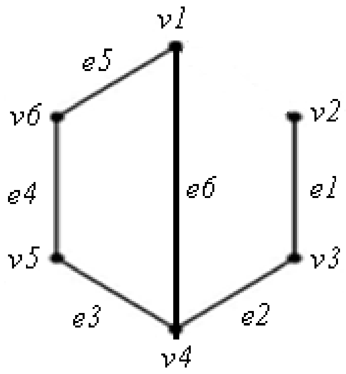


Gambar 2.4 Contoh graf berlabel titik sederhana

Dua titik dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika ada garis yang menghubungkan keduannya. Suatu garis dikatakan *incident* (menempel) dengan suatu titik jika titik tersebut merupakan salah satu ujung dari garis tersebut (Deo, 1989).

Walk adalah barisan berhingga dari titik dan garis yang dimulai dan diakhiri oleh titik, sehingga setiap garis *incident* (menempel) dengan titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *close walk*. Sedangkan *walk* yang melalui titik yang berbeda disebut *path* (lintasan). *Path* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle*.

Misalkan u dan v adalah pasangan titik pada graf G, dan jika untuk setiap titik tersebut terdapat *path* (lintasan) yang menghubungkan dari u ke v disebut graf terhubung, jika tidak maka disebut graf tak terhubung (Munir, 2005).

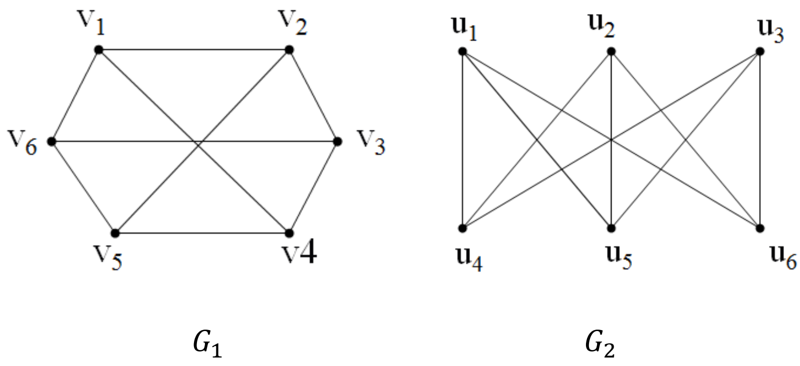


Gambar 2.5 Contoh graf berlabel total

Contoh	*Walk*	: $v_2\ e_1\ v_3\ e_2\ v_4\ e_6\ v_1\ e_5\ v_6\ e_4\ v_5$
	Path	: $v_4\ e_3\ v_5\ e_4\ v_6\ e_5\ v_1$
	Cycle	: $v_1\ e_6\ v_4\ e_3\ v_5\ e_4\ v_6\ e_5\ v_1$

Banyaknya garis yang menempel pada satu titik disebut sebagai *degree* (derajat), dengan *loop* dihitung dua garis yang berarti memiliki dua derajat. *Degree* dari titik v_i dinotasikan dengan $d(v_i)$.

Dua graf dikatakan isomorfis jika memiliki jumlah titik dan garis yang sama dengan mempertahankan sifat ketetanggaannya walaupun digambarkan dengan cara yang berbeda (Deo, 1989).



Gambar 2.6 Contoh graf yang saling isomorfis

Kedua graf tersebut dikatakan isomorfis karena:

1. Memiliki jumlah titik dan garis yang sama yaitu 6 titik dan 9 garis.
2. Banyaknya derajat tiap titiknya sama yaitu berderajat 3.
3. Mempertahankan sifat ketetanggaan. Hal ini dapat dilihat dengan mendefinisikan suatu fungsi bijektif. Untuk contoh Gambar 2.6 fungsi bijektif didefinisikan sebagai berikut:

$$x: V(G_1) \rightarrow V(G_2) \text{ dan } y: E(G_1) \rightarrow E(G_2)$$

Dalam G_1, ada 3 garis yang yang keluar dari v_1. Titik yang memiliki sifat seperti itu dalam G_2 adalah titik u_1, sehingga dibuat fungsi x sedemikian sehingga:

$$x(v_1) = u_1 , x(v_6) = u_4 , x(v_3) = u_2 , x(v_4) = u_5 , x(v_5) = u_3 , x(v_2) = u_6$$

Adapun fungsi y dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y\big((v_1\,,v_6)\big) = (u_1\,,u_4);\, y\big((\,v_1\,,v_4)\big) = (u_1\,,u_5);\, y\big((v_1\,,v_2)\big) = (u_1\,,u_6)$$

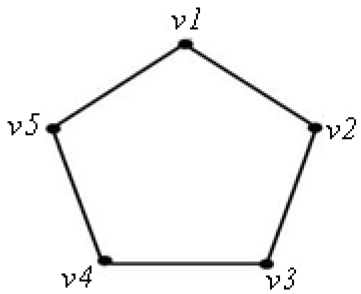
$$y\big((v_5\,,v_6)\big) = (u_3\,,u_4);\, y\big((\,v_5\,,v_2)\big) = (u_3\,,u_6);\, y\big((v_5\,,v_4)\big) = (u_3\,,u_5)$$

$$y\big((v_3\,,v_2)\big) = (u_2\,,u_6);\, y\big((\,v_3\,,v_6)\big) = (u_2\,,u_4);\, y\big((v_3\,,v_4)\big) = (u_2\,,u_5)$$

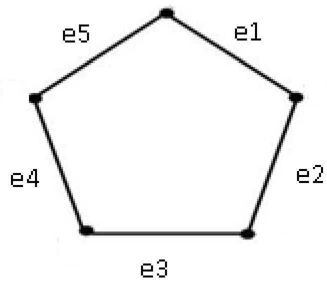
Pada fungsi x dan y dapat dilihat bahwa G_1 isomorfis dengan G_2.

2.2 Pelabelan Graf

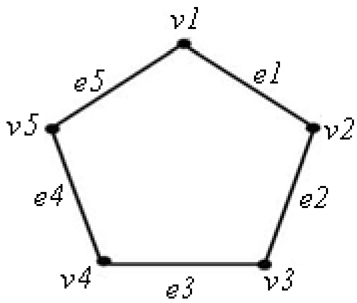
Graf berlabel adalah graf yang setiap titik atau garisnya diberi nilai atau label. Label yang diberikan pada titik disebut sebagai pelabelan titik, label yang diberikan pada tiap garis disebut pelabelan garis, dan jika label diberikan pada tiap garis dan titik disebut sebagai pelabelan total (Munir, 2005).



Gambar 2.7 Contoh graf dengan pelabelan titik



Gambar 2.8 Contoh graf dengan pelabelan garis



Gambar 2.9 Contoh graf dengan pelabelan total

2.3 Konsep Dasar Teknik Pencacahan

1. Faktorial

   Menurut Siang pada tahun 2006, misalkan n adalah bilangan bulat positif. Besaran n faktorial (simbol $n!$) didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat antara n hingga 1. Untuk $n = 0$, $0! = 1$.

   Bukti:

$$n! = n \times (n-1)!$$

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

jika dimasukan nilai $n = 1$, maka:

$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

$$0! = \frac{1}{1}$$

$$0! = 1$$

2. Permutasi

Permutasi adalah suatu urutan r objek yang terbentuk oleh sebagian atau seluruh objek dengan mengambil dari n objek yang tersedia. Secara umum, permutasi r objek dari n objek dapat dinotasikan dengan persamaan:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dalam permutasi, objek yang sudah terpilih tidak dapat di pilih kembali (Siang, 2006).

Contoh:

Dalam suatu kelas yang terdiri dari 40 orang akan dipilih 4 orang yang akan menjadi ketua, wakil ketua, sekertaris, dan bendahara. Tentukan banyaknya cara yang dapat dipakai untuk memilih ketua, wakil ketua, sekertaris, dan bendahara untuk perangkat kelas tersebut?

Jawaban:

$$P(40\,, 4) = \frac{40!}{(40-4)!} = \frac{40!}{36!} = 2.193.360$$

3. Kombinasi

Jumlah pemilihan yang tak terurut dengan mengambil n elemen dengan $n \geq r$ disebut kombinasi. Pada kombinasi urutan pemilihan tidaklah dipertimbangkan. Banyaknya kombinasi r dari n objek dapat dinotasikan dengan persamaan:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidaklah diperhitungkan. Hal yang diperhatikam adalah objek yang muncul (Siang, 2006).

Contoh:

Dalam suatu pertemuan terdapat 15 orang yang belum saling kenal. Agar mereka saling kenal, maka mereka saling berjabat tangan. Berapa banyak cara jabat tangan yang terjadi?

Jawaban:

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\,(15-2)!} = 105$$

4. Barisan Aritmatika Tingkat Tinggi

Secara umum barisan bilangan dapat dinotasikan dengan $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$. Beda dari suku yang berurutan adalah selisih setiap suku-sukunya $a_n - a_{n-1}$. Misalkan suatu barisan $(a_n) = (3, 4, 8, 15, 25, 38 \dots)$, sehingga selisih setiap suku yang berurutan sebagai berikut:

a_n	3		4		8		15		25		38
b_n		1		4		7		10		13	
Beda			3		3		3		3		

Jika diperhatikan barisan (a_n) tingkat dua menghasilkan barisan (b_n) tingkat satu sebagai barisan aritmatika yang memiliki beda hasil $= 3$. Sehingga (a_n) dinamakan barisan aritmatika tingkat dua (Imail, 2014).

5. *Cramer's Rule*

Metode berikut memberikan rumus untuk solusi dari sistem linear tertentu dengan n persamaan dan n faktor yang tidak diketahui. Jika $Ax = b$ adalah suatu sistem dari n persamaan linear dengan n faktor yang tidak diketahui sedemikian rupa sehingga $det(A) \neq 0$, maka sistem ini memiliki solusi yang unik. Solusinya adalah:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \dots \dots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

dimana A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke$-j$ dari A dengan entri-entri pada matriks $b = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \dots \\ b3 \end{bmatrix}$, dengan $j = 1, 2, \dots, n$ (Anton and Rorres, 2004).

III. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan diberikan waktu dan tempat penelitian, penelitian yang telah dilakukan yang berkaitan, serta metode yang digunakan dalam penelitian ini.

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Penelitian yang Telah Dilakukan

Agnarsson and Raymond pada tahun 2007 melakukan perhitungan terhadap graf sederhana dan diberikan $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ dengan hasil sebagai berikut:

1. Graf g_n dengan n sebagai titiknya merupakan graf sederhana, maka banyaknya graf g_n adalah:

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$$

2. Graf $g_n(m)$ dari graf sederhana yang memiliki n titik dan m garis, maka banyaknya graf g_n adalah:

$$g_n(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

Diberikan $n\,, m \in \mathbb{N}$. Graf $g_n(m)$ tidak memiliki *loop* dimana n sebagai titik dan m sebagai garis, maka banyaknya graf $g_n(m)$ adalah:

$$g_n = \binom{m + \binom{n}{2} - 1}{m}$$

Selanjutnya, Wamiliana, dkk. (2016) melakukan penelitian tentang graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$ dapat dirumuskan secara umum, yaitu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}\left(G'_{5,m}\right) &= \mathbb{N}\left(G'_{5,m}\right) + \sum_{g=1}^{6} \mathbb{N}\left(G'_{5,m,g}\right) \\
&= \binom{m+4}{4} + \mathbb{N}\left(G'_{5,m,1}\right) + \mathbb{N}\left(G'_{5,m,2}\right) + \mathbb{N}\left(G'_{5,m,3}\right) + \mathbb{N}\left(G'_{5,m,4}\right) \\
&\quad + \mathbb{N}\left(G'_{5,m,5}\right) + \mathbb{N}\left(G'_{5,m,6}\right) \\
&= \binom{m+4}{4} + 10\binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} \\
&\quad + 85 \times \binom{m}{4} + 30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4}
\end{aligned}$$

dengan:

$\mathbb{N}\left(G'_{5,m}\right)$ = jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$.

Pada tahun 2017, Amanto dkk.,dalam penelitiannya banyaknya graf tak terhubung berlabel titik menggunakan garis paralel atau *loop* mendapatkan hasil sebagai berikut:

$$\mathbb{N}\left(G'_{4,m,gi}\right) = \mathbb{N}(G_{4,m,g0}) + \mathbb{N}(G_{4,m,g1}) + \mathbb{N}(G_{4,m,g2}) + \mathbb{N}(G_{4,m,g3})$$

$$\mathbb{N}\left(G'_{4,m,gi}\right) = \binom{m+3}{3} + \tfrac{3}{2}m\binom{m+3}{3} + 15\binom{m+3}{5} + 4\binom{m+3}{6}$$

dengan:

n = banyaknya titik

m = banyaknya garis

gi = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu

$i = 0, 1, 2, 3$

$G'_{4,m,gi}$ = graf tak terhubung berlabel dengan garis paralel atau *loop* dengan n titik, m garis, dan gi = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu.

$\mathbb{N}\left(G'_{4,m,gi}\right)$ = Jumlah $G_{4,m,gi}$

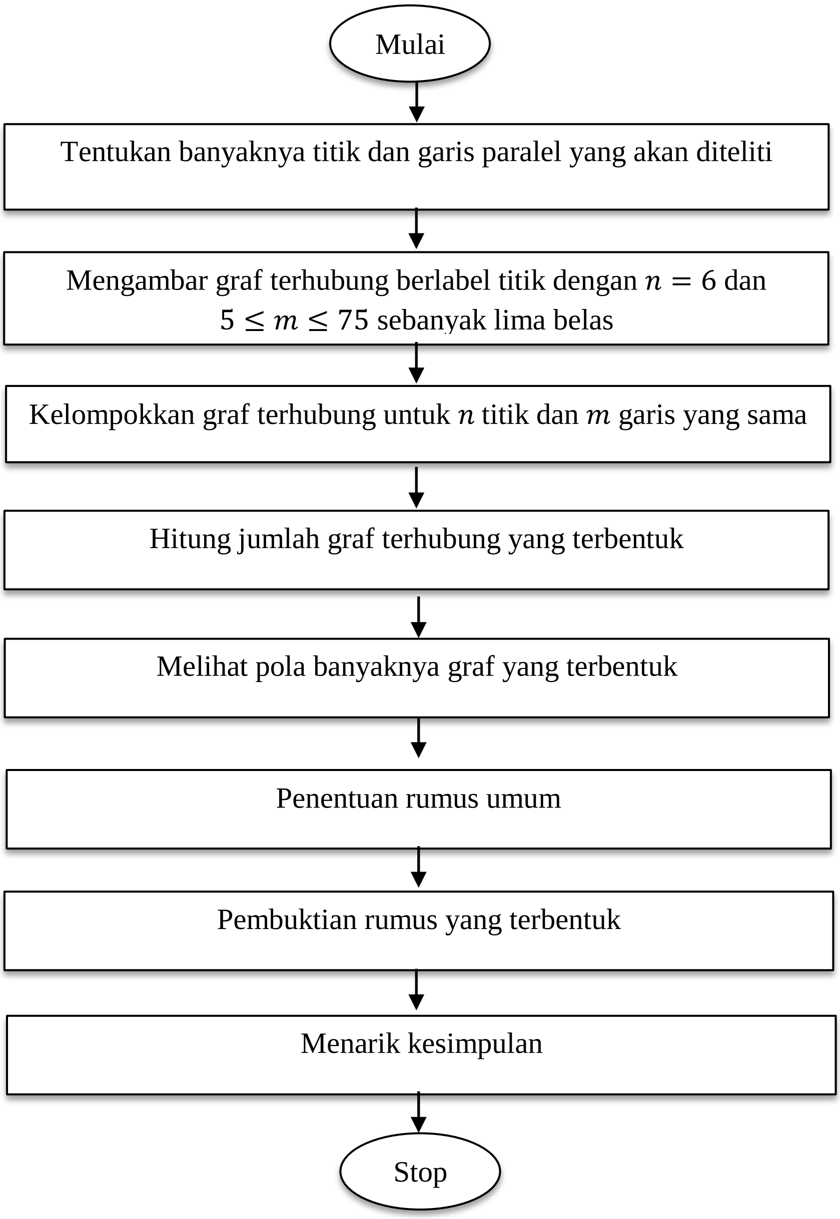
3.3 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengumpulkan bahan-bahan *literature* serta studi kepustakaan yang berhubungan dengan graf.
2. Menggambar graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* untuk n titik sebanyak 6 dengan $5 \leq m \leq 75$ maksimal lima belas.
3. Mengelompokkan graf terhubung untuk n titik dan m garis yang sama.

4. Menghitung jumlah graf terhubung yang terbentuk.
5. Melihat pola banyaknya graf yang terbentuk.
6. Menentukan rumus umum.
7. Membuktikan rumus yang terbentuk.
8. Menarik kesimpulan.

Langkah-langkah penelitian dapat dinyatakan dalam bentuk diagram alir sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram alir metode penelitian

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil konstruksi graf terhubung berlabel titik berorde enam dengan maksimal lima belas garis 5–paralel maka diperoleh kesimpulan bahwa:

Jumlah graf terhubung berlabel titik berorde enam dengan maksimal lima belas garis 5–paralel untuk $n = 6, 5 \leq m \leq 75$, diperoleh rumus yakni:

a. $$\mathbb{N}(G_{6,m,5}) = \begin{cases} \frac{81}{2}(m^2 + 18m - 83)\ ;\ m = 5, 9, 13 \\ \frac{81}{2}(m^2 - 78m + 1357)\ ;\ m = 17, 21, 25 \end{cases}$$

b. $$\mathbb{N}(G_{6,m,6}) = \begin{cases} -\frac{165}{4}(m^3 - 36m^2 + 320m - 888)\ ;\ m = 6, 10, 14, 18 \\ \frac{165}{4}(m^3 - 72m^2 + 1616m - 10632)\ ;\ m = 18, 22, 26, 30 \end{cases}$$

c. $$\mathbb{N}(G_{6,m,7}) = \begin{cases} -\frac{555}{8}(m^3 - 45m^2 + 491m - 1623)\ ;\ m = 7, 11, 15, 19 \\ \frac{555}{8}(m^3 - 81m^2 + 2003m - 13707)\ ;\ m = 23, 27, 31, 35 \end{cases}$$

d. $$\mathbb{N}(G_{6,m,8}) = \begin{cases} -\frac{385}{4}\left(\frac{17}{128}m^4 - \frac{109}{16}m^3 + \frac{871}{8}m^2 - 743m + 1872\right); \\ m = 8, 12, 16, 20, 24 \\ -\frac{385}{4}\left(\frac{17}{128}m^4 - \frac{299}{16}m^3 + \frac{7711}{8}m^2 - 21373m + 168672\right); \\ m = 24, 28, 32, 36, 40 \end{cases}$$

e. $\mathbb{N}\left(G_{6,m,9}\right) =$

$$\begin{cases} -\frac{555}{128}\left(\frac{29}{4}m^4 - 443m^3 + \frac{17795}{2}m^2 - 76111m + \frac{952581}{4}\right); \\ m = 9, 13, 17, 21, 25 \\ -\frac{555}{128}\left(\frac{29}{4}m^4 - 1123m^3 + \frac{127955}{2}m^2 - 1575911m + \frac{55855461}{4}\right); \\ m = 29, 33, 37, 41, 45 \end{cases}$$

f. $\mathbb{N}\left(G_{6,m,10}\right) =$

$$\begin{cases} \frac{79}{128}\left(\frac{1}{32}m^5 - \frac{435}{16}m^4 + \frac{7195}{4}m^3 - \frac{81825}{2}m^2 + \frac{792009}{2}m - 1394955\right); \\ m = 10, 14, 18, 22, 26, 30 \\ -\frac{79}{128}\left(\frac{1}{32}m^5 + \frac{285}{16}m^4 - \frac{14405}{4}m^3 + \frac{473775}{2}m^2 - \frac{13103991}{2}m + 64439685\right); \\ m = 30, 34, 38, 42, 46, 50 \end{cases}$$

g. $\mathbb{N}\left(G_{6,m,11}\right) =$

$$\begin{cases} -\frac{77}{2048}\left(\frac{17}{2}m^5 - \frac{1185}{2}m^4 + 12825m^3 - 97485m^2 - \frac{74147}{2}m + \frac{4817115}{2}\right); \\ m = 11, 15, 19, 23, 27, 31 \\ \frac{77}{2048}\left(\frac{17}{2}m^5 - \frac{4425}{2}m^4 + 226665m^3 - 11393445m^2 - \frac{559505533}{2}m \right. \\ \left. - \frac{5329498125}{2}\right);\ m = 35, 39, 43, 47, 51, 55 \end{cases}$$

h. $\mathbb{N}\left(G_{6,m,12}\right) =$

$$\begin{cases} \frac{21}{16}\left(\frac{7}{512}m^6 - \frac{259}{128}m^5 + \frac{3755}{32}m^4 - \frac{27345}{8}m^3 + 53569m^2 - 432352m \right. \\ \left. +1410560\right);\ m = 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 \\ \frac{21}{2}\left(\frac{7}{4096}m^6 - \frac{497}{1024}m^5 + \frac{14465}{256}m^4 - \frac{220335}{64}m^3 + \frac{461957}{4}m^2 - 2019007m \right. \\ \left. +14394160\right);\ m = 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60 \end{cases}$$

i. $\mathbb{N}(G_{6,m,13}) =$

$$\begin{cases} \frac{5}{2048}\left(\frac{23}{12}m^6 - \frac{673}{2}m^5 + \frac{268565}{12}m^4 - 729955m^3 + \frac{151427537}{12}m^2 \right. \\ \left. -\frac{222589257}{2}m + \frac{1577919585}{4}\right);\ m = 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37 \\ -\frac{5}{461}\left(\frac{60031}{104448}m^6 - \frac{3363}{17}m^5 + \frac{2964518575}{104448}m^4 - \frac{555489755}{256}m^3 + \right. \\ \left. +\frac{9718363412749}{104448}m^2 - \frac{9207881616797}{4352}m + \frac{691142906379735}{34816}\right); \\ m = 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65 \end{cases}$$

j. $\mathbb{N}(G_{6,m,14}) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{256}\left(\frac{43}{2688}m^7 - \frac{557}{192}m^6 + \frac{20701}{96}m^5 - \frac{411005}{48}m^4 + \frac{4758511}{24}m^3 \right. \\ \left. -\frac{32349023}{12}m^2 + \frac{280026091}{14}m - 62587005\right); \\ m = 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42 \\ -\frac{1}{256}\left(\frac{43}{2688}m^7 - \frac{1249}{192}m^6 + \frac{107893}{96}m^5 - \frac{5126905}{48}m^4 + \frac{144549631}{24}m^3 \right. \\ \left. -\frac{2415052171}{12}m^2 + \frac{51606197603}{14}m - 28544560905\right); \\ m = 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70 \end{cases}$$

k. $\mathbb{N}(G_{6,m,15}) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{80640}m^7 - \frac{451}{184320}m^6 + \frac{18293}{92160}m^5 - \frac{317693}{36864}m^4 + \frac{10049683}{46080}m^3 \right. \\ \left. -\frac{596364469}{184320}m^2 + \frac{1873716211}{71680}m - \frac{364001651}{4096}\right); \\ m = 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{80640}m^7 - \frac{989}{184320}m^6 + \frac{90923}{92160}m^5 - \frac{3679747}{36864}m^4 + \frac{276259333}{46080}m^3 \right. \\ \left. -\frac{39353384171}{184320}m^2 + \frac{298966760781}{71680}m - \frac{141203828557}{4096}\right); \\ m = 47, 51, 55, 59, 63, 67, 71, 75 \end{cases}$$

dengan:

$\mathbb{N}(G_{n,m,t}) =$ banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde n dengan m garis dan t adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda.

5.2 Saran

Penelitian dapat di lanjutkan untuk menentukan rumus umum jumlah graf terhubung berlabel maksimal garis 5–paralel untuk $n \geq 7$.

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, G. and Greenlaw, R. 2007. *Graph Theory Modeling, Applications, and Algorithms*. Pearson/Prentice education Inc., New Jersey.

Amanto, Wamiliana, Mustofa Usman, dan Reni Permata Sari, 2017. Counting the Number of Disconnectected Vertex Laeblled Graph with Order Maksimal Four. *Science International*, Vol.29, No.6, Hal. 1181-1186.

Anton, Howard and Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer edisi 8*. Erlangga. Jakarta.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc., New York.

Harary, F. and Palmer, E.M. 1973. *Graphical Enumeration*. Academic Press, Inc. (London) Ltd., London.

Imail, S. 2014. Suku Ke-n Barisan Aritmatika Tingkat Dua, Tiga dan Empat denganPendekatanAkarKarakteristik.Repository.ung.ac.id/karyailmiah/show/432/suku-ke-n-barisan-aritmetika-tingkat-dua-tiga-dan-empat-dengan-pendekatan-akar-karakteristik.html. Diakses tanggal 10 November 2018, Pukul 11.00 WIB.

Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Informatika Bandung, Bandung.

Prayoga, N.A. 2017. Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Tanpa *Loop* Berorde Lima dengan Garis Paralel Maksimal Lima. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Siang, J, Jeng. 2006. *Matematika Diskrit pada Ilmu Komputer*. Edisi Ketiga. C.V Andi Offset, Yogyakarta.

Wamiliana, Amanto, dan Grita Tumpi N. 2016. Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five Without Paralel Edges. *International Series on Interdisciplinary Science and Technology*. **1**(1): 4–7.