ANALISIS KESTABILAN VAKSINASI MODEL SIR PADA STUDI KASUS PENYAKIT *TUBERCULOSIS* (TBC)

(Skripsi)

Oleh

Dina Shabrina

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

ANALYSIS OF SIR MODEL VACCINATION STABILITY IN THE CASE STUDY OF TUBERCULOSIS DISEASE.

By

Dina Shabrina

The effect of vaccination can help to reduce the spread of tuberculosis (TB). One way to help controlling the spread of disease is using mathematical models, the name is SIR (Susceptible, Infected, Recovered). In this research, the SIR (Susceptible, Infected, Recovered) model produces two equilibrium points, are disease-free equilibrium points and disease endemic equilibrium points. The analysis conducted produces an analysis of vaccine reproduction ratio. Furthermore, numerical simulations are performed using the runge-kutta method to describe the stability of balance points.

Key words: Vaccine, Mathematical Models, SIR model, Stability, Rungge-Kutta

ABSTRAK

ANALISIS KESTABILAN VAKSINASI MODEL SIR PADA STUDI KASUS PENYAKIT *TUBERCULOSIS* (TBC).

Oleh

Dina Shabrina

Pengaruh vaksinasi dapat membantu dalam mengurangi penyebaran penyakit *tuberculosis* (TBC). Salah satu cara untuk membantu mempermudah mengendalikan penyebaran penyakit dengan menggunakan model matematika yaitu model SIR (*Susceptible*, *Infected*, *Recovered*). Pada penelitian ini, model SIR (*Susceptible*, *Infected*, *Recovered*) menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Analisis yang dilakukan menghasilkan analis rasio reproduksi vaksin. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dengan metode runge-kutta untuk menggambarkan kestabilan titik kesetimbangan.

Kata kunci: Vaksin, Model Matematika, Model SIR, Kestabilan, Runge-Kutta.

ANALISIS KESTABILAN VAKSINASI MODEL SIR PADA STUDI KASUS PENYAKIT *TUBERCULOSIS* (TBC)

Oleh

Dina Shabrina

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
Sarjana Sains

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **ANALISIS KESTABILAN VAKSINASI MODEL SIR PADA STUDI KASUS PENYAKIT *TUBERCULOSIS* (TBC)**

Nama Mahasiswa : *Dina Shabrina*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031088

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 19700831 199903 1 002

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Amanto, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **13 Maret 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	**Dina Shabrina**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1517031088**
Jurusan	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Analisis Kestabilan Vaksinasi Model SIR Pada Studi kasus Penyakit *Tuberculosis* (TBC).

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institute lain.

Bandar Lampung, 13 Maret 2019

Yang Menyatakan,

METERAI TEMPEL
6000 ENAM RIBU RUPIAH

Dina Shabrina

NPM. 1517031088

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Lenteng Agung, Jakarta Selatan pada tanggal 25 Januari 1997. Sebagai Anak kedua dari dua bersaudara dengan pasangan Bapak Adri dan Ibu Sri Sumaryani. Penulis menyelesaikan pendidikan di TK Islam Soraya Salsabil tahun 2003. SD Islam Al-Fajar Bekasi tahun 2009, SMP Islam Al-Fajar Bekasi tahun 2012 dan SMA Negeri 11 Bekasi tahun 2015.

Selanjutnya pada tahun 2015 penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam melalui jalur Mandiri Unila. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif di kegiatan kampus yaitu HIMATIKA FMIPA UNILA sebagai anggota biro kesekretariatan dari tahun 2015-2016, dan BEM FMIPA UNILA sebagai anggota departemen hubungan luar dan pengabdian masyarakat tahun 2017.

Penulis melakukan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di PT. Perkebunan Nusantara VII Unit Pabrik Karet Pematang Kiwah dengan judul “Perbandingan Tiga Metode Solusi Awal Layak Pada Data Efisiensi Energi Pemakaian KWH PLN Unit Mesin Bulan Januari 2011 di PTPN VII Unit Pabrik Karet Pematang Kiwah”. Kemudian penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Marga Jaya Indah, Kecamatan Pagar Dewa, Kabupaten Tulang Bawang Barat, Provinsi Lampung.

Selanjutnya penulis melakukan penelitian “Analisis Kestabilan Vaksinasi Model SIR pada Studi Kasus Penyakit Tuberculosis (TBC)” sebagai tugas akhir di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNILA.

MOTTO

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan" (Qs. Al Insyirah :5)

"I can do it"

PERSEMBAHAN

Puji syukur Kehadirat Allah SWT,

dengan segala kerendahan hati dan ketulusan hatiku, kupersembahkan karya kecilku ini untuk:

Mama tercinta, yang telah melahirkanku

Mama tercinta, yang telah melahirkanku

Mama tercinta, yang telah melahirkanku

Papa tercinta, yang telah membesarkanku dengan tulus dan kasih sayangnya, serta selalu mendukungku.

Kakak sera keluarga besarku yang selalu memotivasiku

Dan, Almamater yang kubanggakan

UNIVERSITAS LAMPUNG

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Yang Maha Esa, karena atas rahmat dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penelitian sebagai tugas akhir penulis. Tugas akhir ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana Matematika di Jurusan Matematika Universitas Lampung dan berjudul "Analisis Kestabilan Vaksinasi Model SIR Pada Studi Kasus Penyakit Tuberculosis (TBC)". Dalam penyusunan tugas akhir ini, penulis banyak menghadapi kesulitan. Namun berkat bantuan dan dorongan dari berbagai pihak, akhirnya penulis dapat menyelesaikannya. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. Sebagai pembimbing pertama yang telah memberikan bimbingan dan arahan yang mendukung dari awal sampai akhir penulisan.
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. Sebagai pembimbing II yang telah mengoreksi format penulisan, memberikan kritik dan saran selama penulisan skripsi.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si sebagai penguji yang telah mengoreksi kekurangan, memberi kritik dan saran selama penulisan skripsi.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D sebagai Pembimbing Akademik sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila, yang telah memberikan bimbingan serta nasehat dari awal perkuliahan sampai menyelesaikan tugas akhir.

5. Bapak Drs. Suratman, M. Sc. selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen serta karyawan di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.
7. Kedua orang tuaku, papa dan mama. Kakak – kakak ku, mbah putri, nenek, serta keluarga besarku yang tercinta yang selalu mendoakan dan selalu mendukung baik saat suka maupun duka.
8. Sahabat - sahabatku Siti Aminah, Dwi Wahyu Lestari, Wulan Hikmatul Sholehah, Riska Apriyani, Elisabeth Dastia, Sarah Sabila, dan Anantama. yang selalu men*support*ku.
9. Teman canda tawa Afrisca Hartianeza, Elita Dwi Putriani, Hanny Ayu Mutiara, Annisa Septiana dan Ayu Astuti, yang telah memberikan banyak keceriaan, dan bantuan.
10. Teman – teman KKN Desa Marga Jaya Indah. Listiani, Ana, dan Yumai, yang telah memberikan semangat dan motivasi.
11. Rekan-rekan seperjuangan matematika angkatan 2015 yang selama ini memberikan semangat, candaan dan motivasi.

Bandar Lampung, 13 Maret 2019

Penulis

Dina Shabrina

DAFTAR ISI

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Tuberculosis yang juga dikenal dengan singkatan TBC, merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh basil *Mycobacterium Tuberculsois.* Saat tubuh sehat, sistem kekebalan tubuh dapat memberantas basil *tuberculosis* yang masuk ke dalam tubuh. Tetapi sistem kekebalan tubuh juga terkadang bisa gagal dalam melindungi tubuh. Basil *tuberculosis* yang gagal diberantas sepenuhnya bisa bersifat tidak aktif untuk beberapa waktu sebelum kemudian menyebabkan gejala-gejala TBC. Gejala yang paling umum dari penyakit TBC adalah berupa batuk, berat badan turun, tidak nafsu makan, demam, keringat di malam hari, batuk berdarah, nyeri dada, dan lelah. Jenis batuk juga bisa berdahak yang berlangsung selama lebih dari 21 hari.

Pada penularannya, bakteri *tuberculosis* menyebar melalui udara ketika seseorang dengan infeksi TBC aktif batuk, bersin, atau menyebarkan butiran air liur mereka melalui udara. Kuman yang keluar dari batuk atau bersin penderita TBC dapat bertahan di udara lembab yang tidak terpapar sinar matahari selama berjam-jam, bahkan berminggu-minggu. Akibatnya, setiap orang yang berdekatan dan memiliki kontak dengan penderita TBC secara langsung berpotensi menghirupnya dan akhirnya tertular. Selain itu, seseorang yang telah terkena penyakit TBC beresiko terhadap komplikasi *tuberculosis* yang dapat menyebar ke bagian tubuh lain. Beberapa komplikasi yang mungkin terjadi adalah nyeri tulang punggung, meningitis, kerusakan sendi, gangguan hati, ginjal, jantung, dan gangguan mata.

Namun, basil *Mycobacterium Tuberculosis* , dapat diatasi oleh vaksinasi. Vaksin yang berpengaruh dapat mencegah penyakit TBC adalah vaksin Basil *Calmette-Guerin* (BCG). Vaksin ini terbuat dari bakteri *tuberculosis* yang telah dilemahkan dan tidak akan meyebabkan sang penerima vaksin menjadi sakit.

Karenanya penyakit TBC mendapat perhatian khusus dari masyarakat dan pemerintah tak terkecuali para ilmuan karena dapat mengancam kehidupan manusia. Mengingat pentingnya pengetahuan lebih lanjut mengenai TBC, maka diperlukan suatu model matematika dalam penyebaran penyakit TBC.

Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan menggunakan model SIR. Model SIR terbagi dalam tiga kelompok populasi. Kelompok pertama adalah kelompok yang sehat tetapi dapat terinfeksi. Kelompok kedua adalah kelompok yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit. Sedangkan kelompok ketiga adalah kelompok yang telah sembuh dan kebal dari penyakit.

Sedangkan metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan metode numerik. Metode numerik dipakai untuk mensimulasikan dengan program *Matlab R2013b* karena dapat menyelesaikan masalah nonlinear dan menghasilkan pendekatan yang mendekati solusi sebenarnya. Maka, dari banyaknya metode numerik, salah satu yang digunakan adalah metode Runge-kutta sebagai penjabaran dalam mengerjakan metode numerik.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan analisis kestabilan vaksinasi dalam penyakit *tuberculosis* (TBC) dengan menggunakan model SIR.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Didapatkan model matematika penyakit *tuberculosis* (TBC) dan analisis kestabilannya.
2. Pengetahuan tentang pemodelan penyakit *tuberculosis* (TBC).
3. Pengetahuan tentang pengaplikasian metode Runge Kutta.
4. Mengetahui akan pentingnya ilmu dan terapan matematika pada dunia kesehatan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan fungsi yang belum diketahui, atau persamaan itu mungkin juga melibatkan fungsi itu sendiri dan kosntanta. Dari turunan yang membentuk dalam persamaan diferensial akan menentukan jenis dan klasifikasi persamaan diferensial itu sendiri (Prayudi, 2006).

2.2. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dengan konsisten.

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= g_1\,(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= g_2\,(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= g_n\,(t, x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t, dan g, adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t (Neuhauser, 2004).

2.3. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika x adalah fungsi dari t, maka contoh persamaan diferensial biasa adalah

$$\frac{dx}{dt} = t^2 \cos x \tag{2.2}$$

dimana persamaan tersebut memiliki order satu. Order dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tidak diketahui (peubah tidak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial (Campbell & Haberman, 2008).

2.4. Pemodelan Matematika

Model adalah representasi penyederhanaan dari sebuah realita yang kompleks (biasanya bertujuan untuk memahami realita tersebut) dan mempunyai ciri-ciri yang sama dengan tiruannya dalam menyelesaikan permasalahan. Model adalah karakteristik umum yang mewakili sekelompok bentuk yang ada atau representasi suatu masalah dalam bentuk yang lebih sederhana dan mudah dikerjakan. Dalam matematika, teori model adalah ilmu yang menyajikan konsep-konsep matematis melalui konsep himpunan atau ilmu tentang model-model yang mendukung suatu sistem matematis.

Teori model diawali dengan asumsi keberadaan obyek-obyek matematika (misalnya keberadaan semua bilangan) dan kemudian mencari dan menganalisis keberadaan operasi-operasi, relasi-relasi, atau aksioma-aksioma yang melekat pada masing-masing obyek atau pada obyek-obyek tersebut. Model matematika yang diperoleh dari suatu masalah matematika yang diberikan, selanjutnya diselesaikan dengan aturan-aturan yang ada. Penyelesaian yang diperoleh, perlu diuji untuk mengetahui apakah penyelesaian tersebut valid atau tidak. Hasil yang valid akan menjawab secara tepat model matematikanya dan disebut solusi matematika. Jika penyelesaian tidak valid atau tidak memenuhi model matematika maka solusi masalah belum ditemukan, dan diperlukan pemecahan ulang atas model matematikanya (Frederich H. Bell, 1978).

2.5. Model SIR (S-I-R)

Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh W. O. Kermack dan Mc. Kendrick dalam makalahnya yang berjudul *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, yang kemudian muncul dalam Proceding Royal Society London halaman 700-721 tahun 1927, dan kemudian menjadi peranan penting dalam perkembangan matematika epidemi. Mengenai rangkuman tersebut telah dituliskan secara lengkap oleh Murray. Di dalam modelnya, populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu suspek dengan simbol S, terinfeksi dengan simbol I, dan sembuh atau recovery dengan simbol R, yang masing-masing diberikan dalam bentuk s, i dan r.

Jumlah total dari keseluruhan kelompok tersebut adalah

$$n = s + i + r \tag{2.3}$$

S atau *suscptible* dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi golongan ini dapat tertular penyakit. Oleh karena itu golongan ini juga memiliki kemungkinan untuk menjadi terinfeksi menjadi I atau *infected*. I atau *infected* merupakan individu yang dapat menyebarkan penyakit pada individu yang *susceptible*. Waktu yang diperlukan oleh penderita infeksi penyakit dinamakan periode penyakit. Setelah mengalami periode penyakit kemudian individu ini pindah dan menjadi individu yang sembuh atau *recovered*. R atau *recovered* merupakan individu yang telah sembuh atau kebal dalam kehidupannya.

Model SIR umumnya ditulis dalam bentuk persamaan diferensial biasa, yang merupakan salah satu bagian model deterministik (bukan pemilihan random, hal ini disebabkan karena kesamaan kondisi awal yang diberikan untuk mendapatkan output), dengan waktu kontinu (yang berlawanan dengan waktu diskrit). Sehingga dapat diasumsikan perubahan individu terinfeksi dan *susceptible* terjadi dengan laju proporsional terhadap jumlah populasi. Laju perubahan individu terinfeksi baru didefinisikan sebagai $\alpha si - \beta i$, dengan α merupakan nilai transmisivitas sedangkan β merupakan nilai laju penyembuhan. Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan probabilitas konstant sepanjang waktu, yang kemudian berubah secara konstant dengan laju penyembuhan perkapita yang dinotasikan sebagai β dan keseluruhannya disimbolkan sebagai βi. Maka persamaan diferensial yang didapat dalam penjabaran tersebut adalah sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha si \tag{2.4}$$

$$\frac{di}{dt} = \alpha si - \beta i \tag{2.5}$$

$$\frac{dr}{dt} = \beta i \tag{2.6}$$

Persamaan ini menggambarkan mengenai transisi masing-masing individu dari S ke I lalu ke R. Dengan menambahkan ketiga persamaan tersebut dapat ditunjukan dengan mudah bahwa total populasi adalah konstan (Iswanto, 2012).

2.6. Kestabilan Sistem

Untuk mendapatkan kestabilan suatu sistem diberikan metode yang lebih mudah dengan menyelidiki pengaruh perubahan kecil pada syarat awal. Jika titik (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan maka diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik kesetimbangan tersebut.

Jika titik (x, y) merupakan titik disekitar titik kesetimbangan tersebut maka secara matematis titik (x, y) dapat dinotasikan sebagai

$$(x, y) = (x^* + \Delta x, y^* + \Delta y) \tag{2.7}$$

Pendekatan fungsi $f_1\ (x, y)$ dan $f_2\ (x, y)$ dapat ditentukan menggunakan ekspansi deret taylor sebagai berikut

$$f_{1,2}\ (x, y) \approx f_{1,2}\ (x^*, y^*) + \frac{\partial f_{1,2}(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f_{1,2}(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \tag{2.8}$$

karena (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan maka $f_{1,2}(x^*, y^*) - 0$. Oleh karena itu, sistem $\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$ dan $\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$ dapat didekati sebagai sistem linear

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_1(x^*,y^*)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1(x^*,y^*)}{\partial y}\Delta y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial f_2(x^*,y^*)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_2(x^*,y^*)}{\partial y}\Delta y \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sistem linear di atas dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*,y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x^*,y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x^*,y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x^*,y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$= J(x) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

Matriks $J(x)$ pada sistem diatas merupakan matriks jacobian (khamsi, 2004).

2.7. Kriteria Kestabilan

Kriteria kestabilan titik kesetimbangan disajikan pada teorema di bawah ini:

Teorema 2.1 Nilai Eigen

a. Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J\big(f(\bar{x})\big)$ mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem stabil asimtotik.

b. Jika terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J\big(f(\bar{x})\big)$ mempunyai bagian real positif, maka titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem tidak stabil.

Jika persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit dalam mencari akar-akar karakteristiknya yaitu dengan nilai eigen matriks, maka untuk menentukan apakah nilai eigen bernilai negatif dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.2 kriteria Routh-Hurwitz

Diberikan persamaan karakteristik $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.

Untuk $n = 2$, kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut: $a_1 > 0, a_2 > 0$. Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi maka titik kesetimbangan stabil asimtotik (wiggins, 1990).

2.8. Metode Numerik

Metode Numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat di pecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi). Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematik dengan rumus – rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena sering kali persoalan matematik sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematika tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan maatematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik.

Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonliner. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan / error (Triatmodjo, 2002).

2.9. Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta di gunakan dalam penyelesaian masalah yang berhubungan dengan perhitungan numerik. Model umum dari metode Runge-Kutta tersebut yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n)h \qquad (2.11)$$

Dengan a_i adalah konstan dan k_i adalah :

$k_1 = f(x_i\ ,\ y_i)$

$k_2 = f(x_i +\ p_1.h.\ y_i + q_{11}.k_1.h)$

$k_3 = f(x_i +\ p_2.h.\ y_i + q_{21}.k_1.h + q_{22}.k_2.h)$

$k_4 = f\big(x_i +\ p_{n-1}.h.\ y_i + q_{n-1,2}.k_2.h + \cdots + q_{n-1,n-1}.k_{n-1}.h\big)$

Dengan p_{n-1} dan $q_{n-1,2}$ adalah konstan. Maka pada persamaan merupakan fungsi utama dari Runge-Kutta dan k_n adalah fungsi evaluasi dari Runge-Kutta (Singgih dan Erna, 2015).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu Dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019. Adapun tempat dilaksanakannya penilitian ini adalah di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah – langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambarkan karakteristik model penyakit *tuberculosis* (TBC).
2. Menjabarkan model matematika dalam penyakit *tuberculosis* (TBC).
3. Melakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta untuk melihat kestabilan perilaku sistem penyakit *tuberculosis* (TBC).
4. Menginterpretasikan hasil solusi dinamik tersebut.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Model SIR pada penyakit TBC adalah

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - (\mu + \beta + \omega I)S$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega IS - (\mu + \theta + \delta)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta S + \delta I$$

2. Diperoleh kestabilan vaksinasi pada TBC adalah

   a. Kestabilan di titik kesetimbangan bebas penyakit di dapatkan $-\mu < \beta$ maka $\lambda_1 < 0$ dan $\omega \frac{\alpha}{\mu+\beta} < \mu + \theta + \delta$ maka $\lambda_2 < 0$. Sehingga nilai dari $\omega \frac{\alpha}{\mu+\beta} < \mu + \theta + \delta$ bernilai sama dengan persamaan (4.20). Oleh karena itu, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik untuk $R_o < 1$.

   b. Kestabilan di titik endemik di dapatkan $\lambda^2 + \lambda R_o(\mu + \beta) + \big((\mu + \beta)(R_o - 1)\big)(\mu + \theta + \delta) = 0$ dengan $a_1 > 0, a_2 > 0$. Jika kretia terpenuhi maka merupakan stabil asimtotik.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis melakukan penelitian tentang pemodelan matematika dengan menggunakan tipe SIR dan diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan lagi dalam bentuk model SEIR.

DAFTAR PUSTAKA

Bell, Frederick H. 1978. *Teaching and Learning Mathematics in Secondary School.* Cetakan Kedua. Brown Company Publishers. Lowa.

Campbell, S.L. & Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems.* Princeton University Press, New Jersey.

Hethcone, H. W. 2000. *The Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM Review 42, no. 4, 599-653.

Iswanto, R.J. 2012. *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapannya.* Graha Ilmu, Yogyakarta.

Khamsi, M.A. 2004. *Equilibrium Point Analysis: Linearization Technique*. Utrecht University, Utrecht.

Muhammad, Singgih Tahwin. dkk. 2015. Pengkajian metode extended runge kutta dan penerapannya pada persamaan diferensial biasa. *Jurnal sains dan seni ITS Vol. 4, No. 1, (2015) 2337-3520 (2301-928X print).*

Neuhauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine.* Pearson Education, New Jersey.

Prayudi. 2006. *Matematika Teknik*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.

Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer Verlag, New York.