SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN LAPLACE PADA SUATU CAKRAM

(Skripsi)

Oleh

YULIA NOVITA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN LAPLACE PADA SUATU CAKRAM

Oleh

YULIA NOVITA

Matematika merupakan ilmu yang memiliki peranan penting dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.Persamaan Laplace banyak digunakan pada ilmu kimia, biologi dan fisika. Diantaranya digunakan dalam suatu cakram (*disk*) berbentuk lingkaran dengan titik pusat (0,0).Penelitian ini bertujuan untuk menentukan solusi analitik persamaan Laplace dua dimensi pada suatu cakram dengan menggunakan koordinat polar. Untuk memperlihatkan solusi dari persamaan Laplce dengan koordinat polar digunakan metode pemisahan peubah.

Kata kunci: Persamaan Laplace,Koordinat Polar, Cakram, Pemisahan Peubah, Solusi Analitik.

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTIONS OF LAPLACE EQUATIONS IN A DISC

By:

YULIA NOVITA

Mathematics is a science that has an important role in the development of science and technology. Laplace equations are widely used in chemistry, biology and physics. Among them are used in a circle (disk) with a center point (0,0). This study aims to determine the analytic solution of the two-dimensional Laplace equation on a disc using polar coordinates. To show the solution of the Laplce equation with polar coordinates, the variable separation method is used.

Keywords: Laplace Equations, Polar Coordinates, Discs, Variable Separation, Analytical Solutions.

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN LAPLACE PADA SUATU CAKRAM

Oleh

YULIA NOVITA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN LAPLACE PADA SUATU CAKRAM**

Nama Mahasiswa : Yulia Novita

No. Pokok Mahasiswa : 1517031125

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.
NIP 19620513 198603 1 003

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

Dorra E

2. a.n. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama

Prof. Sutopo Hadi, M.Sc., Ph.D.
NIP 19710415 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **17 Januari 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Yulia Novita
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031125
Judul	: Solusi Analitik Persamaan Laplace pada Suatu Cakram
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Februari 2019

METERAI TEMPEL 9E6A6AFF5571976 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Yulia Novita
NPM. 1517031125

RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Padang Lawas, 09 Juli 1996. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan suami istri Bapak Dasmon dan Ibu Zahara.

Penulis memulai pendidikan dasar di SD Negeri 10 Mungka, Kecamatan Mungka (2002-2008). Pendidikan menengah pertama, penulis tempuh di SMP Negeri 1 Mungka (2008-2011), kemudian dilanjutkan di SMA Negeri 1 Guguak (2011-2014). Penulis diterima sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung tahun 2015 melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri
(SBMPTN).

Pada awal 2018 penulis melaksanakan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) periode I (22 Januari 2018- 02 Maret 2018) di Desa Sukaraja Kecamata Cukuh Balak , Kabupaten Tanggamus Provinsi Lampung. Untuk mengaplikasikan ilmu yang diperoleh maka penulis melakukan Kerja Praktik periode II (18 juli 2018 - 25 Agustus 2018) di Dinas pendidikan dan Kebudayaan Kabupaten Lima Puluh Kota Provinsi Sumatera Barat.

KATA INSPIRASI

MOTTO:

“ Lakukan segala sesuatu dengan ikhlas, meskipun awalnya terpaksa kalau kita coba ikhlas akan menjadi bahagia akhirnya”

“Dan kami turunkan kepadamu Al-Qur’an untuk menjelaskan segala sesuatu dan petunjuk serta rahmat dan kabar gembira bagi orang-orang yang berserah diri.”(Q.S. An-Nahl: 89)

“Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”

(Q.S Al- Baqarah : 286)

Nikmati setiap proses hidup, karena setiap proses hidup akan memberikan pelajaran yang berharga

(Yulia Novita)

PERSEMBAHAN

Bismillahhirohmanirrohim

Dengan mengucap Alhamdulillah aku persembahkan karya sederhana ini kepada:

Ayah dan Ibu

Tiada kata yang bisa diucapkan selain kata bersyukur kepada kedua orang tua yang tekah memberikan segala hidupnya buat anakmu. Do’a tak henti-hentinya keoada ayah dan ibu yang telah memberikan kasih sayangnya,waktu dan pengorbanan untul anakmu.

Kakak dan Adikku tercinta,
terima telah mengajarkan arti kehidupan

sahabat-sahabat tersayang,
yang selalu memberikan doa, semangat, dan dukungan untuk kelancaran kuliahku selama ini,

serta untuk almamater yang kucintai dan kubanggakan

SANWACANA

Puji dan syukur tak henti-hentinya tercurahkan kepada Allah SWT berkat segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam semoga selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Tidak lupa pula ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam memberikan bimbingan, motivasi, semangat, serta saran yang telah membangun penulis selama proses penyusunan skripsi ini. Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D. sebagai Dosen Pembimbing 1 yang telah meluangkan waktu dan membimbing penulis selama menyusun skripsi.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si.,M.Si. sebagai Dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan saran serta arahan kepada penulis.
3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran dan evaluasi kepada penulis selama penyusunan skripsi.
4. Ibu Dr.Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan selama masa perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D. selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universita Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
8. Ayah, Ibu, adikku (M. Irfan Fakri) tersayang, yang selalu memberikan doa, dukungan, semangat, perhatian, dan pengorbanan terhadap penulis mendukung dan memotivasi untuk dapat menjadi kebanggaan keluarga sehingga dapat meraih kesuksesan.
9. “Gak Jelas”, “Kelompok Belajar”,“Teman Hidup” dan abang dan yunda matematika yang selalu memberikan masukan dan semangat kepada penulis
10. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Dengan segenap upaya penulis berusaha semaksimal mungkin untuk menyempurnakan tulisan ini. Namun, penulis menyadari bahwa kesempurnaan hanya milik Allah SWT. Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Bandar Lampung,   Februari 2019
Penulis

Yulia Novita

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR iii

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 2
1.3 Manfaat Penelitian 3

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial 4
2.2 Persamaan Laplace 4
2.3 Koordinat Polar 5
2.4 Pemisahan Peubah 6
2.5 Persamaan Diferensial Homogen Linear Orde Dua 8
2.6 Masalah Syarat Batas 9
2.7 Deret Fourier 10

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 12
3.2 Metode Penelitian 12

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Penelitian 14
4.2 Pembahasan 15

V. KESIMPULAN **33**

DAFTAR PUSTAKA **34**

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

Gambar 1 Cakram pada $sin\ \theta$ 30

Gambar 2 Cakram pada $cos\ \theta$ 31

Gambar 3 Cakram pada 10 32

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika merupakan ilmu yang memiliki peranan penting dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Objek dari matematika merupakan benda yang bersifat abstrak dan tidak dapat diamati oleh pancaindra. Menurut james, matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran, konsep-konsep yang berhubungan satu dengan lainnya. Matematika terbagi ke dalam tiga bidang seperti aljabar, analisis, dan geometri. Banyak cabang ilmu pengetahuan yang pengembangan teori-teorinya didasarkan pada pengembangan konsep matematika, seperti teori-teori dalam cabang fisika, biologi dan kimia yang ditemukan dan dikembangkan melalui konsep kalkulus khusunya tentang diferensial, contoh lain dalam bidang ekonomi seperti permintaan dan penawaran yang dikembangkan melalui konsep fungsi dan kalkulus tentang diferensial dan integral.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984). Persamaan diferensial parsial membahas tentang solusi analitik dan solusi numerik. Solusi analitik pada persamaan diferensial parsial diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara sistematis dan solusi yang diperoleh berupa nilai eksak (solusi sesungguhnya). Persamaan diferensial parsial yang merupakan contoh klasik dari persamaan eliptik yaitu persamaan Laplace. Persamaan Laplace merupakan persamaan dasar dari teori potensial dan memegang peranan penting dalam ilmu fisika maupun teknik. Persamaan Laplace digunakan pada potensial listrik, potensial gravitasi, potensial fluida, maupun suatu aliran suhu yang tidak bergantung pada waktu. Persamaan Laplace tidak memiliki nilai awal, karena tidak bergantung pada waktu atau *steady state*. Meskipun demikian, persamaan Laplace diikuti dengan syarat batas tertentu.

Bentuk umum persamaan Laplace: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Pemodelan persamaan Laplace serta penentuan penyelesaian permasalahan syarat batas dengan metode pemisahan peubah. Syarat batas yang digunakan adalah syarat batas *Dirichlet*. Terdapat dua sistem koordinat yang bersesuaian dengan persamaan diferensial yang berdimensi dua yaitu sistem persamaan kartesius dan koordinat polar. Sehingga dalam hal ini untuk cakram dengan menggunakan persamaan koordinat polar.

Dengan ini penulis bertujuan untuk memperlihatkan apakah benar solusi yang didapat dari persamaan Laplace mendapatkan solusi analitik atau tidak.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memperlihatkan hubungan persamaan Laplace dua dimensi pada suatu cakram dengan menggunakan persamaan koordinat polar kemudian mencari solusi analitiknya.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini diantaranya :

a. Untuk mengetahui hubungan koordinat polar dengan persamaan Laplace pada suatu cakram.

b. Untuk mengetahui penggunaan metode persamaan Laplace.

c. Untuk mengetahui hubungan pemisahan peubah dalam mencari solusi analitiknya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Menurut Purcell (2010) bahwa persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas.Persamaan diferensial parsial dikatakan linier jika hanya jika memuat derajat pertama dari variabel-variabel bebas dan derivatif-derivatif parsial. Beberapa contoh persamaan diferensial parsial :

a. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ persamaan gelombang satu dimensi

b. $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ persamaan konduksi panas satu dimensi

c. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ persamaan Laplace dua dimensi

d. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ persamaan Poisson dua dimensi

e. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ persamaan Laplace tiga dimensi

2.2 Persamaan Laplace

Menurut Hartanto (2008) bahwa persamaan Laplace merupakan salah satu jenis persamaan diferensial parsial yang banyak digunakan untuk memodelkan permasalahan dalam bidang sains. Persamaan ini merupakan persamaan eliptik (jika nilai diskriminan $B^2 - 4AC < 0$) dan merupakan jenis persamaan diferensial linier orde dua dengan dua peubah. Persamaan Laplace bentuk umumnya $\Delta v = 0$ (Δ operator Laplace) sering ditemukan pada perpindahan panas, mekanika fluida, elastisitas, masalah mekanika dan ilmu fisika. Masalah penyelesaian persamaan $\Delta^2 v = 0$ di dalam daerah D sering disebut *Dirichlet problem* dengan v sebagai fungsi yg diketahui dari D. Persamaan Laplace dapat dituliskan dalam beberapa bentuk tergantung pada sistem koordinat yang digunakan yaitu

1. Persamaan Laplace dalam dua dimensi

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ pada sistem koordinat kartesius

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ pada sistem koordinat polar

Dengan $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

2. Persamaan Laplace dalam tiga dimensi

$\Delta^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ pada koordinat kartesius

2.3 Koordinat Polar

Bentuk geometri di alam tidak selalu kotak-kotak, sehingga sistem koordinat *Cartesius* yang dikenal selama ini menjadi sangat terbatas penggunaannya. Koordinat *Cartesius* bukan merupakan jalan satu-satunya untuk menunjukan suatu benda atau titik pada bidang. Sistem koordinat polar atau bisa disebut dengan koordinat kutub merupakan salah satu sistem koordinat lain yang diciptakan untuk menunjukan kedudukan titik pada bidang yang bersifat lingkaran.

Pada koordinat *Cartesius* mempunyai sumbu x yang disebut absis dan y disebut ordinat. Pasangan (x, y) disebut dengan koordinat. Sedangkan pada koordinat polar mempunyai suatu titik yang disebut (r, θ).

Menurut Purcell (2010) bahwa koordinat polar r dan θ dapat dikonversi ke dalam sistem koordinat polar x dan y menggunakan fungsi trigonometri sinus dan kosinus seperti :

$$x = r\cos\theta \tag{2.1}$$

$$y = r\sin\theta \tag{2.2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.3}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \tag{2.4}$$

Dengan r adalah jarak antara titik pusat dengan titik asal [0,0] dan θ adalah sudut yang dibentuk oleh arah r dengan sumbu x dan y.

2.4 Pemisahan Peubah

Metode ini mereduksi persamaan diferensial parsial n variabel ke dalam n persamaan diferensial biasa. Metode ini menganggap bahwa suatu penyelesaian persamaan diferensial parsial dapat dinyatakan sebagai suatu perkalian dari masing-masing fungsi yang tak diketahui yang tergantung hanya pada suatu variabel (Humi, 1992)

Menurut Miller (1992) bahwa persamaan diferensial linear homogen dengan variabel bebas x dan t, serta variabel tak bebas u yang dilengkapi dengan syarat batas tertentu. Diasumsikan penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah $u(x,t) = X(x)T(t)$. Langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial dengan metode pemisahan peubah yaitu

1. Persamaan $u(x,t) = X(x)T(t)$ disubtitusikan ke persamaan diferensial
2. Hasil dari langkah (1) dibagi dengan $X(x)T(t)$.
3. Jika hasil dari langkah (2) dinyatakan sebagai jumlahan suku-suku yang tergantung dari x dan suku-suku yang hanya tergantung dari t, maka dengan konstanta pemisah ($-k$ atau k) akan didapat sistem dua persamaan diferensial biasa.
4. Gunakan syarat batas yang diberikan untuk menentukan syarat batas pada persamaan diferensial biasa dari langkah (3)
5. Selesaikan persamaan diferensial (Masalah syarat Batas) hasil dari langkah (3) dan langkah (4)
6. Diperoleh $u(x,t) = X(x)T(t)$ yang merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial di atas. Kemudian dengan prinsip superposisi ditentukan penyelesaian umumnya.
7. Gunakan nilai awal yang diberikan, kemudian ditentukan penyelesaian Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas

Bila fungsi penyelesaian dapat difaktorkan menjadi suatu fungsi x, maka nilai $u(x,t) = X(x)T(t)$

Dimana $X(x)$ dan $T(t)$ adalah independent maksudnya variabel X hanya fungsi dari x dan T hanya fungsi dari t.

$$u_t(x,t) = X(x)\frac{dT}{dt} = u(x,t) = XT' \qquad (2.5)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{d^2X}{dx^2}\,T(t) = X''T \qquad (2.6)$$

$$X''T = k\,XT' \qquad (2.7)$$

Dengan metode pemisahan peubah didapatkan

$X''T = k\,XT$ menjadi persamaan diferensial biasa

2.5 Persamaan Diferensial Homogen Linear Orde Dua

Diberikan persamaan diferensial homogen linear berorde dua dengan variabel tak bebas y dan variabel bebas x yang terdefinisi pada domain I sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx} + by = 0 \qquad (2.8)$$

Dengan a dan b merupakan suatu konstanta. Untuk memudahkan mencari penyelesaian di atas diperlukan suatu persamaan karakteristik yang sama dengan persamaan tersebut, persamaan ini dapat diperoleh dengan cara subtitusi $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ dan y berturut-turut m^2, m dan m^0. Sehingga didapat persamaan karakteristik yang sama yaitu

$$m^2 + am + b = 0 \qquad (2.9)$$

Persamaan karakteristik yang diperoleh berupa persamaan pangkat biasa sehingga dapat diselesaikan dengan pemfaktoran diperoleh akar-akar karakteristik. Menurut Ross (1984) bahwa akar-akar karakteristik dari suatu persamaan diferensial linear homogen orde dua dibedakan menjadi tiga yaitu

1. Akar-akar karakteristik riil berbeda

   Misalkan akar dari persamaan karakteristik pada persamaan (2.9) adalah m_1 dan m_2 dengan $m_1 \neq m_2 (D > 0)$, maka solusi umumnya adalah

   $$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \tag{2.10}$$

2. Akar-akar karakteristik riil kembar

   Misalkan akar dari persamaan karakteristik pada persamaan (2.9) adalah suatu akar kembar yaitu $m_1 = m_2 = m\ (D = 0)$, maka solusi umumnya adalah

   $$y = c_1 e^{m_x} + c_2 x e^{mx} \tag{2.11}$$

3. Akar-akar karakteristik bilangan kompleks

   Misalkan akar dari persamaan karakteristik pada persamaan (2.9) adalah akar imajiner $(D < 0)$ berbentuk $m_{1,2} = a \pm bi$. Maka solusi umumnya adalah

   $$y = e^{ax} c_1 cos(bx) + c_2 sin(bx) \tag{2.12}$$

2.6 Masalah Syarat Batas

Ketika mencari penyelesaian terhadap persamaan diferensial, seringkali menjumpai penyelesain yang masih dalam bentuk umum. Namun, jika akan mencari suatu penyelesaian khusus, maka diperlukan suatu kondisi tertentu. Pada persamaan diferesial biasa yang hanya mengandung satu variabel bebas, satu bentuk kondisi tertentu saja sudah cukup mendapatkan penyelesaian khusus. Berbeda dengan persamaan diferensial parsial. Khusus persamaan ini diperlukana dua bentuk kondisi tertentu karena terdapat lebih dari satu variabel bebas.

Untuk persamaan diferensial parsial orde dua, terdapat tiga bentuk syarat batas yaitu (Miller,1992)

a. Syarat batas dengan nilai $u(x,t)$ yang telah ditentukan, dinamakan kondisi *Dirichlet*
b. Syarat batas dengan nilai dari turunan normal $u(x,t)$ dituliskan sebagai $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = u_x$ telah ditentukan, dinamakan dengan kondisi *Neumann.*
c. Syarat batas dengan nilai u dan u_n yang ditentukan, dinamakan kondisi campuran atau kondisi Robin.

2.7 Deret Fourier

Bentuk umum deret Fourier adalah:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \qquad (2.13)$$

Dengan

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad (2.14)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad (2.15)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad n = 1,2,3, \ldots \qquad (2.16)$$

Deret Fourier mempunyai fungsi genap dan fungsi ganjil

Menurut Miller (1992) diberikan fungsi $f(x)$ terdefinisi pada interval $(-L, L)$, $L > 0$. Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi genap jika $f(-x) = f(x)$ pada interval $(-L, L)$ dan dikatakan sebagai fungsi ganjil $f(-x) = -f(x)$pada interval$(-L, L)$.

Contoh

1. Jika $f(x) = sin\, x$ merupakan fungsi ganjil, karena $sin\,(-x) = -sin\, x$ untuk setiap x interval $(-\pi, \pi)$.
2. Jika $f(x) = cos\, x$ merupakan fungsi genap, karena $cos\,(-x) = cos\, x$ untuk setiap x interval $(-\pi, \pi)$.
3. Jika fungsi $g(x) = x^2 - 2x$ bukan fungsi genap ataupun fungsi ganjil karena

$$g(-x) = (-x^2) - 2(-x) = x^2 + 2x \neq \pm g(x) \qquad (2.17)$$

Misalkan nilai $f(x)$ merupakan fungsi ganjil maka nilai dari $a_n = 0$ dan akan dicari nilai dari b_n dan jika nilai $f(x)$ merupakan fungsi genap maka nilai $b_n = 0$ maka dicari nilai a_n. Berlaku pada deret Fourier yang mengandung suku sinus dan cosinus saja.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan persamaan Laplace pada suatu cakram dengan menggunakan koordinat polar dan mendapatkan solusi analitiknya adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi pustaka seperti buku dan jurnal dari perpustakaan dan internet.
2. Merumuskan masalah dalam bentuk persamaan Laplace pada koordinat polar.

Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan solusi analitik persamaan Laplace pada suatu cakram dengan menggunakan koordinat polar

1. Menulis persamaan Laplace pada wilayah lingkaran dengan mempertimbangkan radius cakram.
2. Menulis persamaan Laplace menggunakan koordinat polar.

3. Mencari nilai turunan parsial pertama dan kedua pada koordinat polar.
4. Mencari persamaan diferensial homogen menggunakan koordinat polar.
5. Mencari solusi persamaan diferensial homogen menggunakan metode pemisahan peubah.
6. Mencari solusi Masalah Syarat Batas menggunakan deret Fourier .

V. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan yang didapat dari hasil persamaan Laplace pada suatu cakram dengan menggunakan koordinat polar sebagai berikut:

Maka didapatkan hasil akhir dari penelitian ini berupa deret Fourier

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\theta) r^n$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta), \qquad n = 0$$

$$A_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

DAFTAR PUSTAKA

Finizio, N dan Ladaz, G. 1982. *Ordinary Diferential Equation.* Troy, New York. Rensselaer Polytechnik Institute.

Hartanto, S. A. 2008. *Penyelesaian Numerik Persamaan Laplace dan Persamaan Poisson dalam Pelat Persegi Panjang dan Pelat Cakram Dengan Metode Beda-Hingga*. Universitas Sanata Dharma. Yokyakarta.

L.Ross, S. 1984. *Differential Equations*. 3rd Ed. John Wiley & Sons, Inc . New York.

Miller, William B., dan Humi M. 1992. *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*. PWS-KENT Publishing Company. Boston.

Mufidah, F., dan Jauhuri, M. 2015. Solusi Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Pada Koordinat Polar. *Jurnal Matematika dan Aplikasi*. **3**(4): 46-47.

Purcell, Dale V., dan Edwin J. 2010. *Calculus Kalkulus Jilid 1(Alih Bahasa Indonesia oleh I Nyoman Susila).* Binarupa Aksara. Tangerang.

Strauss, dan Walter A. 1992. *Partial Differential Equations(An Introduction).* JohnWiley & Sons,Inc. New York.